Beiträge zur Algebra und Geometrie
3 (1974), 161 – 165

Verallgemeinerung eines Satzes von Kulikov II

Reiner Fritzsche und Gerd Richter

Ein Satz von L. J. Kulikow [4] besagt, daß eine primäre abelsche Gruppe genau dann eine direkte Summe zyklischer Gruppen ist, wenn sie die Vereinigung einer abzählbaren Kette höhenbeschränkter Untergruppen ist. Ein verbandstheoretisches Analogon zu der Aussage, daß die angegebene Bedingung hinreichend ist, wurde in [2] für eine Klasse algebraischer modularer Verbände, die die Klasse der Untergruppenverbände der primären abelschen Gruppen umfaßt, bewiesen, und es wurde die Vermutung ausgesprochen, daß die Umkehrung nur unter zusätzlichen Voraussetzungen bewiesen werden kann. Diese Vermutung erwies sich als unzutreffend. In der vorliegenden Mitteilung, die sich eng an [1] und [2] anschließt, wird auf der Grundlage von Aussagen, die auch für sich von Interesse sind (Satz 1, Hilfssatz 3), ein Beweis für die Umkehrung des in [2] bewiesenen Satzes erbracht. Die dort benutzten Begriffsbildungen und Bezeichnungsweisen müssen hierzu zunächst etwas verallgemeinert werden.

1. Es sei P ein algebraischer modularer Verband, $0 \in P$ sei das Nullelement, $1 \in P$ das Einselement von P; b/a bezeichne denjenigen Unterverband von P, welcher genau aus allen $x \in P$ mit $a \leqq x \leqq b$ besteht, falls $a, b \in P$ mit $a \leqq b$ gilt. Ein Element $z \in b/a$ heiße genau dann ein in b/a *ausgezeichnetes Element*, wenn z in b/a kompakt ist und wenn z/a eine endliche Kette ist. Die Länge dieser Kette heiße die *Ordnung* des Elementes z *bezüglich* a und werde mit $O_a(z)$ bezeichnet. $Z(b/a)$ sei die Menge aller in b/a ausgezeichneten Elemente.
Für $z \in Z(b/a)$ ist z'_a durch $z'_a \leqq z$ und $O_a(z'_a) = O_a(z) - 1$ im Fall $z > a$ bzw. $a'_a \overset{\text{def}}{=} a$ eindeutig definiert. Für jedes beliebige Element $c \in b/a$ werde gesetzt

$$c'_a \overset{\text{def}}{=} \bigcup \, (z'_a \mid z \in Z(b/a),\ z \leqq c)\,,$$

$$c_a^{(n)} \overset{\text{def}}{=} (c_a^{(n-1)})'_a \quad (n \geqq 1)\,,$$

$$c_a^{(0)} \overset{\text{def}}{=} c\,.$$

In Übereinstimmung mit der in [1] und [2] benutzten Bezeichnungsweise werden die folgenden Abkürzungen gebraucht: $Z \overset{\text{def}}{=} Z(P)$, $O(z) \overset{\text{def}}{=} O_0(z)$, $c' \overset{\text{def}}{=} c'_0$; ein in P ausgezeichnetes Element heiße ausgezeichnet (schlechthin).

Es sei noch bemerkt, daß aus $z \in Z$ und $a < z \leqq b$ stets $z \in Z(b/a)$ und $z'_a = z'$ folgt.

2. Ist P ein algebraischer modularer Verband, welcher die Eigenschaft

$$c \in P \Rightarrow c = \bigcup (z_\nu | z_\nu \in Z, \nu \in N, N \text{ geeignete Indexmenge}) \tag{I}$$

besitzt, so gilt in Analogie zu einem Lemma von T. J. HEAD [3] der folgende Hilfssatz.

Hilfssatz 1. $u \in Z(b/a) \Leftrightarrow u = a \cup z$ mit $z \in Z$, $a \cup z \leqq b$.

Beweis. a) $u = a \cup z$ mit $z \in Z$, $a \cup z \leqq b$ ist nach HEAD [3] kompakt in b/a, da z nach Voraussetzung kompakt in P ist. Da P modular ist, gilt $(a \cup z)/a \cong z/(a \cap z)$. Nach Voraussetzung ist $z/0$ eine endliche Kette, also gilt dies auch für $z/(a \cap z)$ und damit für u/a, woraus $u \in Z(b/a)$ folgt.

b) Es sei $u \in Z(b/a)$. Nach Voraussetzung (I) gilt $u = \bigcup (z_\nu | z_\nu \in Z, \nu \in N)$. Wegen $a \leqq u \leqq b$, $a \leqq a \cup z_\nu \leqq b$ und weil u in b/a nach Voraussetzung kompakt ist, folgt

$$u = \bigcup_{\nu \in N} (a \cup z_\nu) = \bigcup_{\nu=1}^{n} (a \cup z_\nu)$$

mit einer natürlichen Zahl n bei geeigneter Indizierung der z_ν. Nach a) gilt $u_\nu \overset{\text{def}}{=} (a \cup z_\nu) \in Z(b/a)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Da u/a nach Voraussetzung eine endliche Kette ist, muß $u = u_{\nu_0} = a \cup z_{\nu_0}$ für einen geeigneten Index ν_0 mit $1 \leqq \nu_0 \leqq n$ gelten.

