

Werk

Titel: Über reguläre Z-Ringe

Autor: Steinfeld, O.; KERTÉSZ, A.

Jahr: 1974

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0003|log5

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Über reguläre Z-Ringe

ANDOR KERTÉSZ und OTTO STEINFELD

Unter einem Ring verstehen wir in dieser Arbeit stets einen *assoziativen* Ring. Ein Ring A heißt *Z-Ring*, falls jedes Element $a \in A$ mit $a^2 = 0$ mit jedem Idempotent von A vertauschbar ist. Die Klasse der Z-Ringe ist nicht leer, da z. B. jeder Zero-ring, jeder Schiefkörper oder jeder vollständig primäre artinsche Ring zu dieser Klasse gehört. Der Ring aller zweireihigen quadratischen Matrizen über einem Körper liegt hingegen außerhalb dieser Klasse, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir untersuchen in dieser Arbeit reguläre Z-Ringe. Es stellt sich heraus, daß innerhalb der Klasse der regulären Ringe die Klasse der Z-Ringe mit der der Duoringe übereinstimmt. Unter anderem wird auch gezeigt, daß jeder reguläre Duoring in einen regulären Duoring mit Einselement eingebettet werden kann.

Es sei A ein Ring. Ist a ein Element von A , so bezeichnet $(a)_r$ bzw. $(a)_l$ das durch a erzeugte Rechts- bzw. Linksideal von A . Für das Zentrum von A verwenden wir die Bezeichnung $C(A)$. Ein Element $a \in A$ heißt *Duolement*, falls $(a)_r = (a)_l$ gilt. Der Ring R selbst heißt ein *Duoring*, wenn jedes seiner einseitigen Ideale (d. h. Rechts- oder Linksideale) ein (zweiseitiges) Ideal ist.

Lemma 1. *Ein Ring A ist genau dann ein Duoring, wenn jedes seiner Elemente ein Duolement ist.*

Beweis. Da die Richtigkeit der Behauptung in einer Richtung trivial ist, genügt es, den Fall zu betrachten, wenn jedes Element von A ein Duolement ist. Es sei B ein Rechtsideal von A , und es sei $x \in B$. Dann gilt

$$Ax \subseteq A(x)_r = A(x)_l \subseteq (x)_l = (x)_r \subseteq B,$$

d. h., B ist ein (zweiseitiges) Ideal. Analog gilt, daß jedes Linksideal von A ebenfalls ein Ideal ist.

Das folgende Lemma ist bekannt:

Lemma 2 ([6], Prop. 1). *Jedes idempotente Element eines Duorings liegt in seinem Zentrum.*

Ein Element a eines Ringes A heißt *regulär*, wenn es ein Element x in A gibt, für das $axa = a$ gilt. Der Ring A heißt *regulär*, wenn jedes seiner Elemente regulär ist.

Lemma 3. *Liegt jedes Idempotent des regulären Ringes A in seinem Zentrum, so enthält A kein von 0 verschiedenes nilpotentes Element.¹⁾*

Beweis. Es sei $0 \neq a \in A$ mit

$$a^n = 0 \quad \text{und} \quad a^{n-1} \neq 0,$$

wobei n eine natürliche Zahl ist. Wegen der Regularität von a gilt $a = axa$ ($x \in A$), und xa ist ein Idempotent. Da jedes Idempotent von A in $C(A)$ liegt, folgt

$$a = a(xa) = xa^2$$

und somit

$$0 \neq a^{n-1} = xa^n = 0,$$

was ein trivialer Widerspruch ist.

Lemma 4. *Jedes Idempotent e eines Z-Ringes A liegt im Zentrum von A .*

Beweis. Es gilt $(ea - eae)^2 = 0$ für jedes $a \in A$. Folglich ist das Element $ea - eae$ mit jedem Idempotent aus A und insbesondere auch mit e vertauschbar. Es gilt dann

$$ea - eae = e(ea - eae) = (ea - eae)e = 0,$$

also $ea = eae$. Analog ergibt sich $ae = eae$, so daß

$$ea = ae \quad \text{für jedes} \quad a \in A$$

gilt, q. e. d.

Es gilt der

Satz 5. *Für einen regulären Ring A sind die folgenden Aussagen äquivalent:²⁾*

- (I) A ist ein Duoring.
- (II) Jedes Idempotent von A liegt in $C(A)$.
- (III) A besitzt kein von 0 verschiedenes nilpotentes Element.
- (IV) A ist ein Z-Ring.

Beweis. (I) $\Rightarrow$ (II): Nach Lemma 2.

(II) $\Rightarrow$ (III): Nach Lemma 3.

(III) $\Rightarrow$ (IV): Trivial.

(IV) $\Rightarrow$ (I): Nach Lemma 1 genügt es zu zeigen, daß für jedes Element $a \in A$

$$(a)_l = (a)_r$$

gilt. Da A ein regulärer Ring ist, gibt es ein Element $x \in A$ mit $a = axa$. Dabei sind

$$e := ax \quad \text{und} \quad f := xa$$

¹⁾ Diese Behauptung läßt sich auch in einer schärferen Form beweisen: *Ein regulärer Ring enthält kein von 0 verschiedenes nilpotentes Element genau dann, wenn jedes seiner Idempotenten im Zentrum liegt* (vgl. [3], Hilfssatz 3.26, S. 82).

²⁾ Bezüglich der Äquivalenz der Bedingungen (I) und (III) siehe [4].

Idempotente, die nach Lemma 4 in $C(A)$ liegen. Insbesondere gilt

$$(e)_l = (e)_r \quad \text{und} \quad (f)_l = (f)_r,$$

ferner

$$a = (ax)a = ea = ae = af = fa.$$

Nach dieser Vorbereitung sieht man leicht ein, daß

$$(a)_l \subseteq (e)_l = (e)_r = (a)_r \quad (1)$$

und

$$(a)_r \subseteq (f)_r = (f)_l = (a)_l \quad (2)$$

ist. Aus (1) und (2) folgt dann $(a)_l = (a)_r$, q. e. d.

Satz 6 (vgl. [6], Theorem 1). *Für einen Ring $A \neq (0)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- (a) *A ist ein subdirekt irreduzibler regulärer Duoring.*
- (b) *A ist ein subdirekt irreduzibler regulärer Z -Ring.*
- (c) *A ist ein Schiefkörper.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Nach Satz 5.

(b) $\Rightarrow$ (c): Es sei a ein von 0 verschiedenes und b ein beliebiges Element aus A . Wie bekannt (vgl. etwa [3], Satz 2.5, S. 36), genügt es zu zeigen, daß die Gleichung

$$ax = b \quad (3)$$

in A lösbar ist. Wegen der Regularität von A gibt es ein $y \in A$ mit

$$aya = a \neq 0.$$

Daraus folgt einerseits, daß $ay \neq 0$, andererseits, daß ay ein Idempotent ist. Ferner gilt nach Lemma 4 $ay \in C(A)$. Folglich ist ay das Einselement von A (diesbezüglich siehe etwa Hilfssatz 3.25 in [3]: Liegt ein idempotentes Element $e (\neq 0)$ eines subdirekt irreduziblen Ringes A in $C(A)$, so ist e das Einselement von A .) Das Element $x = yb \in A$ ist eine Lösung für (3), denn es gilt

$$ax = a(yb) = (ay)b = b.$$

(c) $\Rightarrow$ (a): Trivial.

Satz 7. *Ein Ring $A \neq (0)$ kann dann und nur dann als eine subdirekte Summe von Schiefkörpern dargestellt werden, wenn A ein regulärer Z -Ring ist.*

Dieser Satz folgt unmittelbar aus Satz 5 sowie aus dem wohlbekannten Satz von FORSYTHE-McCOY [1], nach welchem die Regularität und die Abwesenheit von 0 verschiedener nilpotenter Elemente notwendige und hinreichende Bedingungen dafür sind, daß ein Ring $\neq (0)$ zu einer subdirekten Summe von Schiefkörpern isomorph ist.

Satz 8. *Jeder reguläre Z -Ring kann als Ideal in einen regulären Z -Ring mit Einselement eingebettet werden.*

Beweis. Es sei R ein regulärer Z -Ring und M derjenige kommutative reguläre Ring mit Einselement 1, der im Abschnitt 2 von [2] konstruiert wird. Wie ebenfalls in [2] gezeigt wird, kann R — durch eine passende Definition des Produktes qa ($a \in R, q \in M$) — als eine Algebra über M aufgefaßt werden.

Wir betrachten die Menge R^* aller Paare

$$\langle a, q \rangle \quad \text{mit} \quad a \in R, q \in M$$

und definieren

$$\begin{aligned}\langle a_1, \varrho_1 \rangle &= \langle a_2, \varrho_2 \rangle \Rightarrow a_1 = a_2 \text{ und } \varrho_1 = \varrho_2; \\ \langle a_1, \varrho_1 \rangle + \langle a_2, \varrho_2 \rangle &:= \langle a_1 + a_2, \varrho_1 + \varrho_2 \rangle; \\ \langle a_1, \varrho_1 \rangle \langle a_2, \varrho_2 \rangle &:= \langle a_1 a_2 + \varrho_2 a_1 + \varrho_1 a_2, \varrho_1 \varrho_2 \rangle.\end{aligned}$$

Die algebraische Struktur $(R^*, +, \cdot)$ ist ein Ring mit dem Einselement $\langle 0, 1 \rangle$. Ferner enthält R^* ein isomorphes Bild des Ringes R als Ideal, denn die Abbildung

$$q: a \rightarrow \langle a, 0 \rangle \quad \forall a \in R$$

ist ein Monomorphismus, und es gilt

$$\langle a', \varrho' \rangle \langle a, 0 \rangle = \langle a'a + \varrho'a, 0 \rangle \in Rq$$

und

$$\langle a, 0 \rangle \langle a', \varrho' \rangle = \langle aa' + \varrho'a, 0 \rangle \in Rq$$

für jedes $a, a' \in R$ und $\varrho' \in M$.

Nach [2] ist R ein regulärer Ring, so daß es auf Grund des Satzes 5 nur noch zu zeigen genügt, daß R kein 0 verschiedenes nilpotentes Element besitzt. Es sei $\langle a, \varrho \rangle \in R^*$ und k eine natürliche Zahl mit

$$\langle a, \varrho \rangle^k = \langle 0, 0 \rangle.$$

Dann ist $\varrho^k = 0$. Da M regulär und kommutativ ist, folgt $\varrho = 0$. Dann gilt vermöge (4)

$$\langle a, \varrho \rangle^k = \langle a, 0 \rangle^k = \langle a^k, 0 \rangle = \langle 0, 0 \rangle$$

und somit $a^k = 0$. Weil R ein regulärer $\mathbb{Z}$ -Ring ist, folgt nach Satz 5 $a = 0$. Damit ist der Beweis des Satzes erbracht.

LITERATUR

- [1] FORSYTHE, A., and N. H. MCCOY: On the commutativity of certain rings. Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 523—526.
- [2] FUCHS, L., and I. HALPERIN: On the imbedding of a regular ring in a regular ring with identity. Fund. Math. 54 (1964), 285—290.
- [3] KERTÉSZ, A.: Vorlesungen über artinsche Ringe. Budapest-Leipzig 1968.
- [4] LAJOS, S., and F. SZÁSZ: Some characterizations of two-sided regular rings. Acta Sci. Math. 31 (1970), 223—228.
- [5] STEINFELD, O.: Über die regulären Duo-Elemente in Gruppoid-Verbänden. Acta Sci. Math. 32 (1971), 327—331.
- [6] THIERRIN, G.: On duo rings, Canad. Math. Bull. 3 (1960), 167—172.

Manuskripteingang: 9. 3. 1971

VERFASSER:

ANDOR KERTÉSZ, Mathematisches Institut der Kossuth-Lajos-Universität
Debrecen
OTTO STEINFELD, Mathematisches Forschungsinstitut der Ungarischen
Akademie der Wissenschaften Budapest