

## Werk

**Titel:** Die flächenkleinsten Vierecke, die zwei gegebene, sich von außen berührende Kreis...

**Autor:** KRÖTENHEERDT, O.; Richter, P.; MAMMITZSCH, C.

**Jahr:** 1974

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052\\_0003|log18](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0003|log18)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## Die flächenkleinsten Vierecke, die zwei gegebene, sich von außen berührende Kreise enthalten

OTTO KRÖTENHEERDT, CLAUD MAMMITZSCH und PETER RICHTER

### 1. Einleitung und Resultate

In [3] wurde im Zusammenhang mit gewissen regelmäßigen Lagerungen von Kreisen unterschiedlicher Radien in der Ebene auf Deckabbildungsgruppen und deren Fundamentalbereiche mit eingelagerten Kreisen verwiesen. Da als Fundamentalbereiche der Deckabbildungsgruppen der Ebene Dreiecke und Vierecke auftreten, ist es naheliegend, die in [3] für Dreiecke behandelten Fragen mit der vorliegenden Arbeit auch für Vierecke zu formulieren und zu beantworten.

Zunächst wird nach den flächenkleinsten Vierecken gefragt, welche zwei gegebene, sich von außen berührende Kreise  $K_1$  und  $K_2$  enthalten; die Radien seien  $r_1$  bzw.  $r_2$ , und es gelte o.B.d.A.  $r_1 \geq r_2$ . Anschließend wird dann die Frage untersucht, wie groß für jeden Wert  $q = r_2:r_1$  aus dem Intervall  $0 \leq q \leq 1$  der von den Kreisflächen bedeckte Teil eines jeweils flächenkleinsten Vierecks ist; von besonderem Interesse ist dabei die sogenannte maximale Lagerungsdichte, mit der sich zwei Kreise in ein Viereck einlagern lassen. Wir schließen bei der zweiten Fragestellung den Fall  $q = 0$  mit ein, obwohl in diesem Fall  $K_2$  zu einem Punkt entartet ist. Die Untersuchungen zu den gestellten Fragen führen zu den unter (A) und (B) zusammengefaßten Ergebnissen. Bei der Angabe von Intervallen werden neben exakten Werten für Intervallgrenzen auch Näherungswerte verwendet, die in den ersten drei Stellen hinter dem Komma mit den exakten Werten übereinstimmen; der exakte Wert ist also jeweils um weniger als ein Tausendstel größer als der angegebene Näherungswert.

(A)

$K_1$  und  $K_2$  seien zwei sich von außen berührende Kreise mit den Radien  $r_1$  bzw.  $r_2$ , und es sei  $r_1 \geq r_2$ .

- a) Ist  $0 < r_2 < q' \cdot r_1$ ,  $q' = 3 - 2\sqrt{2}$  ( $q' \approx 0,172$ ), so gibt es für jedes  $r_2$  dieses Intervalls unendlich viele flächenkleinste Vierecke, die  $K_1$  und  $K_2$  enthalten. Jedes solche Viereck ist ein Quadrat und enthält  $K_1$  als Inkreis (vgl. Abb. 1).

b) Ist  $q' \cdot r_1 \leq r_2 < q'' \cdot r_1$  ( $q'' \approx 0,549$ ),  $q''$  ist Lösung der Bestimmungsgleichung

$$\frac{2\sqrt{q}}{1-q} + 3 \tan\left(\frac{1}{3} \arctan \frac{2\sqrt{q}}{q-1}\right) = 2 \cdot \frac{(1+q)(1+q^2)}{\sqrt{q}},$$

so gibt es für jedes  $r_2$  dieses Intervalls genau ein flächenkleinstes Viereck, das  $K_1$  und  $K_2$  enthält. Dieses Viereck ist ein Deltoid, bei dem jede Seite des einen Paares gleichlanger Seiten auf einer gemeinsamen Tangente an  $K_1$  und  $K_2$  liegt, während jede der beiden anderen Seiten mit ihrem Mittelpunkt  $K_1$  berührt (vgl. Abb. 3); ist  $r_2 = q' \cdot r_1$ , so ist das beschriebene Deltoid ein Quadrat, und jede Seite dieses Quadrates berührt mit ihrem Mittelpunkt  $K_1$  (vgl. Abb. 2).

c) Ist  $r_2 = q'' \cdot r_1$ , so gibt es genau zwei flächenkleinste Vierecke, die  $K_1$  und  $K_2$  enthalten. Eines dieser beiden Vierecke ist ein Deltoid der unter b) beschriebenen Art (vgl. Abb. 4); das andere Viereck ist ein gleichschenkliges Trapez, bei dem jeder der beiden Schenkel auf einer gemeinsamen Tangente an  $K_1$  und  $K_2$  liegt, während von den beiden restlichen Seiten die längere mit ihrem Mittelpunkt  $K_1$  und die kürzere mit ihrem Mittelpunkt  $K_2$  berührt (vgl. Abb. 5).

d) Ist  $q'' \cdot r_1 < r_2 \leq r_1$ , so gibt es für jedes  $r_2$  dieses Intervalls genau ein flächenkleinstes Viereck, das  $K_1$  und  $K_2$  enthält. Dieses Viereck ist ein gleichschenkliges Trapez der unter c) beschriebenen Art, falls  $r_2 < r_1$  ist (vgl. Abb. 6); ist  $r_2 = r_1$ , so ist das flächenkleinste Viereck ein gleichschenkliges Trapez von der Gestalt eines Rechtecks (vgl. Abb. 7).

(B)

Es sei  $q$  der Quotient  $r_2:r_1$ , und  $d(q)$  sei die Lagerungsdichte der sich von außen berührenden Kreise  $K_1$  und  $K_2$  in einem bzw. in dem flächenkleinsten Viereck, welches  $K_1$  und  $K_2$  enthält, d. h.,  $d(q)$  ist der Quotient aus der Summe der zu  $K_1$  und  $K_2$  gehörenden Kreisflächeninhalte und dem Flächeninhalt eines bzw. des flächenkleinsten Vierecks, welches  $K_1$  und  $K_2$  enthält.

a) Ist  $0 \leq q \leq q'$ ,  $q' = 3 - 2\sqrt{2}$  ( $q' \approx 0,172$ ), so wird die Dichte  $d(q)$  durch die Funktion

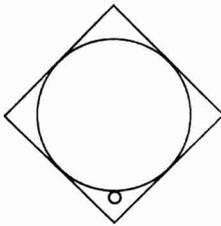
$$d(q) = \frac{\pi}{4} (1 + q^2)$$

beschrieben; in diesem Intervall wächst die Dichte streng monoton von  $d(0) = \pi/4 \approx 0,785$  bis  $d(q') = \frac{\pi}{2} (9 - 6\sqrt{2}) \approx 0,808$ .

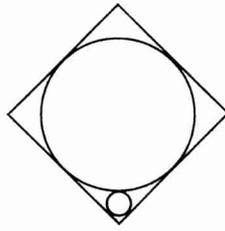
b) Ist  $q' \leq q \leq q''$ ,  $q'' \approx 0,549$  (vgl. unter (A)), so wird die Dichte  $d(q)$  durch die Funktion

$$d(q) = \pi \cdot \frac{1 + q^2}{\frac{2\sqrt{q}}{1-q} + 3 \tan\left(\frac{1}{3} \arctan \frac{2\sqrt{q}}{q-1}\right)}$$

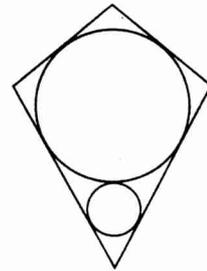
beschrieben; in diesem Intervall wächst die Dichte streng monoton von  $d(q') \approx 0,808$  bis  $d(\bar{q}) \approx 0,823$  an der Stelle  $\bar{q} \approx 0,289$  und fällt von  $d(\bar{q})$  bis  $d(q'') \approx 0,751$  streng monoton.



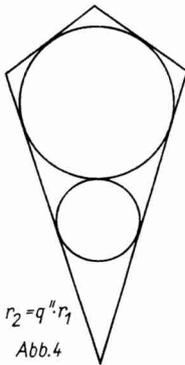
$0 < r_2 < q^4 \cdot r_1$   
Abb. 1



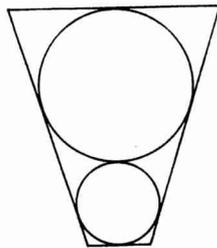
$r_2 = q^4 \cdot r_1$   
Abb. 2



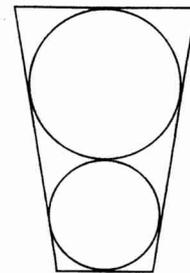
$q^4 \cdot r_1 < r_2 < q^4 \cdot r_1$   
Abb. 3



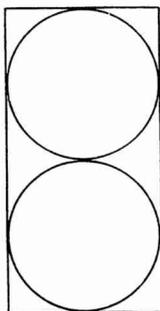
$r_2 = q^4 \cdot r_1$   
Abb. 4



$r_2 = q^4 \cdot r_1$   
Abb. 5



$q^4 \cdot r_1 < r_2 < r_1$   
Abb. 6



$r_2 = r_1$   
Abb. 7

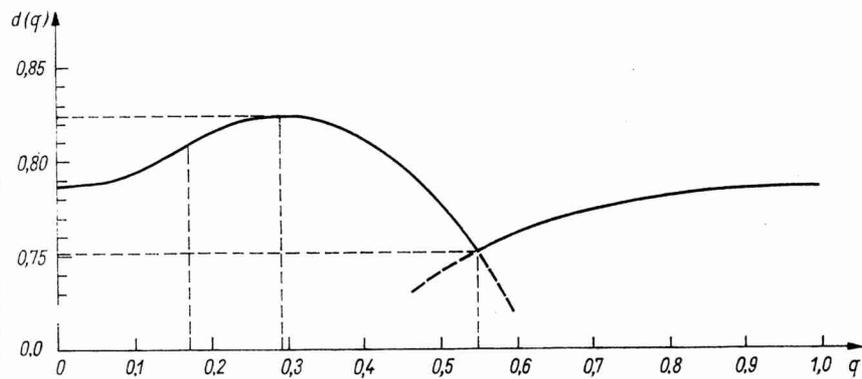


Abb. 8

c) Ist  $q'' \leq q \leq 1$ , so wird die Dichte  $d(q)$  durch die Funktion

$$d(q) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{q}}{1+q}$$

beschrieben; in diesem Intervall wächst die Dichte streng monoton von  $d(q'') \approx 0,751$  bis  $d(1) = \pi/4 \approx 0,785$ .

Im gesamten Intervall  $0 \leq q \leq 1$  wird also die größte Dichte an der Stelle

$$\bar{q} \approx 0,289 \text{ mit } d(\bar{q}) \approx 0,823$$

und die kleinste Dichte an der Stelle

$$q'' \approx 0,549 \text{ mit } d(q'') \approx 0,751$$

angenommen (vgl. Abb. 8).

## 2. Beweis zu (A)

Wir betrachten wie in [3] die durch  $K_1$  und  $K_2$  bestimmten Kreisflächen  $F_1$  und  $F_2$  als Punktmengen und bezeichnen mit  $H$  die konvexe Hülle der Vereinigung von  $F_1$  und  $F_2$ .

Wegen Hilfssatz 1 ist jedes flächenkleinste Viereck, welches  $K_1$  und  $K_2$  enthält, ein konvexes Viereck; jedes derartige Viereck ist somit auch ein flächenkleinstes Viereck, welches  $H$  enthält, und umgekehrt.  $H$  ist ein konvexer Bereich, und für ihn gilt der Satz, daß jedes  $H$  enthaltende konvexe  $n$ -Eck von minimalem Inhalt dem Bereich derart umbeschrieben ist, daß jeder Seitenmittelpunkt Stützpunkt der betreffenden Seite bezüglich  $H$  ist (vgl. [1], S. 6). Offensichtlich gibt es auf jeder Seite jedes flächenkleinsten Vierecks, welches  $H$  enthält, entweder genau einen oder unendlich viele Stützpunkte bezüglich  $H$ .

Auf Grund des zitierten Satzes muß jedes flächenkleinste Viereck, welches  $H$  (und damit auch  $K_1$  und  $K_2$ ) enthält, eines derjenigen Vierecke sein, die durch folgende Aufzählung charakterisiert sind.

1. Jede Viereckseite besitzt genau einen Stützpunkt bezüglich  $H$ , d. h., außer den Seitenmittelpunkten gibt es keine weiteren Stützpunkte.

1.1. Vier Stützpunkte liegen auf  $K_1$ . Jedes derartige Viereck ist zwangsläufig ein Quadrat mit  $K_1$  als Inkreis. Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn

$$0 < r_2 < q' \cdot r_1 \quad \text{mit} \quad q' = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,172.$$

Der Wert  $q' = 3 - 2\sqrt{2}$  ergibt sich bei der Bestimmung eines größtmöglichen Kreises  $K_2$ , welcher  $K_1$  außen berührt und in einem  $K_1$  umbeschriebenen Quadrat enthalten ist (vgl. Abb. 2); es gilt nämlich  $2 \cdot (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$ , und daraus folgt für den vorliegenden geometrischen Sachverhalt  $r_2 = (3 - 2\sqrt{2}) \cdot r_1$ .

1.2. Drei Stützpunkte liegen auf  $K_1$ , ein Stützpunkt liegt auf  $K_2$ . Jedes derartige Viereck ist zwangsläufig ein gleichschenkliges Trapez mit drei gleichlangen Seiten, die  $K_1$  berühren, und einer weiteren kürzeren Seite, die  $K_2$  berührt (vgl. Abb. 9). Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn

$$0 < r_2 < q_1 \cdot r_1 \quad \text{mit} \quad q_1 = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414.$$

Der Wert  $q_1 = \sqrt{2} - 1$  ergibt sich bei der Bestimmung des größtmöglichen Kreises  $K_2$ , welcher  $K_1$  außen berührt und in einem gleichschenkligen Trapez mit drei gleichlangen Seiten liegt, von denen jede mit ihrem Mittelpunkt den Kreis  $K_1$  berührt, während die vierte Seite mit ihrem Mittelpunkt den Kreis  $K_2$  berührt (vgl. Abb. 10); denkt man sich nämlich vom Mittelpunkt  $M_1$  von  $K_1$  die Verbindungsgerade  $g$  zum Mittelpunkt eines Trapezschenkels, die Verbindungsgerade der Mittelpunkte beider Trapezschenkel, die Verbindungsgerade beider Kreismittelpunkte und schließlich das Lot vom Mittelpunkt  $M_2$  von  $K_2$  auf  $g$ , so erkennt man die Beziehung

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2},$$

und daraus folgt schließlich für den vorliegenden geometrischen Sachverhalt

$$r_2 = (\sqrt{2} - 1) \cdot r_1.$$

In jedem Viereck der beschriebenen Art ist zwar jeder Seitenmittelpunkt Stützpunkt der betreffenden Seite bezüglich  $H$ , aber das ist für den minimalen Flächeninhalt des Vierecks nur notwendig, nicht hinreichend. Offensichtlich können zu jedem Viereck der beschriebenen Art durch Abrollen von  $K_2$  auf  $K_1$  flächenkleinere Vierecke gefunden werden, die ebenfalls  $K_1$  und  $K_2$  enthalten, so daß der Fall 1.2. für die Lösung unserer gestellten Aufgabe nicht in Betracht kommt.

1.3. Zwei Stützpunkte liegen auf  $K_1$ , zwei Stützpunkte liegen auf  $K_2$ . Jedes derartige Viereck ist zwangsläufig ein Deltoid. Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn

$$q_2 \cdot r_1 < r_2 \leq r_1 \quad \text{mit} \quad q_2 \approx 0,592;$$

ist  $r_2 = r_1$ , so kann das Deltoid in zwei gleichseitige Dreiecke zerlegt werden. Der Wert  $q_2$  ergibt sich bei der Bestimmung desjenigen Kreises  $K_2$ , der  $K_1$  außen berührt und mit  $K_1$  in einem Deltoid liegt, von dem zwei Seiten jeweils mit dem Mittelpunkt den Kreis  $K_1$  berühren, während jede der beiden anderen Seiten auf einer gemeinsamen Tangente an  $K_1$  und  $K_2$  liegt und mit dem Mittelpunkt den Kreis  $K_2$  berührt (vgl. Abb. 11); auf Grund mehrerer elementarer Beziehungen und nach einigen Zwischenrechnungen ist es nämlich möglich, zu der Gleichung

$$r_1^4 - r_2 \cdot r_1^3 - 5 r_2^2 \cdot r_1^2 - 3 r_2^3 \cdot r_1 + 16 r_2^4 = 0$$

zu gelangen, und daraus folgt schließlich für den vorliegenden geometrischen Sachverhalt

$$r_2 = q_2 \cdot r_1;$$

$q_2$  ist diejenige der beiden reellen Lösungen von

$$16 x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x + 1 = 0,$$

welche größer als 0,5 ist.

Obwohl bei jedem Viereck der beschriebenen Art jeder Seitenmittelpunkt Stützpunkt der betreffenden Seite bezüglich  $H$  ist, kommt wegen Hilfssatz 2 kein Viereck vom Fall 1.3. für die Lösung unserer gestellten Aufgabe in Betracht; denn jedes solche Viereck kann in ein flächenkleineres Viereck verwandelt werden, welches ebenfalls  $K_1$  und  $K_2$  enthält.

In der durchgeführten Fallunterscheidung kann es unter 1. keine weiteren Fälle geben.

2. Drei Vierecksseiten besitzen jeweils genau einen Stützpunkt, und eine Vierecksseite besitzt unendlich viele Stützpunkte bezüglich  $H$ , d. h., bei drei Seiten ist jeweils der Seitenmittelpunkt einziger Stützpunkt, und die vierte Seite liegt auf einer gemeinsamen Tangente an  $K_1$  und  $K_2$ , wobei der Mittelpunkt dieser Seite nicht außerhalb der durch die Berührungspunkte bestimmten Strecke liegt.

2.1. Vier Stützpunkte liegen auf  $K_1$ , ein Stützpunkt liegt auf  $K_2$ . Jedes derartige Viereck ist wieder wie im Fall 1.1. zwangsläufig ein Quadrat mit  $K_1$  als Inkreis. Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn

$$0 < r_2 < q' \cdot r_1 \quad \text{mit} \quad q' = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,172.$$

2.2. Drei Stützpunkte liegen auf  $K_1$ , zwei Stützpunkte liegen auf  $K_2$ . Jedes derartige Viereck ist zwangsläufig ein asymmetrisches Viereck (vgl. Abb. 12). Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn

$$q_1 \cdot r_1 < r_2 \leq q_3 \cdot r_1 \quad \text{mit} \quad q_3 \approx 0,62.$$

Um dies einzusehen, ist die Betrachtung gewisser Kurven erforderlich, die den gegebenen Kreisen  $K_1$  und  $K_2$  zugeordnet sind. Die Ergebnisse dieser Nebenbetrachtungen sind im Hilfssatz 3 zusammengefaßt, wonach es, bis auf Kongruenz, für jedes  $r_2$  des Intervalls  $q_1 \cdot r_1 < r_2 \leq q_2 \cdot r_1$  und für  $r_2 = q_3 \cdot r_1$  genau ein asymmetrisches Viereck und für jedes  $r_2$  des Intervalls  $q_2 \cdot r_1 < r_2 < q_3 \cdot r_1$  genau zwei asymmetrische Vierecke mit den Merkmalen des Falles 2.2. gibt; für andere  $r_2$  kann es nach Hilfssatz 3 kein Viereck mit den Merkmalen des Falles 2.2. geben. Obwohl bei jedem asymmetrischen Viereck der beschriebenen Art jeder Seitenmittelpunkt Stützpunkt der betreffenden Seite bezüglich  $H$  ist, kommt wegen Hilfssatz 4 kein Viereck vom Fall 2.2. für die Lösung unserer gestellten Aufgabe in Betracht; denn jedes solche Viereck kann in ein flächenskleineres Viereck verwandelt werden, welches ebenfalls  $K_1$  und  $K_2$  enthält.

In der durchgeführten Fallunterscheidung kann es unter 2. keine weiteren Fälle geben.

3. Zwei Vierecksseiten besitzen jeweils genau einen Stützpunkt, und zwei Vierecksseiten besitzen jeweils unendlich viele Stützpunkte bezüglich  $H$ , d. h., bei zwei Seiten ist jeweils der Seitenmittelpunkt einziger Stützpunkt, und jede der beiden anderen Seiten liegt auf einer gemeinsamen Tangente an  $K_1$  und  $K_2$ , wobei der Mittelpunkt jeder dieser Seiten nicht außerhalb der jeweiligen durch die Berührungspunkte bestimmten Strecke liegt.

3.1. Vier Stützpunkte liegen auf  $K_1$ , zwei Stützpunkte liegen auf  $K_2$ . Jedes derartige Viereck ist zwangsläufig ein Deltoid (vgl. Abb. 2, 3, 4, 11). Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn

$$q' \cdot r_1 \leq r_2 \leq q_2 \cdot r_1, \quad q' \approx 0,172, \quad q_2 \approx 0,592;$$

ist  $r_2 = q' \cdot r_1$ , so ist das Deltoid ein Quadrat. Wenn  $r_2$  von  $q' \cdot r_1$  bis  $q_2 \cdot r_1$  wächst, so wandert offensichtlich der Mittelpunkt jeder Seite, welche auf einer gemeinsamen Tangente an  $K_1$  und  $K_2$  liegt, vom Berührungspunkt mit  $K_1$  bis zum Berührungspunkt mit  $K_2$ .

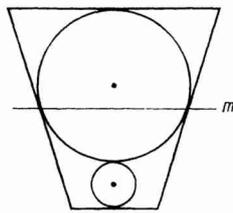
3.2. Drei Stützpunkte liegen auf  $K_1$ , drei Stützpunkte liegen auf  $K_2$ . Jedes derartige Viereck ist zwangsläufig ein gleichschenkliges Trapez (vgl. Abb. 5, 6, 7, 10). Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn

$$q_1 \cdot r_1 \leq r_2 \leq r_1, \quad q_1 \approx 0,414;$$

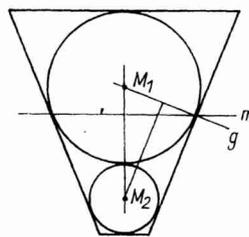
ist  $r_2 = r_1$ , so ist das gleichschenklige Trapez ein Rechteck. Wenn  $r_2$  von  $q_1 \cdot r_1$  bis  $r_1$  wächst, so wandert offensichtlich der Mittelpunkt jeder Seite, welche auf einer gemeinsamen Tangente an  $K_1$  und  $K_2$  liegt, vom Berührungspunkt mit  $K_1$  bis zum Mittelpunkt der Strecke, die durch die beiden Berührungspunkte bestimmt ist.

In der durchgeführten Fallunterscheidung kann es unter 3. keine weiteren Fälle geben.

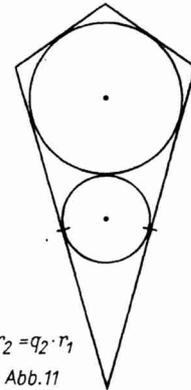
Der Fall, bei dem eine Vierecksseite genau einen Stützpunkt und drei Vierecksseiten jeweils unendlich viele Stützpunkte bezüglich  $H$  besitzen, kommt nach Hilfssatz 1 nicht in Betracht, denn jedes derartige Viereck wäre zu einem Dreieck entartet, und es könnte ein flächenkleineres nichtentartetes Viereck angegeben werden, welches  $K_1$  und  $K_2$  enthält. Damit sind alle Vierecke, die für die Lösung unserer gestellten Aufgabe auf Grund des eingangs zitierten Satzes noch in Betracht kommen, in der durchgeführten Fallunterscheidung enthalten.



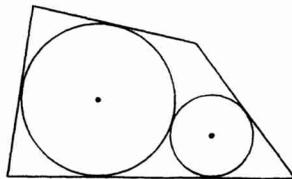
$0 < r_2 < q_1 \cdot r_1$   
Abb. 9



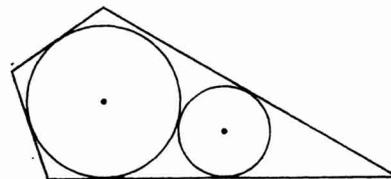
$r_2 = q_1 \cdot r_1$   
Abb. 10



$r_2 = q_2 \cdot r_1$   
Abb. 11



$q_1 \cdot r_1 < r_2 \leq q_3 \cdot r_1$   
Abb. 12a



$q_2 \cdot r_1 < r_2 \leq q_3 \cdot r_1$   
Abb. 12b

Wir fassen nun die gefundenen Ergebnisse zusammen, wobei die Fälle 1.2., 1.3., 2.2. unberücksichtigt bleiben können. Für jedes  $r_2$  aus dem Intervall  $0 < r_2 < q' \cdot r_1$  ( $q' \approx 0,172$ ) ist jedes flächenkleinste Viereck, welches  $K_1$  und  $K_2$  enthält ein Quadrat mit  $K_1$  als Inkreis; zu jedem  $r_2$  aus dem genannten Intervall gibt es unendlich viele derartige Quadrate. Für jedes  $r_2$  aus dem Intervall  $q' \cdot r_1 \leq r_2 < q_1 \cdot r_1$  ( $q_1 \approx 0,414$ ) gibt es genau ein flächenkleinstes Viereck, welches  $K_1$  und  $K_2$  enthält, und dieses Viereck ist ein Deltoid. Für jedes  $r_2$  aus dem Intervall  $q_2 \cdot r_1 < r_2 \leq r_1$  ( $q_2 \approx 0,592$ ) gibt es genau ein flächenkleinstes Viereck, welches  $K_2$  und  $K_2$  enthält, und dieses Viereck ist ein gleichschenkliges Trapez. Somit fehlt

noch eine Entscheidung für das Intervall  $q_1 \cdot q_1 \leq q_2 \leq q_2 \cdot r_1$ , denn für jedes  $r_2$  dieses Intervalls stehen noch genau ein Deltoid  $D$  und genau ein gleichschenkliges Trapez  $T$  zur Diskussion. Nach Hilfssatz 5 besitzen  $D$  und  $T$  für  $r_2 = q'' \cdot r_1$  ( $q'' \approx 0,549$ ) gleichen Flächeninhalt; für  $q_1 \cdot r_1 \leq r_2 < q'' \cdot r_1$  ist der Flächeninhalt von  $D$  kleiner als der Flächeninhalt von  $T$ ; für  $q'' \cdot r_1 < r_2 \leq q_2 \cdot r_1$  ist der Flächeninhalt von  $D$  größer als der Flächeninhalt von  $T$ . Damit sind alle Aussagen unter (A) bewiesen.

### 3. Beweis zu (B)

Die Dichte  $d(q)$  ist der Quotient aus  $\pi \cdot (r_1^2 + r_2^2)$  und dem Flächeninhalt  $F$  eines oder des flächenkleinsten Vierecks, welches  $K_1$  und  $K_2$  enthält.

Im Intervall  $0 \leq q \leq q'$  ( $q' \approx 0,172$ ) ist der Flächeninhalt  $F$  durch die Formel

$$F = 4r_1^2$$

gegeben; denn jedes flächenkleinste Viereck ist ein Quadrat mit der Seitenlänge  $2r_1$ . Folglich ist

$$d(q) = \frac{\pi}{4} \cdot (1 + q^2).$$

Diese quadratische Funktion wächst im betrachteten Intervall streng monoton. Näherungsweise Berechnungen ergeben

$$d(0) \approx 0,785 \quad \text{und} \quad d(3 - 2\sqrt{2}) \approx 0,808.$$

Im Intervall  $q' \leq q < q''$  ( $q'' \approx 0,549$ ) ist nach den Aussagen unter (A) das flächenkleinste Viereck, welches  $K_1$  und  $K_2$  enthält, ein Deltoid  $D$ ; zwei der Deltoidsseiten berühren jeweils mit ihrem Mittelpunkt den Kreis  $K_1$  und jede der beiden anderen Deltoidsseiten liegt auf einer gemeinsamen Tangente an  $K_1$  und  $K_2$  (vgl. Abb. 2, 3). Dieses Deltoid besitzt nach Hilfssatz 5 den Flächeninhalt

$$F = r_1^2 \cdot \left( \frac{2 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2}}{r_1 - r_2} + 3 \tan \left( \frac{1}{3} \arctan \frac{2 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2}}{r_2 - r_1} \right) \right).$$

Folglich ist

$$d(q) = \pi \cdot \frac{1 + q^2}{\frac{2 \cdot \sqrt{q}}{1 - q} + 3 \tan \left( \frac{1}{3} \arctan \frac{2 \sqrt{q}}{q - 1} \right)}.$$

Eine Untersuchung der Funktion  $d(q)$  hat ergeben (vgl. [4]), daß  $d(q)$  im betrachteten Intervall von der Stelle  $q'$  streng monoton steigt bis zur Stelle  $\bar{q}$  und von der Stelle  $\bar{q}$  bis zur Stelle  $q''$  streng monoton fällt;  $\bar{q}$  ist Lösung der Bestimmungsgleichung

$$\frac{(1 - q)^2 \cdot (1 + q^2)}{\sqrt{q} \cdot (1 + q)} \cdot t^2 + 6q(1 - q)^2 \cdot t - \frac{4\sqrt{q} \cdot (q^3 + q^2 - q + 1)}{1 + q} = 0,$$

$$t = \tan \left( \frac{1}{3} \arctan \frac{2\sqrt{q}}{q - 1} \right).$$

Näherungsweise Berechnungen ergeben

$$\bar{q} \approx 0,289 \quad \text{und} \quad d(\bar{q}) \approx 0,823.$$

Ist  $q = q''$  ( $q'' \approx 0,549$ ), so gibt es nach den Aussagen unter (A) genau zwei flächenkleinste Vierecke, die  $K_1$  und  $K_2$  enthalten. Eines dieser beiden Vierecke ist ein Deltoid  $D$  der oben beschriebenen Art, das andere ist ein gleichschenkliges Trapez  $T$ , in welches  $K_1$  und  $K_2$  so eingelagert sind, daß jeder der beiden Kreise genau drei Trapezseiten berührt (vgl. Abb. 4, 5). Für den Flächeninhalt  $F$  können wir aus Hilfssatz 5 die Formel für  $D$ , aber auch die Formel für  $T$  verwenden. Wir wählen die letztgenannte Formel, die auch für jedes  $q$  aus dem Intervall  $q'' < q \leq 1$  den Flächeninhalt des flächenkleinsten Vierecks angibt, welches  $K_1$  und  $K_2$  enthält; denn jedes solche Viereck ist nach den Aussagen unter (A) ein gleichschenkliges Trapez der beschriebenen Art.

Im Intervall  $q'' \leq q \leq 1$  ist also der Flächeninhalt  $F$  durch die Formel

$$F = 2 \cdot \frac{(r_1 + r_2) \cdot (r_1^2 + r_2^2)}{\sqrt{r_1 \cdot r_2}}$$

gegeben. Folglich ist

$$d(q) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{q}}{1 + q}.$$

Die Funktion  $d(q)$  wächst im betrachteten Intervall streng monoton; denn die Ableitung dieser Funktion ist

$$d'(q) = \frac{\pi}{4} \frac{1 - q}{\sqrt{q}(1 + q)^2}.$$

Näherungsweise Berechnungen ergeben

$$d(q'') \approx 0,751, \quad d(1) = \frac{\pi}{4} \approx 0,785.$$

Betrachten wir nun die Dichtefunktion  $d(q)$  im ganzen Intervall  $0 \leq q \leq 1$ , so können wir feststellen, daß  $d(q)$  von der Stelle  $q = 0$  bis zur Stelle  $q = \bar{q} \approx 0,289$  streng monoton wächst, von der Stelle  $q = \bar{q}$  bis zur Stelle  $q = q'' \approx 0,549$  streng monoton fällt und von der Stelle  $q = q''$  bis zur Stelle  $q = 1$  wieder streng monoton wächst. An der Stelle  $q = \bar{q}$  erreicht  $d(q)$  mit  $d(\bar{q}) \approx 0,823$  den größten Wert, und an der Stelle  $q = q''$  erreicht  $d(q)$  mit  $d(q'') \approx 0,751$  den kleinsten Wert. Damit sind die Aussagen unter (B) bewiesen.

#### 4. Hilfssätze

**Hilfssatz 1.** *Jedes flächenkleinste Viereck, welches  $K_1$  und  $K_2$  enthält, ist ein konvexes Viereck, von dem keine zwei benachbarten Seiten auf einer Geraden liegen.*

**Beweis.** Angenommen, es gäbe ein flächenkleinstes Viereck  $V$ , welches  $K_1$  und  $K_2$  enthält und welches nicht konvex wäre. Dann gäbe es genau eine Ecke von  $V$  mit einem überstumpfen Innenwinkel; diese Ecke sei mit  $A$  bezeichnet.  $A$  müßte innerhalb der konvexen Hülle  $H$  von  $K_1$  und  $K_2$  liegen, jede Seite von  $V$  müßte mit mindestens einem der beiden Kreise einen gemeinsamen Punkt besitzen, und  $A$  würde auf keinem der beiden Kreise liegen (vgl. Abb. 13); in jedem anderen Fall könnte unmittelbar ein flächenkleineres Viereck angegeben werden, welches ebenfalls  $K_1$  und  $K_2$  enthält. Es gäbe nun mindestens eine Seite von  $V$ , die nicht auf

einer gemeinsamen Tangente an  $K_1$  und  $K_2$  läge und deren Mittelpunkt vom Berührungspunkt verschieden wäre; die Trägergerade dieser Seite möge mit  $g$ , der Berührungspunkt mit  $B$  und der Mittelpunkt mit  $M$  bezeichnet sein. Dann könnte aber durch eine geeignete *Rollrotation* von  $g$  (unter einer Rollrotation einer Tangente  $t$  an einen Kreis  $K$  wollen wir den stetigen Übergang zu einer Tangente  $t'$  an  $K$  verstehen) wiederum ein flächenkleineres Viereck gefunden werden, welches ebenfalls  $K_1$  und  $K_2$  enthält; eine geeignete Rollrotation von  $g$  wäre der Übergang

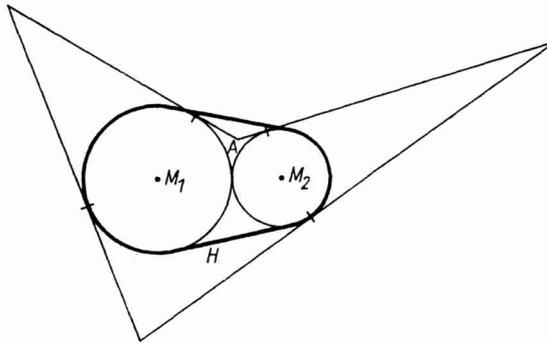


Abb. 13

zu einer Geraden  $g'$ , welche  $g$  in einem Punkt  $S$  zwischen  $B$  und  $M$  schneidet und welche die Eigenschaft hat, daß ihr Berührungspunkt  $B'$  und der Mittelpunkt  $M'$  der auf  $g'$  liegenden veränderten Vierecksseite sich nicht auf verschiedenen Seiten von  $g$  befinden. Damit ist ein Widerspruch zur obigen Annahme herbeigeführt, denn nach dem Satz über die Existenz des Maximums und des Minimums jeder stetigen Funktion in jedem abgeschlossenen Definitionsbereich gibt es sicher ein flächenkleinstes Viereck  $V$ , welches  $K_1$  und  $K_2$  enthält. Das Viereck  $V$  muß also konvex sein.

Angenommen, das Viereck  $V$  hätte nun die Eigenschaft, daß zwei benachbarte Seiten auf einer Geraden  $g$  liegen. Dann könnten wir aus  $V$  ein flächenkleineres Viereck bilden, welches ebenfalls  $K_1$  und  $K_2$  enthält, indem wir die beiden auf  $g$  liegenden Seiten als eine Seite ansehen und eine geeignete neue Seite einfügen. Es führt also auch die zweite Annahme zu einem Widerspruch. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

**Hilfssatz 2.** *Jedes (konvexe) Deltoid, in welches  $K_1$  und  $K_2$  derart eingelagert sind, daß jeder der beiden Kreise genau zwei Deltoidsseiten berührt, und zwar jeweils im Mittelpunkt, kann in ein flächenkleineres Viereck verwandelt werden, welches ebenfalls  $K_1$  und  $K_2$  enthält.*

**Beweis.** Gegeben sei ein Deltoid, in welches  $K_1$  und  $K_2$  derart eingelagert sind, daß jeder der beiden Kreise genau zwei Deltoidsseiten in ihren Mittelpunkten berührt; für jedes  $r_2$  des Intervalls  $q_2 \cdot r_1 < r_2 \leq r_1$  ( $q_2 \approx 0,592$ ) existiert genau ein solches Deltoid (vgl. Abb. 14). Denjenigen Eckpunkt, der auf dem Strahl von  $M_1$  in Richtung  $M_2$  liegt, wollen wir mit  $A$  und die weiteren Eckpunkte wollen wir der Reihe nach im positiven Umlaufsinn (d. h., beim Durchlaufen des Randes in dieser Richtung liegt das Innere zur Rechten) mit  $B, C, D$  bezeichnen. Die Punkte  $A, B, D$  liegen auf einem Kreis  $K$  um  $M_2$ . Dasjenige von  $K$  und von der Geraden durch  $B$  und  $D$  begrenzte Flächenstück, welches ganz im Inneren des Deltoids liegt, be-

zeichnen wir mit  $g_{BD}K_{BD}$ . Somit können wir uns das Deltoid  $ABCD$  in der folgenden Weise zusammengesetzt denken (vgl. Abb. 15):

$$ABCD = (\triangle ABD + g_{BD}K_{BD}) + (\triangle BCD - g_{BD}K_{BD}).$$

Für die erste Klammer verwenden wir das Symbol  $AK_{BD}$  und für die zweite Klammer das Symbol  $CK_{BD}$ . Drehen wir das Flächenstück  $AK_{BD}$  um  $M_2$  in ein kongruentes Flächenstück  $A'K_{B'D'}$  und lassen wir dabei  $CK_{BD}$  mit  $K_1$  fest, so gilt für den Flächeninhalt des Deltoids  $ABCD$

$$|ABCD| = |AK_{BD}| + |CK_{BD}| = |A'K_{B'D'}| + |CK_{BD}|. \quad (*)$$

Für jedes  $r_2$  des Intervalls  $q_2 \cdot r_1 < r_2 < r_1$  schneidet der Strahl von  $C$  in Richtung  $B$  und auch der Strahl von  $C$  in Richtung  $D$  den Kreis  $K$  jeweils in zwei Punkten; im Falle  $r_2 = r_1$  berührt jeder der beiden Strahlen den Kreis  $K$ .

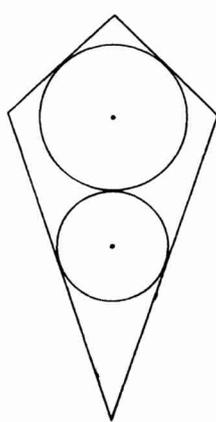


Abb. 14

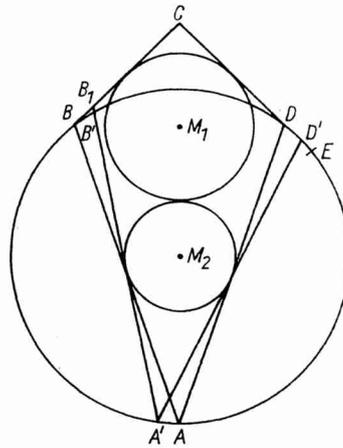


Abb. 15

Es sei nun  $q_2 \cdot r_1 < r_2 < r_1$ . Der erste Schnittpunkt des Strahls von  $C$  in Richtung  $D$  mit dem Kreis  $K$  ist  $D$ ; der zweite Schnittpunkt sei mit  $E$  bezeichnet. Wir überführen das Flächenstück  $AK_{BD}$  durch eine Drehung um  $M_2$  in ein kongruentes Flächenstück  $A'K_{B'D'}$ , und dabei soll  $D'$  ( $D' \neq D$  und  $D' \neq E$ ) auf demjenigen von  $D$  und  $E$  bestimmten Kreisbogen von  $K$  liegen, auf dem  $A$  nicht liegt; außerdem wollen wir die Größe der Drehung so wählen, daß  $B$  und  $B'$  bezüglich keiner gemeinsamen Tangente an  $K_1$  und  $K_2$  auf verschiedenen Seiten dieser Tangente liegen. Der Schnittpunkt  $D_1$  der Geraden durch  $A'$  und  $D'$  mit der Geraden durch  $C$  und  $D$  liegt innerhalb von  $K$ , und der Schnittpunkt  $B_1$  der Geraden durch  $A'$  und  $B'$  mit der Geraden durch  $C$  und  $B$  liegt außerhalb von  $K$ . Wir betrachten nun das Viereck  $A'B_1CD_1$ , welches ebenfalls  $K_1$  und  $K_2$  enthält. Dieses Viereck hat einen kleineren Flächeninhalt als das Viereck  $ABCD$ ; denn es ist wegen (\*) der Flächeninhalt

$$|A'B_1CD_1| = |ABCD| - |F_1| - |F_2|;$$

$F_1$  ist das konvexe Flächenstück, welches vom Kreisbogen  $K_{DD'}$  und von den Strecken  $D_1D$  und  $D_1D'$  begrenzt wird;  $F_2$  ist das außerhalb  $K$  liegende Flächenstück, welches vom Kreisbogen  $K_{BB'}$  und von den Strecken  $B_1B$  und  $B_1B'$  begrenzt wird.

Es sei  $r_2 = r_1$ . In diesem Falle würde eine Überlegung, die sich von den Überlegungen für  $r_2$  des Intervalls  $q_2 \cdot r_1 < r_2 < r_1$  nicht wesentlich unterscheidet, ebenfalls zum Ziele führen. Wir haben im Falle  $r_2 = r_1$  allerdings auch die Möglichkeit, den Flächeninhalt von  $ABCD$  unmittelbar zu berechnen und als kleiner im Vergleich zum Flächeninhalt des Rechtecks  $R$  zu erkennen, welches  $K_1$  und  $K_2$  enthält und welches die Seitenmaßzahlen  $4r_1$  und  $2r_1$  besitzt. Das Deltoid  $ABCD$  ist im Falle  $r_2 = r_1$  in zwei gleichseitige Dreiecke zerlegbar, und jedes solche Dreieck besitzt einen Kreis von Radius  $r_1$  als Inkreis. Es ist also

$$|ABCD| = 6 \sqrt{3} \cdot r_1^2,$$

$$|R| = 8 \cdot r_1^2.$$

Also gibt es zum Deltoid  $ABCD$  ein flächenkleineres Viereck, welches ebenfalls  $K_1$  und  $K_2$  enthält.

**Hilfssatz 3.** *Für jedes  $r_2$  aus dem Intervall  $q_1 \cdot r_1 < r_2 \leq q_3 \cdot r_1$  ( $q_1 \approx 0,414$ ,  $q_3 \approx 0,62$ ) und nur für diese aus der Menge aller möglichen  $r_2$ -Werte gibt es mindestens ein asymmetrisches Viereck derart, daß genau eine Vierecksseite auf einer gemeinsamen Tangente an  $K_1$  und  $K_2$  liegt, während eine der verbleibenden drei Seiten mit ihrem Mittelpunkt den Kreis  $K_2$  und jede der restlichen zwei Seiten mit ihrem Mittelpunkt den Kreis  $K_1$  berührt. Für jedes  $r_2$  aus  $q_1 \cdot r_1 < r_2 \leq q_2 \cdot r_1$  ( $q_2 \approx 0,592$ ) und für  $r_2 = q_3 \cdot r_1$  gibt es genau ein derartiges Viereck, und für jedes  $r_2$  aus  $q_2 \cdot r_1 < r_2 < q_3 \cdot r_1$  gibt es genau zwei derartige Vierecke, wenn man jeweils von einem spiegelbildlich zur Geraden durch  $M_1$  und  $M_2$  gelegenen Viereck absieht.*

**Beweis.** Die Gerade  $g_1$  sei eine gemeinsame äußere Tangente an zwei sich von außen berührende Kreise  $K_1$  und  $K_2$ ; die andere gemeinsame äußere Tangente möge mit  $g_2$  bezeichnet werden; es sei  $0 < r_2 \leq r_1$ . Der Berührungspunkt von  $g_1$  mit  $K_1$  sei mit  $B_{11}$  und der Berührungspunkt von  $g_1$  mit  $K_2$  mit  $B_{12}$  bezeichnet. Die Richtung von  $B_{12}$  nach  $B_{11}$  auf  $g_1$  wollen wir als positiv bezeichnen.

Wir betrachten nun die Menge aller Streckenzüge  $S_1 S'_1 S''_1$ , deren Anfangspunkt  $S_1$  auf derjenigen durch  $B_{11}$  bestimmten Halbgeraden von  $g_1$  liegt, auf der  $B_{12}$  nicht liegt, die aus zwei gleichlangen Strecken  $S_1 S'_1$  und  $S'_1 S''_1$  zusammengesetzt sind, welche jeweils mit dem Mittelpunkt  $K_1$  berühren, wobei die Strecke  $S_1 S'_1$  nicht selbst schon auf  $g_1$  liegen soll (vgl. Abb. 16). Der geometrische Ort aller Punkte  $S''_1$  ist eine Kurve, die wir mit  $s''_1$  bezeichnen wollen;  $B_{11}$  ist ein Grenzpunkt dieser Kurve, ohne selbst zur Kurve zu gehören. Wandert der Punkt  $S_1$  von  $B_{11}$  aus auf  $g_1$  in positiver Richtung, so wandert  $S'_1$  von  $B_{11}$  aus auf  $s''_1$ ; diese Durchlaufrichtung von  $s''_1$  wollen wir ebenfalls als positiv bezeichnen. Wir wollen nun ein Polarkoordinatensystem einführen, mit  $M_1$  als Koordinatenursprung, mit dem Strahl von  $M_1$  in Richtung  $B_{11}$  als 0-Strahl und mit dem durch die positive Durchlaufrichtung von  $g_1$  induzierten Umlaufsinne von  $K_1$  als positiven Drehsinn der Ebene. In dem so eingeführten Polarkoordinatensystem läßt sich  $s''_1$  mit den Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$  darstellen in der Form

$$r = r_1 \cdot \frac{1}{\cos \frac{1}{5} \varphi}, \quad 0 < \varphi < 5 \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Die Koordinate  $r$  der Kurve  $s''_1$  wächst also mit wachsendem  $\varphi$  von  $r_1$  gegen unendlich. Für unsere Betrachtungen genügt das Intervall  $0 < \varphi \leq 5 \cdot \pi/6$ ; im Falle  $\varphi = 5 \cdot \frac{\pi}{6}$  bilden die Punkte  $S_1, S'_1, S''_1$  ein gleichseitiges Dreieck.

Nun betrachten wir eine Schar von Kurven  $s_2'(r_2)$  im Zusammenhang mit der Schar von Kreisen  $K_2(r_2)$  für  $0 < r_2 \leq r_1$ . Zu jedem Kreis  $K_2(r_2)$  denken wir uns die Menge aller Strecken  $S_2S_2'$ , deren Anfangspunkt  $S_2$  auf derjenigen durch  $B_{12}$  bestimmten Halbgeraden von  $g_1$  liegt, auf der sich  $B_{11}$  nicht befindet, und welche mit ihrem Mittelpunkt den Kreis  $K_2$  berühren, aber nicht selbst auf  $g_1$  liegen (vgl. Abb. 17). Der geometrische Ort aller Punkte  $S_2'$  ist eine Kurve, die wir mit  $s_2'(r_2)$  bezeichnen wollen;  $B_{12}$  ist ein Grenzpunkt dieser Kurve, ohne selbst zur Kurve zu gehören. Wandert der Punkt  $S_2$  von  $B_{12}$  aus auf  $g_1$  in negativer Richtung, so wandert  $S_2'$  von  $B_{12}$  aus auf  $s_2'(r_2)$  und nähert sich asymptotisch einer Parallelen zu  $g_1$  im Abstand  $4r_2$ . Wenn wir nun ein weiteres Polarkoordinatensystem einführen, mit

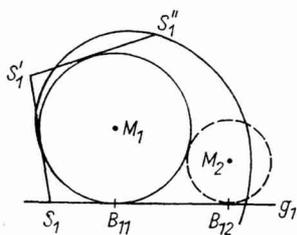


Abb. 16

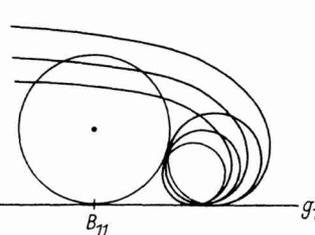


Abb. 17

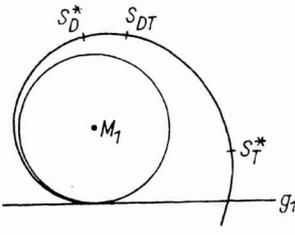


Abb. 18

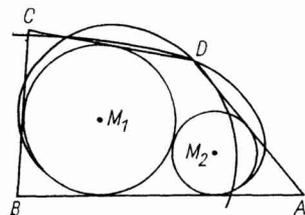


Abb. 19

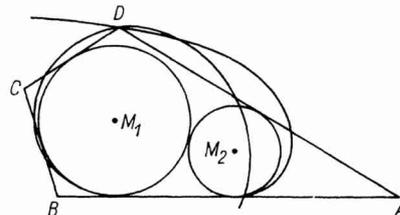


Abb. 20

$M_2$  als Koordinatenursprung, mit dem Strahl von  $M_2$  in Richtung  $B_{12}$  als 0-Strahl und mit dem durch die negative Durchlaufrichtung von  $g_1$  induzierten Umlaufssinn von  $K_2$  als positiven Drehsinn der Ebene, so gestattet  $s_2'(r_2)$  in Polarkoordinaten  $\varrho, \psi$  die Darstellung

$$\varrho = r_2 \cdot \frac{1}{\cos \frac{1}{3}\psi}, \quad 0 < \psi < 3 \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Die Koordinate  $\varrho$  der Kurve  $s_2'(r_2)$  wächst also mit wachsendem  $\psi$  von  $r_2$  gegen unendlich.

Jede Kurve  $s_2'(r_2)$ ,  $0 < r_2 \leq r_1$ , besitzt offenbar mit der Kurve  $s_1''$  höchstens drei gemeinsame Punkte. Jeder solche Punkt  $S$  ist also ein Punkt  $S_1''$  und zugleich ein Punkt  $S_2'$ , und er bildet, falls er außerhalb des Durchschnitts  $\vartheta$  der beiden benachbarten Halbebenen  $g_1M_1$  und  $g_2M_1$  liegt (mit  $gP$  wird diejenige durch  $g$  bestimmte Halbebene bezeichnet, in der  $P$  liegt), mit den zugehörigen Punkten  $S_1, S_1'$  und  $S_2$  ein asymmetrisches Viereck, welches  $K_1$  und  $K_2$  im Innern enthält; die Seite  $S_2S_1$  liegt auf der gemeinsamen Tangente  $g_1$ , die Seiten  $S_1S_1'$  und  $S_1'S$  sind gleichlang, und jede dieser beiden Seiten berührt mit ihrem Mittelpunkt den Kreis  $K_1$ , die Seite  $SS_2$  berührt mit ihrem Mittelpunkt den Kreis  $K_2$ .

Für jedes  $r_2$  des Intervalls  $0 < r_2 < q_1 \cdot r_1$  besitzt die Kurve  $s'_2(r_2)$  genau einen Schnittpunkt mit der Kurve  $s'_1$ ; dieser Punkt liegt im Inneren von  $\vartheta$  und kann somit unbeachtet bleiben. Für  $r_2 = q_1 \cdot r_1$  besitzen  $s'_2(r_2)$  und  $s'_1$  einen Schnittpunkt im Innern von  $\vartheta$  und einen Berührungspunkt  $S_T^*$  auf dem Rand von  $\vartheta$ ; der Punkt  $S_T^*$  ist also ein Punkt  $S'_1$  und zugleich ein Punkt  $S'_2$ , und er bildet mit den zugehörigen Punkten  $S_1$ ,  $S'_1$  und  $S_2$  ein gleichschenkliges Trapez, von dem jeder der beiden Schenkel mit dem Mittelpunkt den Kreis  $K_1$  berührt und jeder der beiden Schenkel auf einer gemeinsamen Tangente an  $K_1$  und  $K_2$  liegt (vgl. Abb. 10). Für jedes  $r_2$  des Intervalls  $q_1 \cdot r_1 < r_2 < q_2 \cdot r_1$  besitzen  $s'_2(r_2)$  und  $s'_1$  zwei Schnittpunkte im Inneren von  $\vartheta$  und einen Schnittpunkt  $S_T$  außerhalb  $\vartheta$ ; der Punkt  $S_T$  bildet mit den zugehörigen Punkten  $S_1$ ,  $S'_1$ ,  $S_2$  ein asymmetrisches Viereck der oben beschriebenen Art. Für  $r_2 = q_2 \cdot r_1$  besitzen  $s'_2(r_2)$  und  $s'_1$  genau einen Schnittpunkt  $S_T$  außerhalb  $\vartheta$  und genau einen Schnittpunkt  $S_D^*$  auf dem Rand von  $\vartheta$ ; der Punkt  $S_T$  bildet mit den zugehörigen Punkten  $S_1$ ,  $S'_1$  und  $S_2$  ein asymmetrisches Viereck der oben beschriebenen Art, und der Punkt  $S_D^*$  bildet mit den zugehörigen Punkten  $S_1$ ,  $S'_1$  und  $S_2$  ein Deltoid, von dem jede Seite des einen Paares gleichlanger Seiten mit dem Mittelpunkt  $K_2$  berührt und jede dieser beiden Seiten auf einer gemeinsamen Tangente an  $K_1$  und  $K_2$  liegt (vgl. Abb. 11). Offensichtlich gibt es einen kleinsten Wert  $q_3$  derart, daß für  $r_2 > q_3 \cdot r_1$  die Kurven  $s'_2(r_2)$  und  $s'_1$  außerhalb  $\vartheta$  keinen gemeinsamen Punkt besitzen (näherungsweise Berechnungen haben für  $q_3$  den Wert 0,62 ergeben). Für jedes  $r_2$  des Intervalls  $q_2 \cdot r_1 < r_2 < q_3 \cdot r_1$  besitzen  $s'_2(r_2)$  und  $s'_1$  außerhalb  $\vartheta$  genau zwei Schnittpunkte; derjenige dieser beiden Punkte, der von  $g_1$  den größeren Abstand hat, möge mit  $S_D$  und der andere mit  $S_T$  bezeichnet werden; jeder dieser beiden Punkte bildet mit den zugehörigen Punkten  $S_1$ ,  $S'_1$  und  $S_2$  ein asymmetrisches Viereck der oben beschriebenen Art. Für  $r_2 = q_3 \cdot r_1$  besitzen  $s'_2(r_2)$  und  $s'_1$  außerhalb  $\vartheta$  genau einen gemeinsamen Punkt, welcher Berührungspunkt beider Kurven ist, und welcher mit  $S_{DT}$  bezeichnet werden soll, weil er als Grenzpunkt der Punkte  $S_D$  und als Grenzpunkt der Punkte  $S_T$  angesehen werden kann;  $S_{DT}$  bildet mit den zugehörigen Punkten  $S_1$ ,  $S'_1$  und  $S_2$  ebenfalls ein asymmetrisches Viereck der oben beschriebenen Art.

*Hilfssatz 4. Jedes asymmetrische Viereck der in Hilfssatz 3 beschriebenen Art kann in ein flächenkleineres Viereck verwandelt werden, welches ebenfalls  $K_1$  und  $K_2$  enthält.*

*Beweis.* Wir betrachten die Kurve  $s'_1$  aus dem Beweis des Hilfssatzes 3 (vgl. Abb. 18). Zu jedem Punkt  $D$  zwischen  $S_D^*$  und  $S_T^*$  auf dieser Kurve existiert genau ein asymmetrisches Viereck  $ABCD$ , welches  $K_1$  und  $K_2$  im Innern enthält, dessen Seite  $AB$  auf  $g_1$  liegt, dessen Seiten  $BC$  und  $CD$  gleichlang sind und jeweils mit dem Mittelpunkt  $K_1$  berühren und dessen Seite  $DA$  mit dem Mittelpunkt  $K_2$  berührt. Ist  $D$  gleich einem Punkt  $S_T$ , also ein Punkt zwischen  $S_{DT}$  und  $S_T^*$ , oder gleich  $S_{DT}$ , so wollen wir das zugehörige Viereck  $ABCD$  ein *trapeznahes* asymmetrisches Viereck nennen und mit  $A_T(r_2)$  bezeichnen; ist  $D$  gleich einem Punkt  $S_D$ , also ein Punkt zwischen  $S_D^*$  und  $S_{DT}$ , so wollen wir das Viereck  $ABCD$  ein *deltoidnahes* asymmetrisches Viereck nennen und mit  $A_D(r_2)$  bezeichnen.

Gegeben sei ein beliebiges trapeznahes asymmetrisches Viereck  $A_T(r_2)$ . Der Punkt  $D$  ist Schnittpunkt der Kurve  $s'_1$  mit einer Kurve  $s'_2(r_2)$  für ein festes  $r_2$  aus dem Intervall  $q_1 \cdot r_1 < r_2 \leq q_3 \cdot r_1$  ( $q_1 \approx 0,414$ ,  $q_3 \approx 0,62$ ) (vgl. Abb. 19). Wir denken uns nun das Viereck  $A_T(r_2)$  einer Deformation  $d(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , unterzogen, indem der Punkt  $D$  sich stetig auf  $s'_2(r_2)$  in Richtung Kurvenanfang bis zum Schnittpunkt von  $s'_2(r_2)$  mit der gemeinsamen Tangente  $g_2$  an  $K_1$  und  $K_2$  bewegt; dabei wird gefordert, daß die Trägergerade der ersten Seite unverändert bleibt, daß die zweite Seite mit

ihrem Mittelpunkt den Kreis  $K_1$  berührt, daß die vierte Seite mit ihrem Mittelpunkt den Kreis  $K_2$  berührt und daß die dritte Seite den Kreis  $K_1$  berührt; der Berührungspunkt der dritten Seite liegt vor dem Mittelpunkt dieser Seite (im Sinne der positiven Umlaufsrichtung des Vierecks). Das aus  $A_T(r_2)$  durch die Deformation  $d(t)$  mit einem festen  $t$  aus dem Intervall  $0 \leq t \leq 1$  entstandene Viereck wollen wir mit  $V(t)$  bezeichnen. Offensichtlich ist  $V(0) = A_T(r_2)$ , und  $V(1)$  ist ein gleichschenkliges Trapez  $T(r_2)$ .

Wir zeigen nun, daß zu jedem  $t_1$  aus  $0 < t < 1$  ein größeres  $t_2$  gefunden werden kann, so daß der Flächeninhalt  $|V(t_2)|$  kleiner ist als der Flächeninhalt  $|V(t_1)|$ . Wir wählen ein beliebiges festes  $t_1$  aus  $0 < t < 1$  und betrachten  $V(t_1)$ . Durch eine hinreichend kleine positive Rolldrehung der Trägergeraden der dritten Seite und anschließende positive Rolldrehungen der Trägergeraden der zweiten Seite und der Trägergeraden der vierten Seite gelangt man zu einem offensichtlich flächenkleineren Viereck  $V(t_2)$  mit  $t_2 > t_1$ ; die Rolldrehungen der Trägergeraden der zweiten Seite und der Trägergeraden der vierten Seite sind jeweils soweit zu führen, bis der Mittelpunkt wieder mit dem Berührungspunkt zusammenfällt. Mit dem Prozeß der flächenverkleinernden Rolldrehungen kann man von  $V(t_1)$  zu jedem  $V(t_2)$  mit  $t_1 < t_2 < t_1 + \varepsilon$  bei hinreichend kleinem  $\varepsilon$  gelangen. Daraus folgt, daß der Flächeninhalt  $|T(r_2)|$  des gleichschenkligen Trapezes  $T(r_2)$  stets kleiner ist als der Flächeninhalt  $|A_T(r_2)|$  des trapeznahen asymmetrischen Vierecks  $A_T(r_2)$ , weil sich andernfalls unmittelbar ein Widerspruch ergibt.

Gegeben sei nun ein beliebiges deltooidnahes asymmetrisches Viereck  $A_D(r_2)$ . Der Punkt  $D$  ist Schnittpunkt der Kurve  $s'_1$  mit einer Kurve  $s'_2(r_2)$  für ein festes  $r_2$  aus dem Intervall  $q_2 \cdot r_1 < r_2 < q_3 \cdot r_1$  ( $q_2 \approx 0,592$ ,  $q_3 \approx 0,62$ ) (vgl. Abb. 20). Für jedes  $r_2$  dieses Intervalls gibt es neben  $A_D(r_2)$  noch ein trapeznahes asymmetrisches Viereck  $A_T(r_2)$ . Die Überlegungen, die bei  $A_T(r_2)$  zu einem flächenkleineren Viereck geführt haben, können nicht auf  $A_D(r_2)$  übertragen werden; würde man nämlich eine entsprechende Deformation  $d(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , einführen, so könnte gezeigt werden, daß bei stetiger Bewegung des Punktes  $D$  auf der Kurve  $s'_2(r_2)$  in Richtung Kurvenanfang der Flächeninhalt  $|V(t)|$  zunächst bis zum Wert  $|A_T(r_2)|$  anwächst und anschließend bis zum Wert  $|T(r_2)|$  abfällt. Wir können aber zeigen, daß im Falle  $r_2 = q_2 \cdot r_1$  das Deltoid, welches als Grenzfall der deltooidnahen asymmetrischen Vierecke  $A_D(r_2)$  im Intervall  $q_2 \cdot r_1 < r_2 < q_3 \cdot r_1$  angesehen werden kann, einen größeren Flächeninhalt als das Trapez  $T(r_2)$  besitzt; die Berechnung kann unmittelbar mit den in Hilfssatz 5 angegebenen Formeln erfolgen. Wenn nun  $r_2$  gegen  $q_3 \cdot r_1$  wächst, so wachsen auch  $|A_D(r_2)|$ ,  $|A_T(r_2)|$  und  $|T(r_2)|$ . Obwohl für jedes feste  $r_2$  aus  $q_2 \cdot r_1 < r_2 < q_3 \cdot r_1$  die Beziehung  $|A_D(r_2)| < |A_T(r_2)|$  gilt, vermindert sich mit wachsendem  $r_2$  der Unterschied beider Werte, und im Falle  $r_2 = q_3 \cdot r_1$  besitzen  $|A_D(r_2)|$  und  $|A_T(r_2)|$  denselben Wert, nämlich  $|V_{DT}|$ . Nach den Ergebnissen über die trapeznahen asymmetrischen Vierecke ist  $|A_T(r_2)| > |T(r_2)|$  für jedes  $r_2$  aus  $q_2 \cdot r_1 \leq r_2 \leq q_3 \cdot r_1$ . Eine ausführlichere Untersuchung der Funktion  $A_D(r_2)$  zeigt (vgl. [4]), daß nicht nur am Rande des Intervalls  $q_2 \cdot r_1 \leq r_2 \leq q_3 \cdot r_1$ , sondern auch für jedes  $r_2$  im Inneren die Beziehung  $|A_D(r_2)| > |T(r_2)|$  gilt.

**Hilfssatz 5.** *Bezeichnet man mit  $D$  dasjenige Deltoid, in welches  $K_1$  und  $K_2$  derart eingelagert sind, daß  $K_2$  genau zwei Deltoidsseiten und  $K_1$  alle vier Deltoidsseiten berührt, und zwar diejenigen beiden der vier Seiten, welche nicht von  $K_2$  berührt werden, jeweils im Mittelpunkt, so gilt für den Flächeninhalt von  $D$*

$$|D| = r_1^2 \cdot \left( \frac{2\sqrt{r_1 \cdot r_2}}{r_1 - r_2} + 3 \cdot \tan \left( \frac{1}{3} \arctan \frac{2\sqrt{r_1 \cdot r_2}}{r_2 - r_1} \right) \right), \quad r_2 < r_1.$$

Bezeichnet man mit  $T$  dasjenige gleichschenklige Trapez, in welches  $K_1$  und  $K_2$  derart eingelagert sind, daß jeder der beiden Kreise genau drei Trapezseiten berührt, so gilt für den Flächeninhalt von  $T$

$$|T| = 2 \frac{(r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2)}{\sqrt{r_1 \cdot r_2}}.$$

Für  $r_2 = q'' \cdot r_1$  ( $q'' \approx 0,549$ ) ist  $|D| = |T|$ ; für  $0 < r_2 < q'' \cdot r_1$  ist  $|D| < |T|$ ; für  $q'' \cdot r_1 < r_2 < r_1$  ist  $|D| > |T|$ .

Beweis. Wir betrachten ein Deltoid  $D$  der im Hilfssatz 5 genannten Art (vgl. Abb. 21);  $r_2$  sei ein beliebiger Wert des Intervalls  $0 < r_2 < r_1$ . Wir bezeichnen mit  $A$  den Schnittpunkt der gemeinsamen äußeren Tangenten an  $K_1$  und  $K_2$  und mit  $C$  denjenigen Eckpunkt des Deltoids, der  $A$  gegenüberliegt; mit  $B$  wird eine der beiden anderen Ecken bezeichnet, und  $H$  sei der Fußpunkt des Lotes von  $M_1$  auf die Gerade durch  $A$  und  $B$ . Offensichtlich besitzt  $D$  den Flächeninhalt

$$|D| = 2 \cdot |\Delta ABC| = 2 (|\Delta AHM_1| + 3 \cdot |\Delta BHM_1|).$$

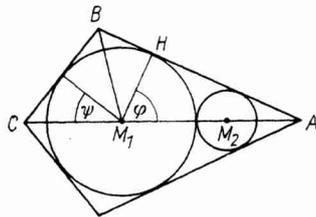


Abb.21

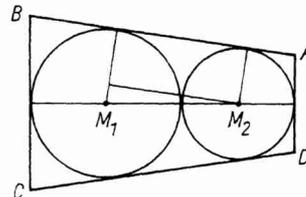


Abb.22

Es sei  $\varphi$  die Maßzahl des Winkels  $\sphericalangle AM_1H$ , und  $3\psi$  sei die Maßzahl des Winkels  $\sphericalangle CM_1H$ . Dann gelten die Beziehungen

$$\tan \varphi = \frac{2\sqrt{r_1 \cdot r_2}}{r_1 - r_2} \quad \text{und} \quad \tan 3\psi = -\tan \varphi,$$

d. h.

$$\psi = \frac{1}{3} \cdot \arctan \frac{2\sqrt{r_1 \cdot r_2}}{r_2 - r_1}.$$

Daraus folgt

$$|\Delta AHM_1| = r_1^2 \frac{\sqrt{r_1 \cdot r_2}}{r_1 - r_2}$$

und

$$|\Delta BHM_1| = \frac{1}{2} \cdot r_1^2 \cdot \tan \left( \frac{1}{3} \arctan \frac{2\sqrt{r_1 \cdot r_2}}{r_2 - r_1} \right)$$

und schließlich der in Hilfssatz 5 genannte Ausdruck für  $|D|$ .

Wir betrachten nun ein Trapez  $T$  der in Hilfssatz 5 genannten Art (vgl. Abb. 22);  $r_2$  sei ein beliebiger Wert des Intervalls  $0 < r_2 < r_1$ . Wir bezeichnen einen der Eckpunkte, die von der Geraden durch  $M_1$  und  $M_2$  den kleineren Abstand besitzen, mit  $A$ . Derjenige Eckpunkt von  $T$ , der mit  $A$  auf derselben Tangente an  $K_1$  und  $K_2$  liegt sei  $B$ ; der  $A$  gegenüberliegende Eckpunkt von  $T$  sei  $C$ , und der  $B$  gegenüberliegende Eckpunkt von  $T$  sei  $D$ .  $E$  sei der Schnittpunkt der Geraden  $g_{AB}$  mit

der Geraden  $g_{CD}$ , und  $x$  sei die Abstandsmaßzahl des Punktes  $E$  von der Geraden  $g_{AD}$ . Dann ist

$$\frac{r_2 + x}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}, \quad \text{d. h.} \quad x = \frac{2r_2^2}{r_1 - r_2}.$$

Ferner gilt

$$\frac{1}{2} |AD| = x \cdot \frac{r_1 - r_2}{2\sqrt{r_1 \cdot r_2}}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{2} |AD| = \frac{r_2^2}{\sqrt{r_1 \cdot r_2}}$$

und

$$\frac{1}{2} |BC| = (2r_1 + 2r_2 + x) \cdot \frac{r_1 - r_2}{2\sqrt{r_1 \cdot r_2}}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{2} |BC| = \frac{r_1^2}{\sqrt{r_1 \cdot r_2}}.$$

Der Flächeninhalt von  $T$  ist

$$|T| = (2r_1 + 2r_2) \cdot \left( \frac{1}{2} |AD| + \frac{1}{2} |BC| \right),$$

und daraus folgt der in Hilfssatz 5 genannte Ausdruck für  $|T|$ .

Eine in [4] durchgeführte Untersuchung der Funktionen  $|D|$  und  $|T|$  ergibt  $|D| = |T|$  für  $r_2 = q'' \cdot r_1$  ( $q'' \approx 0,549$ ),  $|D| < |T|$  für  $0 < r_2 < q'' \cdot r_1$  und  $|D| > |T|$  für  $q'' \cdot r_1 < r_2 < r_1$ .

#### LITERATUR

- [1] FEJES TÓTH, L.: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.
- [2] FEJES TÓTH, L.: Reguläre Figuren. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965.
- [3] KRÖTENHEERDT, O.: Die flächenkleinsten Dreiecke, die zwei gegebene, sich von außen berührende Kreise enthalten. Beiträge zur Algebra und Geometrie 2 (1973), 145–154.
- [4] MAMMITZSCH, C., und P. RICHTER: Untersuchungen zu speziellen Kreislagerungsproblemen. (Unveröffentlicht.)

Manuskripteingang: 1. 11. 1972

#### VERFASSER:

OTTO KRÖTENHEERDT, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität  
Halle-Wittenberg  
CLAUS MAMMITZSCH, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität  
Halle-Wittenberg  
PETER RICHTER, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-  
Wittenberg