Aus den beiden Teilen des vorstehenden Beweises ergeben sich unmittelbar noch die folgenden Zusätze.

Zusatz 1. $u = a \cup z \in Z(b/a)$, $z \in Z \Rightarrow O_{a \cap z}(z) = O_a(u) \leqq O(z)$.

Zusatz 2. $c \in b/a \Rightarrow c = \bigcup \left(z_\nu | z_\nu \in Z(b/a), \nu \in N, N \text{ geeignete Indexmenge}\right)$.

Zusatz 2 besagt, daß jeder Unterverband der Form b/a von P die Eigenschaft (I) besitzt, wenn P diese Eigenschaft hat.

Unter Benutzung des Zusatzes 1 läßt sich der folgende Hilfssatz beweisen.

Hilfssatz 2. $u = a \cup z \in Z(b/a)$, $z \in Z \Rightarrow u_a^{(n)} = a \cup z^{(n)} (n \geqq 0)$.

Beweis. Es genügt, $u'_a = a \cup z'$ zu beweisen, was für $z \leqq a$ sicher richtig ist, so daß $z > a \cap z'$ und $a \cap z' = a \cap z$ angenommen werden kann. Dann gilt einerseits

$$\begin{aligned} O_a(a \cup z') &= O_{a \cap z'}(z') = O_{a \cap z'}(z'_{(a \cap z')}) \\ &= O_{a \cap z'}(z) - 1 = O_{a \cap z}(z) - 1 = O_a(u) - 1 . \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus $z' \leqq z$ die Relation $a \leqq a \cup z' \leqq a \cup z = u$.

Der Beweis der Umkehrung des in [2] bewiesenen Satzes beruht im wesentlichen auf dem folgenden Satz.

Satz 1. *P sei ein algebraischer modularer Verband mit der Eigenschaft* (I) (siehe oben), *und es sei*

$$a \cap b = c\,, \tag{A}$$

$$z \in Z \textit{ mit } z \leqq a \cup b\,, \tag{B}$$

$$0 \leqq z^{(n)} \leqq a \;(n \geqq 0) \tag{C}$$

$(a, b, c \in P)$. *Dann existiert ein Element* $y \in Z$ *mit den Eigenschaften*

$$y \leqq a \textit{ und } z^{(n)} \cup c = y^{(n)} \cup c\,.$$

Beweis. Da nach Voraussetzung (B) $b \cup z \leqq a \cup b$ gilt, ergibt sich nach Hilfssatz 1 $b \cup z \in Z\big((a \cup b)/b\big)$, was insbesondere bedeutet, daß $(b \cup z)/b$ eine endliche Kette ist. Da P und damit $(a \cup b)/b$ modular ist, gilt wegen (A) $(a \cup b)/b \cong a/c$, so daß bei dem zugehörigen Isomorphismus der Kette $(b \cup z)/b$ eine Kette in a/c entspricht. Es existiert also ein Element $x \in Z(a/c)$ mit

$$b \cup z = b \cup x\,. \tag{*}$$

Nach Hilfssatz 1 existiert ferner ein Element $y \in Z$ mit $x = c \cup y$ $(\leqq a)$. Zusammen mit (*) liefert dies

$$b \cup z = b \cup c \cup y = b \cup y\,,\quad y \leqq a\,.$$

Nach Hilfssatz 2 ergibt sich hiermit

$$b \cup z^{(n)} = (b \cup z)_b^{(n)} = (b \cup y)_b^{(n)} = b \cup y^{(n)}\,.$$

Bildet man den Durchschnitt der beiden äußeren Seiten dieser Gleichung mit a und berücksichtigt, daß P modular ist, so ergibt sich wegen $y^{(n)} \leqq a$ und $z^{(n)} \leqq a$ (gemäß (C))

$$(a \cap b) \cup z^{(n)} = (a \cap b) \cup y^{(n)}\,,$$

woraus nach (A) und (C) $c \cup z^{(n)} = c \cup y^{(n)}$ folgt.

3. Ist z ein (in P) ausgezeichnetes Element des algebraischen modularen Verbandes P und existiert eine größte nichtnegative ganze rationale Zahl m, so daß die Gleichung $x^{(m)} = z$ mit $x \in Z$ und $x \leqq a$ $(a \in P)$ lösbar ist, so heiße $H_a(z) \overset{\text{def}}{=} m$ die *Höhe* des Elementes z *bezüglich* a. Falls für $z > 0$ eine solche Zahl nicht existiert, werde $H_a(z) = \infty$ gesetzt. Zur Abkürzung wird ferner $H(z) \overset{\text{def}}{=} H_1(z)$ definiert. Mit dieser Begriffsbildung ergibt sich aus Satz 1 der folgende Hilfssatz.

Hilfssatz 3. *P sei ein algebraischer modularer Verband mit der Eigenschaft* (I) (siehe oben), *und es sei* $a \cap b = 0$ $(a, b \in P)$. *Dann gilt für alle* $z \in Z$ *mit* $0 < z \leqq a$

$$H_a(z) = H_{a \cup b}(z)\,.$$

Beweis. Nach Definition der Höhe gilt $H_a(z) \leqq H_{a \cup b}(z)$. Ist $H_{a \cup b}(z) = m$, so existiert ein Element $x \in Z$ mit $x \leqq a \cup b$ und $x^{(m)} = z$. Nach Satz 1 existiert demnach ein Element $y \in Z$ mit $y \leqq a$ und $y^{(m)} = x^{(m)} = z$, so daß $H_a(z) \geqq m = H_{a \cup b}(z)$ gilt.

4. Eine Untermenge Q des algebraischen modularen Verbandes P heiße genau dann *unabhängig*, wenn die direkte Vereinigung der Elemente von Q existiert. Eine unabhängige Menge kompakter Elemente des Verbandes P heiße genau dann eine

Basis von P, wenn deren direkte Vereinigung das Einselement von P ist. Bilden insbesondere ausgezeichnete Elemente von P eine Basis, so werde diese eine *ausgezeichnete Basis* genannt. Die als Umkehrung des in [2] bewiesenen Satzes zu beweisende Aussage kann damit folgendermaßen formuliert werden.

Satz 2. *Besitzt ein algebraischer modularer Verband mit den Eigenschaften* (I) (siehe oben) *und*

$$z \leqq \bigcup_{\nu \in N} b_\nu \Rightarrow z' \leqq \bigcup_{\nu \in N} b'_\nu \quad (z \in Z,\ b_\nu \in P,\ N \text{ Indexmenge}) \tag{II}$$

eine ausgezeichnete Basis, so gilt

$$1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$$

mit $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq \cdots$ *und für* $z \in Z$, $z > 0$

$$z \leqq a_i \Rightarrow H(z) \leqq h_i \quad (i = 1, \ldots),$$

wobei h_i $(i = 1, \ldots)$ *geeignete natürliche Zahlen sind.*

Beweis. $Q = \{z_\nu \mid \nu \in N\}$ mit einer geeigneten Indexmenge N sei ausgezeichnete Basis von P, und es sei für $i = 1, \ldots$

$$a_i \overset{\text{def}}{=} \bigcup \big(z_\nu \mid z_\nu \in Q,\ O(z_\nu) \leqq i\big)$$

die Vereinigung aller derjenigen Elemente von Q, für welche $O(z_\nu) \leqq i$ gilt. Dann ist $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots$ sowie $1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$ nach Konstruktion. Wegen (II) folgt aus $z \leqq a_i$ $(z \in Z,\ z > 0)$ stets $O(z) \leqq i$, also $H_{a_i}(z) \leqq i - 1$. Nach Voraussetzung gilt ferner mit

$$\bar{a}_i \overset{\text{def}}{=} \bigcup \left(z_\nu \mid z_\nu \in Q,\ z_\nu \not\leqq a_i\right)$$

$\bar{a}_i \cup a_i = 1$ und $\bar{a}_i \cap a_i = 0$ für $i = 1, \ldots$, so daß nach Hilfssatz 3 $H(z) = H_{a_i}(z)$, also $H(z) \leqq h_i$ mit $h_i \overset{\text{def}}{=} i - 1$ gilt.

Zusatz. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 2 gilt*

$$z \in Z,\ z > 0 \Rightarrow H(z) < \infty\,.$$

Beweis. Aus $z \leqq 1 = \bigcup_{\nu \in N} z_\nu$ und der Kompaktheit von z folgt

$$z \leqq \bigcup_{j=1}^{n} z_{\nu_j} \leqq a_k \text{ mit } k \geqq \operatorname{Max}\big(O(z_{\nu_j}) \mid j = 1, \ldots, n\big).$$

Der Zusatz zu Satz 2 besagt insbesondere, daß auch die Umkehrung des in [2] als Folgerung 1 formulierten und bewiesenen verbandstheoretischen Analogons zum Satz von PRÜFER [5] über abzählbare primäre abelsche Gruppen gilt.

LITERATUR

[1] FRITZSCHE, R.: Verallgemeinerung eines Satzes von Prüfer und Baer. Beiträge zur Algebra und Geometrie *1* (1971), 155–161.

[2] FRITZSCHE, R.: Verallgemeinerung eines Satzes von Kulikov. Beiträge zur Algebra und Geometrie *2* (1973), 73–81.

[3] Head, T. J.: Purity in compactly generated modular lattices. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *17* (1966), 55—59.
[4] Куликов, Л. Я.: К теории абелевых групп произвольной мощности. Мат. Сборник, Н. С., *16* (1945), 129—162.
[5] Prüfer, H.: Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären abelschen Gruppen. Math. Z. *17* (1932), 35—61.

Manuskripteingang: 20. 9. 1972

VERFASSER:

Reiner Fritzsche und Gerd Richter, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg