

Werk

Titel: Die Struktur einer Klasse linear kompakter Ringe

Autor: WIDIGER, A.

Jahr: 1974

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0003|log16

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Die Struktur einer Klasse linear kompakter Ringe¹⁾

ALFRED WIDIGER

1. Einleitung

In der Theorie der (nicht kommutativen) Ringe spielen die Ringe mit Minimalbedingung für Rechtsideale, d. h. die artinschen Ringe, eine zentrale Rolle. Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß man danach trachtet, durch gewisse Verallgemeinerungen der Minimalbedingung möglichst viele gute Eigenschaften der artinschen Ringe auf allgemeinere Klassen von Ringen zu übertragen. Eine dieser Verallgemeinerungen ist es, den Ring mit einer Topologie zu versehen und von dieser Topologie gewisse Eigenschaften vorauszusetzen, die die Minimalbedingung erweitern. Diese sogenannten linear kompakten Ringe sind von ZELINSKY, LEPTIN und anderen untersucht worden. Dabei hat LEPTIN die im gewissen Sinne weitestgehende Verallgemeinerung des Wedderburn-Artin-Satzes bewiesen.

Der Satz von WEDDERBURN und ARTIN behandelt den einen Extremfall eines artinschen Ringes; nämlich den Fall, daß das Radikal des Ringes gleich dem Nullideal ist. Der andere Extremfall, daß nämlich der Ring ein artinscher Radikalring ist, ist von SZELE betrachtet worden. In [3] wurde eine Beschreibung der artinschen Ringe gegeben, deren Radikal selbst wieder ein artinscher Ring ist.

Es ist das Anliegen dieser Arbeit, analoge Voraussetzungen für gewisse linear kompakte Ringe zu machen und hier Ergebnisse zu erzielen. Das Hauptresultat ist Satz 5, aus dem sich dann ziemlich leicht zahlreiche Folgerungen ergeben. Weiter wird gezeigt, daß sich die Untersuchungen ganz analog auch für Algebren über einem Körper durchführen lassen. Schließlich betrachten wir den Spezialfall der diskreten Topologie. Es ergibt sich, daß in diesem Falle die Ergebnisse von [3] aus den oben für Ringe angegebenen ganz einfach folgen; für Algebren erhält man analoge Sätze.

¹⁾ Dies ist ein Teil meiner Dissertation, die ich unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. A. KERTÉSZ geschrieben habe.

2. Vorbereitungen

Wir stellen kurz die benutzten Bezeichnungen zusammen.

- $Z(p^k)$ zyklische Gruppe der Ordnung p^k , falls k eine natürliche Zahl ist; für $k = \infty$ die Prüfersche p -Gruppe (d. h., p ist dann stets Primzahl),
 K_0 additive Gruppe aller rationalen Zahlen,
 $\sum M_\nu$ komplette direkte Summe der M_ν ,
 $\sum^\nu \oplus$ gruppentheoretische diskrete direkte Summe,
 $\oplus$ gruppentheoretische direkte Zerlegung,
 $\boxplus$ ringtheoretische direkte Zerlegung,
 (a) in Gruppen die vom Element a erzeugte Untergruppe; in Ringen das von a erzeugte Ideal,
 $(R, +)$ additive Gruppe des Ringes R ,
 R_n Ring aller n -reihigen Matrizen mit Elementen aus dem Ring R (n natürliche Zahl),
 $\emptyset$ leere Menge.

Da der Querstrich zur Bezeichnung von Faktorringen dient, wird zur Bezeichnung des topologischen Abschlusses einer Menge A eines topologischen Raumes das Symbol $\text{Cl}(A)$ (closure) benutzt.

Ein topologischer Ring R ist ein assoziativer Ring, so daß R zugleich ein topologischer Hausdorffscher Raum ist, und die Subtraktion und Multiplikation stetige Funktionen bezüglich dieser Topologie sind.

Entsprechend verstehen wir unter einem topologischen (Rechts-) R -Modul M einen R -Modul im algebraischen Sinne, wobei R ein topologischer Ring und M eine topologische Gruppe (also insbesondere ein Hausdorffscher Raum) ist, so daß die Modulmultiplikation eine stetige Funktion von $M \times R$ in M ist. Als Filter bezeichnet man ein System $\mathcal{F}$ von Mengen $F_\mu (\neq \emptyset) \subseteq M$ mit der Eigenschaft, daß zu beliebigen $F_\mu, F_\nu \in \mathcal{F}$ stets ein $F_\lambda \in \mathcal{F}$ existiert, so daß $F_\lambda \subseteq F_\mu \cap F_\nu$ gilt. Ein Basisfilter eines topologischen Moduls ist ein Filter, dessen Elemente ein Fundamentalsystem (eine Basis) für die Umgebung des Nullelementes des Moduls bilden. Durch ein Basisfilter ist die Topologie des Moduls bestimmt.

Ein topologischer R -Modul heißt linear topologisch, wenn er einen Basisfilter aus R -Untermoduln besitzt.

Ein linear topologischer R -Modul M heißt linear kompakt (kurz l.k.), wenn jeder Filter $\mathcal{F} = \{a_\mu + N_\mu\}$ von Restklassen nach abgeschlossenen Untermoduln N_μ einen nichtleeren Durchschnitt hat: $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.

Ein Ring R heißt l.k., wenn er als Rechts- R -Modul l.k. ist. Nach LEPTIN heißt ein linear topologischer R -Modul M im engeren Sinne linear kompakt (kurz: i.e.S.l.k.), wenn jeder stetige R -Homomorphismus von M in einen linear topologischen R -Modul offen ist. Hiernach ist klar, was unter einem i.e.S.l.k. Ring zu verstehen ist. Sind $M_\nu (\nu \in I)$ topologische R -Moduln, so meinen wir mit $\sum_{\nu \in I} M_\nu$ die komplette

direkte Summe der Moduln M_ν mit der Tychonoffschen Topologie (Produkttopologie).

Es sei $\{\alpha\}$ eine gerichtete Menge und $\{M_\alpha\}, \alpha \in \{\alpha\}$, eine Menge von topologischen R -Moduln, indiziert mit der gerichteten Menge $\{\alpha\}$. Für jedes Paar von Indizes $\alpha, \beta \in \{\alpha\}$ mit $\alpha \geq \beta$ gebe es einen stetigen Modulhomomorphismus $\pi_\beta^\alpha: M_\alpha \rightarrow M_\beta$.

Die Relation $\pi_\beta^\alpha \pi_\gamma^\beta = \pi_\gamma^\alpha$ sei für alle $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ erfüllt. Als den inversen Limes, $\varprojlim [M_\alpha, \pi_\beta^\alpha]$, bezeichnet man den topologischen Untermodul von $\sum_{\alpha \in \{\alpha\}} M_\alpha$, dessen Komponenten x_α die Bedingung $\pi_\beta^\alpha x_\alpha = x_\beta$ für alle $\alpha \geq \beta$ erfüllen. Die natürlichen Projektionen π_β des inversen Limes in die M_β sind definiert durch $\pi_\beta([x_\alpha]) = x_\beta$. Wir zitieren nun eine Anzahl bekannter Aussagen über i.e.S.l.k. und l.k. Moduln:

(I) ([10], Prop. 1) *Die komplette direkte Summe l.k. R-Moduln ist ein l.k. R-Modul.*

(II) ([10], Prop. 2) *Ist φ ein stetiger R-Homomorphismus des R-Moduls M in einen linear topologischen R-Modul M' , so ist mit M auch $\varphi(M)$ l.k.; $\varphi(M)$ ist dann in M' abgeschlossen.*

(III) ([10], Prop. 3) *Ist M ein l.k. R-Modul und N ein abgeschlossener Untermodul von M , so ist N l.k.*

Von (III) gilt auch die Umkehrung:

(IV) ([10], Prop. 9) *Ist M ein linear topologischer Modul, N ein abgeschlossener Untermodul von M , so ist mit N und M/N auch M l.k.*

(V) ([10], Prop. 4) *Ein inverser Limes l.k. R-Moduln ist l.k.*

Daß die lineare Kompaktheit eine Verallgemeinerung der Minimalbedingung ist, besagt

(VI) ([10], Prop. 5) *Ist M ein linear topologischer R-Modul mit Minimalbedingung für abgeschlossene Untermoduln, so ist M linear kompakt.*

(VII) ([7], Satz 4) *Die i.e.S.l.k. R-Moduln M sind unter den l.k. R-Moduln durch die folgenden drei äquivalenten Eigenschaften gekennzeichnet: (a) Jeder stetige R-Homomorphismus von M ist offen. (b) In den Faktormoduln nach offenen Untermoduln gilt die Minimalbedingung. (c) Jeder offene Untermodul von M hat minimale Obermoduln.*

(VIII) ([7], Satz 5) *Abgeschlossene Untermoduln, stetig homomorphe Bilder und komplette direkte Summen i.e.S.l.k. Moduln sind i.e.S.l.k.*

Eine l.k. abelsche Gruppe ist ein l.k. I -Modul über dem diskreten Ring I der ganzen Zahlen. Daß eine l.k. abelsche Gruppe stets i.e.S.l.k. ist, besagt

(IX) ([6], (2.6)) *Eine diskrete l.k. abelsche Gruppe genügt der Minimalbedingung für Untergruppen.*

Ist K ein diskreter Körper und M ein unitärer K -Modul, so gilt analog zu (IX)

(X) ([5], S. 78) *Ist der K -Modul M diskret, so ist M genau dann l.k., wenn M endliche Dimension über K hat.*

Es sei R ein topologischer Ring. Unter dem Radikal J des Ringes R verstehen wir hier stets das Jacobson-Radikal. Für dieses gilt:

(XI) ([7], Satz 8) *Das Radikal J eines l.k. Ringes R ist abgeschlossen.*

Für einen artinschen Ring, d. h. für einen Ring mit Minimalbedingung für Rechtsideale, ist das Radikal bekanntlich nilpotent. Nach LEPTIN kann man für i.e.S.l.k. Ringe einen ähnlichen Satz beweisen. Dazu führt man die folgende Begriffsbildung ein: Es sei A ein abgeschlossenes Ideal aus einem topologischen Ring R . Man defi-

niere absteigende Ketten von Idealen ${}_{\mu}A$ und A für Ordnungszahlen μ durch die Formeln

$$\begin{aligned} {}_0A &= A & A &= A \\ {}_{\mu+1}A &= \text{Cl}(A \cdot {}_{\mu}A) & A &= \text{Cl}({}_{\mu}A) \\ {}_{\lambda}A &= \bigcap_{\mu < \lambda} {}_{\mu}A & A &= \bigcap_{\mu < \zeta} {}_{\mu}A, \end{aligned}$$

falls λ eine Limeszahl ist.

Ist ζ eine feste Ordnungszahl, für welche die Menge aller $\mu < \zeta$ größere Mächtigkeit als R hat, so gibt es sicher ein $\alpha < \zeta$ mit ${}_{\mu}A = {}_{\alpha}A$ für alle $\mu > \alpha$. Insbesondere ist stets ${}_{\mu}A = {}_{\zeta}A$ für $\mu \geq \zeta$ und auch $A = {}_{\zeta}A$ für alle $\mu \geq \zeta$. Wir schreiben $A = {}_{\zeta}A$.

$A = {}_{\zeta}A$.

Das Ideal A heißt transfinit l -nilpotent, wenn ${}_{\zeta}A = (0)$ ist, und transfinit nilpotent, wenn $A = (0)$ ist. Ein transfinit l -nilpotentes Ideal ist nach der Definition erst recht transfinit nilpotent.

(XII) ([7], Satz 9) *Das Radikal J eines i.e.S.l.k. Ringes ist transfinit l -nilpotent.*

Im Ring aller linearen Transformationen eines Vektorraumes über einem Schiefkörper kann man bekanntlich eine Topologie, die sogenannte endliche Topologie, einführen, indem man als Basisfilter die folgenden Rechtsideale nimmt: Für beliebige endlich viele $u_1, \dots, u_k$ aus dem Vektorraum sei $F(u_1, \dots, u_k)$ die Menge aller linearen Transformationen, die $u_1, \dots, u_k$ in die Null abbilden. Mit dieser Topologie ist der Ring aller linearen Transformationen (der volle Endomorphismenring) offenbar ein linear topologischer Ring. Wenn im folgenden vom vollen Endomorphismenring eines Vektormoduls über einem Schiefkörper die Rede ist, so ist der Ring mit der endlichen Topologie gemeint.

Die beiden folgenden wichtigen Sätze stammen von LEPTIN.

(XIII) ([7], Satz 12) *Ein topologisch einfacher l.k. Ring ohne Radikal ist voller Endomorphismenring eines Vektormoduls über einem Schiefkörper und umgekehrt.*

(XIV) ([7], Satz 13) *Die radikalfreien linear kompakten Ringe sind genau die kompletten direkten Summen voller Endomorphismenringe von Vektormoduln über Schiefkörpern.*

Wir nehmen jetzt an, daß der Ring R ein l.k. Ring mit einem Basisfilter $\{A_{\alpha}\}$ aus zweiseitigen Idealen sei. Die diskreten Ringe R/A_{α} bilden ein inverses System in der folgenden Weise: Es sei $\alpha \geq \beta$, wenn $A_{\alpha} \subseteq A_{\beta}$ gilt. Ist π_{α} die natürliche Abbildung von R auf R/A_{α} , so definiere man

$$\pi_{\beta}^{\alpha} = \pi_{\alpha}^{-1} \pi_{\beta}: R_{\alpha} \rightarrow R_{\beta}.$$

Offenbar ist $[R_{\alpha}, \pi_{\beta}^{\alpha}]$ ein inverses System. Es gilt

(XV) ([11], Theorem 1) *Es ist $R \cong \varprojlim [R_{\alpha}, \pi_{\beta}^{\alpha}]$ im algebraischen und topologischen Sinne.*

3. Die Zerlegung eines i.e.S.l.k. Ringes in Rechtsideale

Genauso wie im Falle der artinschen Ringe spielen bei der Untersuchung der linear kompakten Ringe idempotente Elemente eine wichtige Rolle. Man versucht deshalb, idempotente Elemente des Faktorrings nach dem Radikal zu idempotenten Elementen von R „anzuheben“. Daß dies möglich ist, besagt

(XVI) ([8], (4.1)) *Sei M ein transfinit nilpotentes Ideal des linear kompakten Ringes R . In jeder idempotenten Restklasse $\bar{e}$ von R modulo M liegt ein idempotentes Element $e \in R$.*

Ist R ein i.e.S.l.k. Ring, J sein Radikal, so kann man $\bar{R} = R/J$ nach (XIV) schreiben als

$$\bar{R} = \sum_{\mu \in I} \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu,$$

wobei die $\bar{e}_\mu$ die Einselemente der topologisch einfachen direkten Summanden sind. Da das Radikal eines i.e.S.l.k. Ringes nach (XII) transfinit nilpotent ist, gibt es idempotente Vertreter $e_\mu \in R$ von $\bar{e}_\mu$. LEPTIN hat gezeigt, daß für den Fall, daß R ein Einselement besitzt, der Ring R folgenderweise in Rechtsideale zerlegbar ist:

$$R = \sum_{\mu \in I} e_\mu R.$$

Wir benötigen einen ähnlichen Zerlegungssatz für jeden i.e.S.l.k. Ring. Hierzu brauchen wir zunächst

Hilfssatz 1. *Es sei R ein i.e.S.l.k. Ring und J sein Radikal. $R/J = \sum_{\mu \in I} \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$, wobei die $\bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ topologisch einfache direkte Summanden sind. $\bar{e} = \sum_{\mu \in I} \bar{e}_\mu$ ist das Einselement von $\bar{R}$. Dann gibt es ein System idempotenter Vertreter $\langle e_\mu \rangle$ von $\langle \bar{e}_\mu \rangle$, e von $\bar{e}$, so daß*

$$ee_\mu = e_\mu e = e_\mu$$

für alle μ gilt.

Beweis. Nach (XVI) gibt es einen Vertreter $e_\mu^{(0)}$ von $\bar{e}_\mu$ mit $ee_\mu^{(0)} = e_\mu^{(0)} + n_0$, wobei $n_0 \in J$ ist. Angenommen, wir hätten bereits einen idempotenten Vertreter $e_\mu^{(\nu)}$ von $\bar{e}_\mu$ für alle Ordnungszahlen $\nu < \lambda$ gefunden, so daß

$$ee_\mu^{(\nu)} = e_\mu^{(\nu)} + n_\nu \quad (n_\nu \in J_\nu)$$

und $\{e_\mu^{(\nu)} + J_\nu\}_{\nu < \lambda}$ ein Filter abgeschlossener Restklassen sein soll.

Fall 1: λ Limeszahl. Wir wählen $e_\mu^{(\lambda)} \in \bigcap_{\nu < \lambda} (e_\mu^{(\nu)} + J_\nu)$ und erhalten jedenfalls die idempotente Restklasse

$$e_\mu^{(\lambda)} + J_\lambda \subseteq \bigcap_{\nu < \lambda} (e_\mu^{(\nu)} + J_\nu) \subseteq \bar{e}_\mu.$$

Nach (XVI) können wir $e_\mu^{(\lambda)}$ als Idempotent wählen, denn J ist transfinit nilpotent. Da $e_\mu^{(\lambda)} = e_\mu^{(\nu)} + n'_\nu$ für alle $\nu < \lambda$ und gewisse $n'_\nu \in J_\nu$ gilt, folgt

$$ee_\mu^{(\lambda)} = ee_\mu^{(\nu)} + en'_\nu = e_\mu^{(\nu)} + en'_\nu + n_\nu \in e_\mu^{(\nu)} + J_\nu$$

für alle $\nu < \lambda$. Also gilt

$$ee_\mu^{(\lambda)} \in \bigcap_{\nu < \lambda} (e_\mu^{(\nu)} + J_\nu) = e_\mu^{(\lambda)} + J_\lambda.$$

Fall 2: $\lambda = \kappa + 1$. Es gilt $ee_\mu^{(\kappa)} = e_\mu^{(\kappa)} + n_\kappa$. Wir betrachten das Element

$$e_\mu^{(\lambda)} = e_\mu^{(\kappa)} - e_\mu^{(\kappa)} n_\kappa + n_\kappa.$$

Beachtet man $n_\kappa e_\mu^{(\kappa)} = n_\kappa$, so erhält man $(e_\mu^{(\lambda)})^2 = e_\mu^{(\lambda)}$. Weiter gilt

$$ee_\mu^{(\lambda)} = e(e_\mu^{(\kappa)} - e_\mu^{(\kappa)} n_\kappa + n_\kappa) = ee_\mu^{(\kappa)} - ee_\mu^{(\kappa)} n_\kappa - en_\kappa.$$

Wegen $en_\kappa = 0$ folgt

$$ee_\mu^{(\lambda)} = e_\mu^{(\kappa)} + n_\kappa - e_\mu^{(\kappa)} n_\kappa - n_\kappa^2 = e_\mu^{(\lambda)} - n_\kappa^2 = e_\mu^{(\lambda)} - n_\lambda$$

mit $n_\lambda = n_\kappa^2 \in J_\lambda$.

Wegen $J_\zeta = (0)$ für ein gewisses ζ (transfinite Nilpotenz) gilt schließlich

$$(e_\mu^{(\zeta)})^2 = e_\mu^{(\zeta)}, \quad ee_\mu^{(\zeta)} = e_\mu^{(\zeta)}, \quad \overline{e_\mu^{(\zeta)}} = \bar{e}_\mu.$$

Wir können jetzt also annehmen: $ee_\mu = e_\mu$. Sei $e_\mu e = e_\mu + n$, $n \in J$. Es gilt

$$n^2 = (e_\mu e - e_\mu)^2 = 0, \quad e_\mu n = n, \quad ne_\mu = 0.$$

Setzen wir $e'_\mu = e_\mu + n$, so wird

$$(e'_\mu)^2 = (e_\mu + n)^2 = e_\mu + e_\mu n + ne_\mu + n^2 = e_\mu + n = e'_\mu,$$

$$ee'_\mu = e(e_\mu + n) = e_\mu + en = e_\mu + n \quad \text{wegen} \quad en = n,$$

$$e'_\mu e = (e_\mu + n)e = e_\mu e + ne = e_\mu e = e_\mu + n.$$

Also ist $e'_\mu = e_\mu + n$ das gesuchte Idempotent.

Zur Vorbereitung für den Zerlegungssatz brauchen wir noch

Hilfssatz 2 (vgl. [8], (4.2)). *Gilt mit allen Bezeichnungen von Hilfssatz 1 für ein $x \in R$ $e_\mu x = 0$ für alle μ und $x = ex$, so folgt $x = 0$.*

Beweis. Aus $e_\mu x = 0$ für alle μ folgt $x \in J$. Angenommen $x \in {}_\alpha J$. Sei $N = {}_\alpha J / {}_{\alpha+1} J$ und ξ die Restklasse von x in N . Wegen $JN = (0)$ ist N ein R/J -(Links-)Modul und für ξ gilt $\bar{e}_\mu \xi = 0$ für alle $\bar{e}_\mu \in R/J$. Da die Linksmultiplikationen mit den Elementen aus R/J stetig sind, ist auch $(\sum_{\mu \in \Gamma} \bar{e}_\mu) \xi = 0$; aber es gilt $\bar{e} = \sum_{\mu \in \Gamma} \bar{e}_\mu$, und da wegen $x = ex$ folgt $\xi = \bar{e} \xi$, so ist also $\xi = 0$, d. h. $x \in {}_{\alpha+1} J$. Da J l -nilpotent ist, folgt $x = 0$.

Satz 1. *Ist R ein i.e.S.l.k. Ring, J sein Radikal, $R/J = \bar{R} = \sum_{\mu \in \Gamma} \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$, $\bar{e}_\mu = \sum_{\mu \in \Gamma} \bar{e}_\mu$ das Einselement von $\bar{R}$, $\langle e_\mu \rangle$, e idempotente Vertreter von $\langle \bar{e}_\mu \rangle$, $\bar{e}$ aus R mit $e_\mu e = ee_\mu = e_\mu$ für alle μ , so ist R die komplette direkte Summe der Rechtsideale $e_\mu R$ und $(1 - e) R$:*

$$R = \sum_{\mu \in \Gamma} e_\mu R \oplus (1 - e) R.$$

Beweis (vgl. [8], Beweis von Satz 14). Wir zeigen, daß für $x \in R$ durch

$$\varphi: x \rightarrow \tilde{x} = \sum_{\mu \in \Gamma} e_\mu x + (x - ex)$$

ein R -Isomorphismus von R auf den R -Modul $\tilde{R} = \sum_{\mu \in \Gamma} e_\mu R \oplus (1 - e) R$ gegeben ist. Da die Multiplikation in R stetig ist, ist φ ein stetiger R -Homomorphismus

in $\tilde{R}$. Nach Hilfssatz 2 ist φ monomorph. Nach (VII) ist φ offen. Wegen (II) genügt es zu zeigen, daß $\varphi(R)$ in $\tilde{R}$ dicht liegt. Da

$$\varphi(x - ex) = \sum_{\mu} e_{\mu}(x - ex) + (x - ex - ex + eex) = x - ex$$

wegen $e_{\mu}e = e_{\mu}$, $e^2 = e$ gilt, ist das sicher der Fall, wenn stets zu endlich vielen der e_{μ} , etwa $e_1, \dots, e_k$, ein $z \in R$ existiert mit

$$\varphi(z) = e_1 + \sum' e_{\mu}u_{\mu}, \quad u_{\mu} \in J, \quad (*)$$

wobei in $\sum'$ über alle $\mu \neq 1, \dots, k$ summiert wird.

Für $k = 1$ können wir $z = e_1$ setzen.

Wir nehmen an, daß für jede Wahl von $k - 1$ der e_{μ} Elemente $z \in R$ existieren, so daß die (*) entsprechenden Gleichungen gelten, und wählen die Idempotente $e_1, \dots, e_k$. Es gibt dann Elemente $z^{(i)}$, $i = 1, \dots, k - 1$, mit

$$\varphi(z^{(i)}) = e_i + e_kv^{(i)} + \sum' e_{\mu}u_{\mu}^{(i)},$$

wobei $v^{(i)}, u_{\mu}^{(i)} \in J$. Weiter gilt

$$\varphi(e_k) = e_1w_1 + \dots + e_{k-1}w_{k-1} + e_k + \sum' e_{\mu}w_{\mu}, \quad w_{\mu} \in J,$$

also

$$\varphi\left(e_k - \sum_{i=1}^{k-1} z^{(i)}w_i\right) = e_k - e_k\left(\sum_{i=1}^{k-1} v^{(i)}w_i\right) + \sum' e_{\mu}w'_{\mu}.$$

Sei $e_k - \sum_{i=1}^{k-1} z^{(i)}w_i = x$. Zu $w = \sum_{i=1}^{k-1} v^{(i)}w_i \in J$ existiert das Rechtsquasiinverse w' mit $w + w' - ww' = 0$. Für xw' gilt

$$\varphi(xw') = e_kw' - e_kww' + \sum' e_{\mu}w'_{\mu}w' = -e_kw + \sum' e_{\mu}w'_{\mu}w'.$$

Deshalb wird

$$\varphi(x - xw') = e_k + \sum' e_{\mu}v_{\mu}, \quad v_{\mu} \in J.$$

Und mit $z = z^{(1)} - (x - xw')v^{(1)}$ erhält man

$$\varphi(z) = e_1 + \sum' e_{\mu}u_{\mu}, \quad u_{\mu} \in J.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man zeigen:

Hilfssatz 3 (vgl. [8], (4.3)). Wir können die e_{μ} sogar orthogonal wählen, d. h., zu $\bar{E} = \langle \bar{e}_{\mu} \rangle$ gibt es ein System orthogonaler idempotenter Vertreter $\langle e_{\mu} \rangle$ mit $e_{\mu}e = ee_{\mu} = e_{\mu}$.

Beweis. Sei E_0 ein maximales System orthogonaler idempotenter Vertreter der $\bar{e}_{\mu} \in \bar{E}$, wo für jedes $e_{\nu} \in \bar{E}_0$ auch $ee_{\nu} = e_{\nu}e = e_{\nu}$ gilt. Die Existenz eines E_0 ist durch das Zornsche Lemma gesichert. Sei $\bar{E}_0$ die Menge der $\bar{e}_{\mu} \in \bar{E}$ mit Vertretern in E_0 . Ist $\bar{E}_0 \neq \bar{E}$, so sei $\bar{e}'$ ein nicht in $\bar{E}_0$ liegendes Element von $\bar{E}$, e' ein idempotenter Vertreter von $\bar{e}'$ mit $e'e = ee' = e'$. $f = \sum_{e_{\mu} \in E_0} e_{\mu}$ existiert, weil $\sum_{\mu} e_{\mu}$ für ein System $\langle e_{\mu} \rangle$ wie in Satz 1 existiert. Dann ist

$$e^* = e' - fe' - e'f + fe'f$$

ein Vertreter von $\bar{e}'$ mit $e_\mu e^* = e^* e_\mu = 0$ für alle $e_\mu \in E_0$ und $ee^* = e^*e = e^*$. Es ist $e^{*2} = e^* + q$ mit $q \in J$. Angenommen, wir hätten für jede Ordnungszahl $\nu < \lambda$ einen Vertreter $e^{*(\nu)}$ von $\bar{e}'$ derart gefunden, daß

- (1) $e_\mu e^{*(\nu)} = e^{*(\nu)} e_\mu = 0$ für alle $e_\mu \in E_0$,
- (2) $ee^{*(\nu)} = e^{*(\nu)} e = e^{*(\nu)}$,
- (3) $(e^{*(\nu)})^2 = e^{*(\nu)} + q_\nu$ ($q_\nu \in J$),
- (4) die $e^{*(\nu)} + J$ für alle $\nu < \lambda$ bilden einen Filter.

Fall 1: λ sei Limeszahl. Wir wählen $e^{*\prime} \in \bigcap_{\nu < \lambda} (e^{*(\nu)} + J)$. Es sei

$$e^{*(\lambda)} = (e - f) e^{*\prime} (e - f).$$

Wegen $e^{*\prime} = e^{*(\nu)} + q_\nu$ ($q_\nu \in J$) für alle $\nu < \lambda$ gilt

$$e^{*(\lambda)} \in \bigcap_{\nu < \lambda} (e^{*(\nu)} + J).$$

Dann ist

- (1') $e_\mu e^{*(\lambda)} = e^{*(\lambda)} e_\mu = 0$ für alle $e_\mu \in E_0$,
- (2') $ee^{*(\lambda)} = e^{*(\lambda)} e = e^{*(\lambda)}$,
- (3') $(e^{*(\lambda)})^2 \in (e^{*(\nu)})^2 + J \subseteq e^{*(\nu)} + J$ für alle $\nu < \lambda$,
also $(e^{*(\lambda)})^2 \in \bigcap_{\nu < \lambda} (e^{*(\nu)} + J) = e^{*(\lambda)} + J$,
- (4') die $e^{*(\nu)} + J$ bilden für $\nu \leq \lambda$ einen Filter.

Fall 2: λ nicht Limeszahl, $\lambda = \kappa + 1$. Dann sei

$$e^{*(\kappa)} = e^{*(\lambda)} - 2 e^{*(\kappa)} q_\kappa + q_\kappa$$

Dann gelten (1') und (2'); wegen

$$(e^{*(\lambda)})^2 = e^{*(\lambda)} + 4q_\kappa^3 - 3q_\kappa^2$$

gilt auch (3'); (4') ist ebenfalls richtig.

Da aber für ein ζ $J = (0)$ gilt, ist $E_0 \cup e^{*(\zeta)}$ ein E_0 umfassendes System. Folglich gilt $\bar{E} = \bar{E}_0$.

4. Im engeren Sinne linear kompakte Ringe mit im engeren Sinne linear kompaktem Radikal

Ein Ring R heißt streng artinsch, wenn $(R, +)$ der Minimalbedingung für Untergruppen genügt. Mit Methoden von SZELE kann man die streng artinschen Ringe durch endliche Ringe charakterisieren, wie das in [3] geschehen ist.

Analog nennen wir einen topologischen Ring R streng linear kompakt, wenn er einen Basisfilter aus Idealen besitzt und jeder Filter von Restklassen nach abgeschlossenen Untermoduln von $(R, +)$ einen nicht leeren Durchschnitt hat (d. h., $(R, +)$ ist eine l.k. Gruppe).

Man kann die streng l.k. Ringe mit Methoden von WIEGANDT [9] durch inverse Limites endlicher Ringe beschreiben. Wir begnügen uns hier mit dem

Satz 2. *Die streng linear kompakten Ringe sind gerade die inversen Limes von streng artinschen Ringen.*

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich einfach aus (XV), (IX) und (VIII).

Es sei R im folgenden stets ein i.e.S.l.k. Ring mit einem Basisfilter aus zweiseitigen Idealen. Weiter sei das Radikal J von R auch als Ring (d. h. als J -Modul) im engeren Sinne linear kompakt. Nach (XIV) gilt

$$\bar{R} = R/J = \sum_{\mu \in I^*} \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu,$$

wobei die $\bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ volle Endomorphismenringe von Vektorräumen über Schiefkörpern $S^{(\mu)}$ sind. Die Topologie von $\bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ ist die endliche. Nun soll $\bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ einen Basisfilter aus Idealen besitzen. Da $\bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ topologisch einfach ist, folgt, daß die Topologie die diskrete sein muß. Aus der Einfachheit der $\bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ folgt dann ebenfalls, daß der zugehörige Vektorraum endliche Dimension über $S^{(\mu)}$ hat, d. h., die $\bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ sind volle Matrizenringe über Schiefkörpern.

Hilfssatz 4 ([8], (3.14)). *Ist R ein i.e.S.l.k. Ring mit einem Basisfilter aus Idealen und e ein Idempotent aus R , so ist auch eRe im engeren Sinne linear kompakt mit einem Basisfilter aus Idealen.*

Hilfssatz 5. *Ein transfinit l -nilpotenter i.e.S.l.k. Ring R mit einer Basis aus Idealen ist streng l.k.*

Beweis. Wir führen den Beweis mit Hilfe von (XV). Danach ist nämlich R inverser Limes der diskreten i.e.S.l.k. Ringe R/A_α , wenn $\{A_\alpha\}$ ein Basisfilter von Idealen in R ist. Jedes R/A_α ist transfinit l -nilpotent. Wegen (V) genügt es zu zeigen, daß die R/A_α streng linear kompakt sind; mit anderen Worten, wir können annehmen, daß R diskret ist. Aus $R \supseteq R^2 \supseteq R^3 \supseteq \dots$, (VII) und der transfiniten l -Nilpotenz von R folgt, daß R nilpotent ist, etwa $R^n = (0)$.

Ist $R^2 = (0)$, so ist die Behauptung richtig, da jede Untergruppe ein Rechtsideal ist. Angenommen, der Satz gälte für Nilpotenzgrad $k \leq n-1$. R/R^{n-1} hat einen Nilpotenzgrad $\leq n-1$, ist also nach der Annahme streng linear kompakt. R^{n-1} ist i.e.S.l.k. (da abgeschlossen in R). Aber jede Untergruppe von R^{n-1} ist ein R -Untermodul von R^{n-1} , also ist R^{n-1} streng linear kompakt, nach (IV) also auch R streng linear kompakt.

Ein Ring heißt primär, wenn er ein Einselement besitzt, und wenn der Faktorring nach seinem Radikal ein voller Matrizenring über einem Schiefkörper ist.

Satz 3. *Ist R ein primärer i.e.S.l.k. Ring mit einem Basisfilter aus Idealen und i.e.S.l.k. Radikal $J \neq (0)$, so ist R streng linear kompakt.*

Beweis. Das Radikal J ist wegen (XII) und Hilfssatz 5 streng linear kompakt. Wenn $J^2 \neq (0)$ ist, so betrachten wir R/J . R/J ist ein i.e.S.l.k. und primärer Ring. Das Radikal von R/J ist J/J .

J/J ist abgeschlossen in R , also auch in J . Folglich ist J/J ein i.e.S.l.k. Ring. Es gilt natürlich $J/J \neq J$, da sonst $J = J$ für alle J , also $J = (0)$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Wenn wir zeigen, daß R/J streng linear kompakt ist, so folgt, da $J/J \subseteq J$ auch streng linear kompakt ist, daß R streng linear kompakt ist. Da $(J/J)^2 = (0)$ ist, genügt es, sich auf den Fall mit $J^2 = (0)$ zu beschränken.

Dann wählen wir ein Element $(0 \neq) n \in J$. Wir bilden den R -Modul R/J vermöge φ in den R -Modul J ab:

$$\varphi: \bar{r} \rightarrow nr \quad (\bar{r} \in R/J = \bar{R}, r \in R),$$

wenn r ein Vertreter der Restklasse $\bar{r}$ ist. Wegen $J^2 = (0)$ ist diese Abbildung von der Wahl von r unabhängig. φ ist ein R -Homomorphismus. φ ist stetig, weil die Multiplikation in R eine stetige Funktion ist. Da R/J ein i.e.S.l.k. R -Modul ist, ist φ offen. $\varphi(\bar{R})$ ist (nach (II)) abgeschlossen in J . Daher ist $\varphi(\bar{R})$ streng linear kompakt. Es gibt einen abgeschlossenen Untermodul $\bar{N}$ von $\bar{R}$, so daß

$$\bar{R}/\bar{N} \cong \varphi(\bar{R}).$$

$\bar{R}/\bar{N}$ ist also (wie $\varphi(\bar{R})$) ein diskreter, streng linear kompakter Modul, also mit Minimalbedingung für Untergruppen; dies ist nur möglich, wenn entweder $\bar{R}$ endlich ist oder $\bar{N} = \bar{R}$ gilt. Das letztere würde bedeuten: $nr = 0$ für alle $r \in R$; aber R hat nach Voraussetzung ein Einselement. Also ist $\bar{R}$ endlich, d. h. streng linear kompakt, also ist auch R streng linear kompakt.

Satz 4. *Es sei R ein i.e.S.l.k. Ring mit einer Basis aus Idealen und i.e.S.l.k. Radikal J ; $R/J = \bar{R} = \sum_{\mu \in I^*} \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ ($\bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ einfache Ringe). Ist $\bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ unendlich, so gilt $e_\mu R e_\mu \cong \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ ($e_\mu r e_\mu \rightarrow \bar{e}_\mu r \bar{e}_\mu$), und $e_\mu J = J e_\mu = (0)$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 4 ist $e_\mu R e_\mu$ ein i.e.S.l.k. Ring. Das Radikal $e_\mu J e_\mu$ von $e_\mu R e_\mu$ ist abgeschlossen und liegt in J , folglich ist es auch abgeschlossen in J und also auch i.e.S.l.k. Wegen $\bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu \cong (e_\mu R e_\mu)/(e_\mu J e_\mu)$ (im algebraischen Sinne), ist $e_\mu R e_\mu$ primär. Daher gilt nach Satz 3 und der Voraussetzung $e_\mu J e_\mu = (0)$. Da $\bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ und $e_\mu R e_\mu$ beide diskret sind, gilt die Isomorphie auch im topologischen Sinne. Die Abbildung

$$\varphi: e_\mu r e_\mu \rightarrow n e_\mu r e_\mu (n \in J)$$

bildet den i.e.S.l.k. diskreten Modul $e_\mu R e_\mu$ in den linear topologischen Modul J ab. φ ist ein stetiger $e_\mu R e_\mu$ -Homomorphismus. Wieder ist $\varphi(e_\mu R e_\mu)$ abgeschlossen in J und daher streng linear kompakt. Wie im Beweis von Satz 3 folgt, daß entweder $e_\mu R e_\mu$ endlich ist oder φ die Nullabbildung. Das erste ist wegen $e_\mu R e_\mu \cong \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ und der Voraussetzung über $\bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ unmöglich, also folgt in der Tat $n e_\mu R e_\mu = (0)$. Daß auch $e_\mu R e_\mu n = (0)$ gilt, folgt analog, wenn man beachtet:

Hilfssatz 6. *Es sei R ein i.e.S.l.k. Ring mit einem Basisfilter aus Idealen und i.e.S.l.k. Radikal J . Dann ist R auch als R -Linksmodul i.e.S.l.k. mit e.S.l.k. Radikal.*

Beweis. J ist als R -Linksmodul i.e.S.l.k., denn J ist sogar streng linear kompakt. Da auch $R/J = \sum_{\mu} \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ als R -Linksmodul i.e.S.l.k. ist, folgt die Behauptung nach (IV) und (VII)(c).

Jetzt formulieren wir unser Hauptergebnis.

Satz 5.

(I) *Jeder i.e.S.l.k. Ring R mit einer Basis aus Idealen und i.e.S.l.k. Radikal besitzt eine ringtheoretische direkte Darstellung*

$$R = \sum_{\mu \in I^*} S_{n_\mu}^{(\mu)} \oplus R^*, \quad (1)$$

wobei die $S^{(\mu)}$ unendliche diskrete Schiefkörper sind und R^* ein streng linear kompakter Ring ist.

(II) Jeder Ring mit der Darstellung (1) ist ein i.e.S.I.k. Ring mit einer Basis aus Idealen und i.e.S.I.k. Radikal.

(III) Die Darstellung (1) ist eindeutig im folgenden Sinne: Ist auch noch

$$R = \sum_{\lambda \in \Lambda} L_{n_\lambda}^{(\lambda)} \bigoplus R^{*\prime},$$

wobei die $L^{(\lambda)}$ unendliche (diskrete) Schiefkörper sind und $R^{*\prime}$ streng linear kompakt ist, so gibt es eine eindeutige Abbildung der Indexmenge Γ auf Λ ($\mu \rightarrow \lambda_\mu$) mit $S^{(\mu)} \cong L^{(\lambda_\mu)}$, $n_\mu = n_{\lambda_\mu}$, und es gilt $R^* \cong R^{*\prime}$.

Beweis. (I) Es sei R ein Ring mit den Voraussetzungen des Satzes, J sein Radikal.

$$R/J = \bar{R} = \sum_{\mu \in \Gamma^*} \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$$

ist die komplette direkte Summe von vollen Matrizenringen über Schiefkörpern. $\bar{e} = \sum_{\mu \in \Gamma^*} \bar{e}_\mu$ sei das Einselement von $\bar{R}$.

Nach Hilfssatz 3 gibt es ein System $\langle e_\mu \rangle$ orthogonaler idempotenter Vertreter von $\langle \bar{e}_\mu \rangle$ in R und einen idempotenten Vertreter e von $\bar{e}$, so daß $ee_\mu = e_\mu e = e_\mu$ für alle $\mu \in \Gamma^*$ gilt. Wir bilden die additive Gruppe von R ab in die Gruppe

$$(\tilde{R}, +) = \sum_{\mu \in \Gamma^*} e_\mu R e_\mu \oplus \sum_{\mu \in \Gamma^*} e_\mu R (e - e_\mu) \oplus (1 - e) R e \oplus e R (1 - e) \oplus (1 - e) R (1 - e),$$

wobei $(1 - e) R e = \{xe - exe \mid x \in R\}$ ist und $e R (1 - e)$, $(1 - e) R (1 - e)$ analoge Bedeutung haben. Die einzelnen Summanden sollen die durch R induzierte Topologie haben (jeder Summand ist abgeschlossen in R !), $(\tilde{R}, +)$ die Tychonoffsche. Diese Abbildung φ sei definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \sum_{\mu \in \Gamma^*} e_\mu x e_\mu + \sum_{\mu \in \Gamma^*} e_\mu x (e - e_\mu) + (xe - exe) + (ex - exe) + \\ & + (x - ex - xe + exe) \end{aligned}$$

für $x \in (R, +)$.

φ ist eineindeutig. Denn gilt

$$e_\mu x e_\mu = e_\mu x (e - e_\mu) = 0 \quad \text{für alle } \mu$$

und

$$xe - exe = ex - exe = x - ex - xe + exe = 0,$$

so folgt

$$e_\mu x e = 0 \quad \text{für alle } \mu$$

und

$$xe = exe.$$

Nach Hilfssatz 2 folgt hieraus $xe = 0$, also $x = 0$.

φ ist eine Abbildung auf $(\tilde{R}, +)$: Nach Satz 1 gibt es zu beliebigen x_μ, y_μ ($\mu \in \Gamma^*$) aus R zwei Elemente $x, y \in R$, so daß gilt:

$$e_\mu x = e_\mu x_\mu e_\mu \quad (\text{für alle } \mu) \text{ und } x = ex,$$

$$e_\mu y = e_\mu y_\mu (e - e_\mu) \quad (\text{für alle } \mu) \text{ und } y = ey.$$

Es folgt

$$e_\mu y = e_\mu y (e - e_\mu) \text{ und } e_\mu x = e_\mu x e_\mu.$$

Für das Element $xe + ye$ gilt

$$\varphi(xe + ye) = \sum e_\mu x_\mu e_\mu + \sum e_\mu y_\mu (e - e_\mu).$$

Da $\varphi((1 - e)Re) = (1 - e)Re$ ist und analoges für $eR(1 - e)$ und $(1 - e)R(1 - e)$ gilt, ist die Behauptung richtig.

Da die Multiplikation in R stetig ist, ist φ ein stetiger Gruppenhomomorphismus von $(R, +)$ auf $(\tilde{R}, +)$.

Wir schreiben

$$\bar{R} = \sum_{\mu \in \Gamma} \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu \boxplus \sum_{\mu \in \Gamma'} \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu,$$

wobei $\Gamma = \{\mu \in \Gamma^* | \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu \text{ ist unendlich}\}$, $\Gamma' = \Gamma^* \setminus \Gamma$.

$\bar{A} = \sum_{\mu \in \Gamma'} \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ ist ein abgeschlossenes Ideal von $\bar{R}$. Also ist das vollständige Urbild A von $\bar{A}$ (beim natürlichen Homomorphismus von R auf $\bar{R}$) ein abgeschlossenes Ideal von R . $A/J = \sum_{\mu \in \Gamma'} \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ ist nach (VIII) streng linear kompakter Ring.

Da J (nach Hilfssatz 5) streng linear kompakt ist, gilt das auch für A .

Wir zeigen jetzt

$$\begin{aligned} \varphi(A, +) &= \sum_{\mu \in \Gamma'} e_\mu R e_\mu \oplus \sum_{\mu \in \Gamma^*} e_\mu R (e - e_\mu) \oplus (1 - e) R e \oplus e R (1 - e) \oplus \\ &\quad \oplus (1 - e) R (1 - e) = (\tilde{A}, +). \end{aligned}$$

Es sei $a \in A$. Dann gilt $e_\mu a e_\mu \equiv 0 \pmod{J}$ für $\mu \in \Gamma$, d. h. $e_\mu a e_\mu \in J$. Nach Satz 4 gilt aber $e_\mu J = (0)$, also $e_\mu a e_\mu = 0$ für alle $\mu \in \Gamma$, d. h. gerade $\varphi((A, +)) \subseteq (\tilde{A}, +)$. Ist umgekehrt $\varphi(x) \in (\tilde{A}, +)$, so gilt $e_\mu x e_\mu = 0$ für alle $\mu \in \Gamma$, d. h. $\bar{e}_\mu \bar{x} \bar{e}_\mu = 0$, also $\bar{x} \in \bar{A}$, $x \in A$.

Da A streng linear kompakt ist, gilt nach (IX)

$$(A, +) \cong (\tilde{A}, +)$$

im algebraischen und topologischen Sinne.

Wir können schreiben:

$$(\tilde{R}, +) = \sum_{\mu \in \Gamma} e_\mu R e_\mu \oplus (\tilde{A}, +). \quad (2)$$

Wir wollen nun $(\tilde{R}, +)$ zu einem Rechts- R -Modul machen. Dies tun wir, indem wir es für jeden Summanden in (2) durchführen.

Für $e_\mu x e_\mu \in e_\mu R e_\mu$ ($\mu \in \Gamma$) gilt nämlich mit $r \in R$

$$e_\mu x e_\mu r = e_\mu x r e_\mu.$$

Denn es gilt $(\text{mod } J) \bar{e}_\mu \bar{x} \bar{e}_\mu \bar{r} = \bar{e}_\mu \bar{x} \bar{r} \bar{e}_\mu$, weil $\bar{e}_\mu$ im Zentrum von $\bar{R}$ liegt. Das besagt aber $e_\mu x e_\mu r - e_\mu x r e_\mu \in J$. Wegen $e_\mu J = (0)$ (Satz 4) folgt die Behauptung.

Für $\tilde{a} \in (\tilde{A}, +)$ gibt es ein $a \in A$ mit $\varphi(a) = \tilde{a}$. Wir definieren

$$\tilde{a} r = \varphi(ar).$$

Da A ein Ideal ist, gilt $ar \in A$, also $\tilde{a} r \in (\tilde{A}, +)$. Es ist klar, daß die R -Moduln A und $(\tilde{A}, +)$ isomorph sind.

Für jedes $x \in R$ gibt es eine eindeutige Darstellung

$$x = x_0 + a_x \quad (a_x \in A),$$

und zwar so, daß gerade $\varphi(x) = \tilde{x}_0 + \tilde{a}_x$ nach (2) wird, $a_x = \varphi^{-1}(\tilde{a}_x)$, $x_0 = \varphi^{-1}(\tilde{x}_0)$ sind. Wir bilden jetzt den R -Modul R ab auf den R -Modul $\sum_{\mu \in I'} e_\mu R e_\mu \oplus (\tilde{A}, +)$ durch

$$x \xrightarrow{\varphi^*} e_\mu x e_\mu + \varphi(a_x).$$

φ^* ist eineindeutig und stetig, da das auch von φ gilt. Es bleibt zu zeigen, daß φ^* ein R -Homomorphismus ist, also $\varphi^*(xr) = \varphi^*(x)r$ gilt. Wir müssen also zeigen: Ist $x = x_0 + a_x$, so ist $x_0 r = (xr)_0$, $a_x r = a_{xr}$.

Die Voraussetzungen besagen:

$$e_\mu x e_\mu = e_\mu x_0 e_\mu \quad \text{für alle } \mu \in I', \quad (3)$$

$$e_\nu x_0 e_\nu = 0 \quad \text{für alle } \nu \in I', \quad (4)$$

$$e_\mu x_0 (e - e_\mu) = 0 \quad \text{für alle } \mu \in I^*, \quad (5)$$

$$ex_0 - ex_0 e = 0, \quad (6)$$

$$x_0 e - ex_0 e = 0, \quad (7)$$

$$x_0 - ex_0 - x_0 e + ex_0 e = 0. \quad (8)$$

Aus (6) und (8) folgt $x_0 - x_0 e = 0$, also $x_0 r - x_0 e r = 0$. Wegen (4) und (5) gilt $e_\nu x_0 e = 0$ für alle $\nu \in I'$. Damit folgt

$$e_\nu x_0 r = 0 \quad \text{für alle } \nu \in I', \quad (*)$$

insbesondere

$$e_\nu x_0 r e_\nu = 0 \quad \text{für alle } \nu \in I'. \quad (4')$$

Weiter ist

$$e_\mu x_0 r (e - e_\mu) = 0 \quad \text{für alle } \mu \in I^* \quad (5')$$

zu zeigen. Wir setzen $e_\mu x_0 r (e - e_\mu) = z$. Es gilt $ze_\mu = 0$, $ze = z$. Sei $\lambda \neq \mu$. Dann ist $ze_\lambda = e_\mu x_0 r e_\lambda \in J$. Ist μ oder λ aus I' , so ist (Satz 4) $ze_\lambda = 0$. Ist $\mu \in I'$, so gilt nach (*) $ze_\lambda = 0$. Also gilt $ze = z$ und $ze_\kappa = 0$ für alle $\kappa \in I^*$. Nach Hilfssatz 6 und Hilfssatz 2 folgt $z = 0$.

Jetzt setzen wir $z = ex_0 r - ex_0 r e$. Es gilt $ez = z$, $e_\mu z \in J$, also $e_\mu z = 0$, wenn $\mu \in I'$ $e_\nu z = 0$ für $\nu \in I'$ wegen (*). Also gilt nach Hilfssatz 2 auch $z = 0$, was besagt

$$ex_0 r - ex_0 r e = 0. \quad (6')$$

Aus (7) und (8) folgt $x_0 - ex_0 = 0$, also $x_0 r - ex_0 r = 0$, oder

$$x_0 r e - ex_0 r e = 0, \quad (7')$$

und

$$x_0 r - ex_0 r - x_0 r e + ex_0 r e = 0. \quad (8')$$

(3') ist schon bewiesen worden.

(3') bis (8') besagen $x_0 r = (xr)_0$. Aus $x = x_0 + a_x$, entsprechend $xr = (xr)_0 + a_{xr}$ folgt auch $a_x r = a_{xr}$.

Also ist φ^* ein Modulhomomorphismus. Da R i.e.S.l.k. ist, ist φ^* offen, d. h., φ^* ist ein Isomorphismus im algebraischen und topologischen Sinne.

Wir wollen auch noch zeigen, daß $(\tilde{R}, +)$ in analoger Weise ein Links- R -Modul ist, daß also gilt $rx_0 = (rx)_0$, $ra_x = a_{rx}$. Hierzu genügt es zu zeigen, daß aus (3) bis (8) folgt

$$(e - e_\mu) x_0 e_\mu = 0 \quad \text{für alle } \mu \in I^*. \quad (5'')$$

Dies ist wegen Satz 4 richtig, falls $\mu \in I$. Es sei jetzt $\mu \in I'$. Aus (4) folgt, daß $ex_0e_\mu = 0$ zu zeigen ist. Setzen wir wieder $z = ex_0e_\mu$, so gilt $ez = z$ und $e_\lambda z = 0$ für $\lambda \in I$ (da $e_\lambda z \in J$). Wenn wir noch $e_\lambda z = 0$ für alle $\lambda \in I'$ zeigen können, so folgt aus Hilfssatz 2 die Behauptung. Aus (4) und (5) folgt $e_\lambda x_0e = 0$ für alle $\lambda \in I'$. Mit (6) wird daraus $e_\lambda x_0 = 0$, also in der Tat $e_\lambda z = 0$.

$(\tilde{R}, +)$ wird zu einem Ring $\tilde{R}$ wie folgt. Jedes $e_\mu R e_\mu$ ($\mu \in I$) ist ein Ring, und $\tilde{A}$ wird zu einem Ring mittels der Definition

$$\tilde{a}\tilde{a}' = \varphi(\varphi^{-1}(\tilde{a})\varphi^{-1}(\tilde{a}')) .$$

$\tilde{A}$ ist zu A algebraisch und topologisch isomorph. Die Abbildung

$$\varphi': R \rightarrow \sum_{\mu \in I} e_\mu R e_\mu \boxplus \tilde{A}$$

ist eineindeutig, stetig und offen, denn das gilt ja auch für φ^* . Sei

$$x \rightarrow \sum_{\mu \in I} e_\mu x e_\mu + \tilde{a}_x$$

und

$$y \rightarrow \sum_{\mu \in I} e_\mu y e_\mu + \tilde{a}_y .$$

Für die Relationstreue ist zu zeigen $\varphi'(xy) = \varphi'(x)\varphi'(y)$, also $a_{xy} = a_x a_y$ und $e_\mu x e_\mu y e_\mu = e_\mu x y e_\mu$. Letzteres ist schon bewiesen. Es gilt

$$a_x a_y = a_{x a_y} = a_{a_x y} .$$

$a_{a_x y}$ ist aber definiert durch $a_{xy} = (a_{xy})_0 + a_{a_x y}$, und es gilt natürlich $(a_{xy})_0 = 0$. Damit ist (I) bewiesen.

(II) Nach (VIII) ist R i.e.S.l.k. Daß R eine Idealbasis besitzt, ist klar, da jeder Summand eine solche besitzt. Das Radikal J von R liegt in R , ist nach (XII) abgeschlossen in R und damit selbst streng linear kompakt, insbesondere i.e.S.l.k. (siehe (IX)).

(III) Sei neben (1) noch

$$R = \sum_{\lambda \in A} L_{n_\lambda}^{(\lambda)} \boxplus R^{*'} .$$

Es gilt

$$S_{n_\mu}^{(\mu)} R = \sum_{\lambda \in A} S_{n_\mu}^{(\mu)} L_{n_\lambda}^{(\lambda)} \boxplus S_{n_\mu}^{(\mu)} R^{*'} .$$

Man bilde den $S_{n_\mu}^{(\mu)}$ -Linksmodul $S_{n_\mu}^{(\mu)}$ homomorph und stetig in den linear topologischen $S_{n_\mu}^{(\mu)}$ -Linksmodul $R^{*'}$ ab durch $s \rightarrow sr^{*'}$ ($r^{*'} \in R^{*'}$). Wäre $sr^{*'} \neq 0$, so folgte wie beim Beweis von Satz 4, daß $S_{n_\mu}^{(\mu)}$ endlich wäre, im Widerspruch zur Voraussetzung. Deshalb ist $S_{n_\mu}^{(\mu)} R^{*'} = (0)$. Also, da $S_{n_\mu}^{(\mu)}$ einfach ist,

$$S_{n_\mu}^{(\mu)} = S_{n_\mu}^{(\mu)} L_{n_\lambda}^{(\lambda)} \subseteq L_{n_\lambda}^{(\lambda)} ,$$

also da $L_{n_\lambda}^{(\lambda)}$ einfach ist,

$$S_{n_\mu}^{(\mu)} = L_{n_\lambda}^{(\lambda)} \text{ für ein } \lambda = \lambda_\mu .$$

Analog zeigt man $L_{n_\lambda}^{(\lambda)} = S_{n_\mu}^{(\mu')} L_{n_\lambda}^{(\lambda)}$. Folglich ist

$$S_{n_\mu}^{(\mu)} = S_{n_\mu}^{(\mu)} S_{n_\mu}^{(\mu')} L_{n_\lambda}^{(\lambda)} .$$

Daher gilt $\mu = \mu'$. Die Abbildung $\mu \rightarrow \lambda_\mu$ ist folglich eineindeutig und eine Abbildung auf Λ . Aus

$$S_{n_\mu}^{(\mu)} = L_{n_{\lambda_\mu}}^{(\lambda_\mu)}$$

folgt bekanntlich $n_\mu = n_{\lambda_\mu}$ und $S^{(\mu)} \cong L^{(\lambda_\mu)}$. Weiter wird $R^{*'} \cong R/U \cong R^*$, wenn $U = \sum_{\mu \in \Lambda} S_{n_\mu}^{(\mu)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} L_{n_\lambda}^{(\lambda)}$ ist.

Bemerkung. Wir haben bei unserem Satz die Voraussetzung aufgenommen, daß R eine Basis aus Idealen besitzt. Es erhebt sich die Frage, ob diese Voraussetzung notwendig ist. Bevor wir die Notwendigkeit an einem Beispiel zeigen, beachten wir noch den folgenden Zusammenhang.

Hat der i.e.S.l.k. Ring R mit i.e.S.l.k. Radikal einen Basisfilter aus Idealen, so ist nach Hilfssatz 6 R auch als Links- R -Modul i.e.S.l.k. Umgekehrt, ist R i.e.S.l.k. mit i.e.S.l.k. Radikal, und zwar als Links- R -Modul und als Rechts- R -Modul, so heißt das insbesondere, daß R einen Basisfilter $\mathcal{F}_r$ aus Rechtsidealen und einen Basisfilter $\mathcal{F}_l$ aus Linksidealen besitzt. Es sei $A \in \mathcal{F}_r$. Dann gibt es ein $B \in \mathcal{F}_l$ mit $B \subseteq A$. Daher gilt $B + BR \subseteq A$, und da B offen ist, liegt also in jedem $A \in \mathcal{F}_r$ ein offenes Ideal, d. h., R hat einen Filter aus Idealen.

Es sei nun P ein endlicher Körper. Wir betrachten die Menge aller $\aleph_0 \times \aleph_0$ -Matrizen über P . Diese bilden eine Gruppe. Es sei A der Zeroring über dieser Gruppe. Ferner sei B der Ring aller $\aleph_0 \times \aleph_0$ -Matrizen über P , die in jeder Zeile nur endlich viele von Null verschiedene Elemente haben (d. h., B ist der volle Endomorphismenring eines Vektorraumes vom Range $\aleph_0$ über P). Wir setzen $R = A \oplus B$ und machen R zu einem Ring durch die folgende Definition:

Für $a \in A$, $b \in B$ sei stets $ab = 0$, und $ba \in A$ sei durch die gewöhnliche Matrizenmultiplikation gegeben (diese Produkte kann man bilden!). Es sei

$$B_k = \{(p_{ij}) \in B \mid p_{kj} = 0\},$$

$$A_{kl} = \{(p_{ij}) \in A \mid p_{kl} = 0\}.$$

Wir nehmen $\mathcal{F} = \{A_{kl} \oplus B_k\}_{k,l=1,2,\dots}$ als eine Subbasis in R , d. h., alle endlichen Durchschnitte der $F \in \mathcal{F}$ bilden den Basisfilter von R

Da $A_{kl} \oplus B_k$ ein Rechtsideal ist:

$$(A_{kl} \oplus B_k)(A \oplus B) \subseteq B_k A + B_k B \subseteq A_{kl} \oplus B_k,$$

$\bigcap_{k,l=1}^{\infty} (A_{kl} \oplus B_k) = (0)$ ist und Multiplikation und Addition stetig sind, ist R ein linear topologischer Ring. Das Radikal von R ist A ; A ist offenbar abgeschlossen in R , und $\{A_{kl}\}$ ist eine Subbasis von A . Offenbar ist A isomorph zur kompletten direkten Summe von $\aleph_0$ Exemplaren des (diskreten) Zerorings über $(P, +)$ (Tychonoffsche Topologie). Also ist A i.e.S.l.k. R/A ist isomorph zum vollen Endomorphismenring des Vektorraumes vom Range $\aleph_0$ über P in der endlichen Topologie, also i.e.S.l.k. Folglich ist R i.e.S.l.k. mit i.e.S.l.k. Radikal. Aber R hat keinen Basisfilter aus Idealen, denn R/A hat keinen solchen. R ist nicht streng linear kompakt, denn R/A ist es nicht. Trotzdem zerfällt R nicht entsprechend dem Hauptsatz.

5. Folgerungen

Satz 6. *Die Ringe, deren sämtliche abgeschlossenen Ideale i.e.S.l.k. Ringe mit einem Basisfilter aus Idealen sind, sind die im Hauptsatz genannten Ringe.*

Zum Beweis braucht man nur zu erwähnen, daß jedes abgeschlossene Ideal eines Ringes im Hauptsatz wieder die Form (1) hat.

Satz 7. *Die Ringe, deren sämtliche abgeschlossenen Rechtsideale i.e.S.l.k. Ringe mit Idealbasisfilter sind, sind die Ringe des Hauptsatzes, bei denen sämtliche $n_\mu = 1$ sind.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß alle $n_\mu = 1$ sein müssen. Wäre etwa $n_0 \neq 1$, so wäre mit $S_0 = S^{(0)}$

$$B = \begin{bmatrix} S_0 & S_0 & \cdots & S_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ein abgeschlossenes Rechtsideal von R , das also linear kompakt sein müßte. Da B diskret ist und

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & S_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ein trivialer B -Rechtsmodul ist, müßte C streng linear kompakt sein, d. h. mit Minimalbedingung für Untergruppen, was ausgeschlossen war.

Sind umgekehrt alle $n_\mu = 1$, so hat jedes abgeschlossene Rechtsideal A die Form

$$\sum_{\mu \in \Gamma''} S^{(\mu)} \boxplus R^{**},$$

wobei $\Gamma'' \subseteq \Gamma$ ist und R^{**} abgeschlossen in R^* , also R^{**} streng linear kompakt, folglich A i.e.S.l.k.

Satz 8. *Die Ringe, deren sämtliche abgeschlossenen Unterringe im engeren Sinne linear kompakte Ringe mit Idealbasisfilter sind, sind die Ringe des Hauptsatzes, bei denen sämtliche $n_\mu = 1$ sind, und sämtliche $S^{(\mu)}$ absolut algebraische Körper mit Primcharakteristik sind.*

Beweis. Notwendigkeit: Wegen Satz 7 sind die $n_\mu = 1$. Hätte etwa $S^{(\mu)}$ die Charakteristik Null, so wäre $I \subseteq S^{(\mu)}$ (I = Ring der ganzen Zahlen). Da $S^{(\mu)}$ diskret ist, ist I abgeschlossen. In I bilden die (sogar absteigenden) Nebenklassen

$$\frac{3^n - 1}{2} + (3^n), \quad n = 1, 2, \dots$$

aber einen Filter mit leerem Durchschnitt.

Wäre etwa $z \in S^{(\mu)}$ transzendent über dem Primkörper $P^{(\mu)}$ von $S^{(\mu)}$, so ist der Polynomring $P^{(\mu)}[z]$ abgeschlossen, enthält aber die absteigende Kette von Nebenklassen (nach Idealen)

$$z + (z^2) \supseteq z + z^2 + (z^4) \supseteq \dots$$

mit leerem Durchschnitt.

Also ist jedes $S^{(\mu)}$ absolut algebraisch mit von Null verschiedener Charakteristik. Daß dann $S^{(\mu)}$ kommutativ ist, folgt aus einem Satz von JACOBSON ([1], S. 183), der lautet: Jede Divisionsalgebra über einem Galoisfeld ist kommutativ.

Hinlänglichkeit: Sei U ein abgeschlossener Unterring eines solchen Ringes $R(n_\mu = 1, S^{(\mu)}$ absolut algebraische Körper mit Charakteristik $\neq 0$). $\{A_\alpha\}$ sei ein Basisfilter (aus Idealen) von R . Dann ist $\{U \cap A_\alpha\}$ ein Basisfilter (aus Idealen) von U . Wir zeigen zunächst, daß U analog zu (XV) dem inversen Limes der Ringe $U/(U \cap A_\alpha)$ isomorph ist. Wir schließen hier so: Sei $[u_\alpha] \in \varprojlim [U_\alpha, \pi_\beta^\alpha]$. Die Nebenklassen $u_\alpha + (U \cap A_\alpha)$ bilden einen Filter. Dann bilden auch die Nebenklassen $u_\alpha + A_\alpha$ einen Filter (in R !). Da R l. k. ist, gibt es ein $x \in \bigcap (u_\alpha + A_\alpha)$. Es gilt also $u_\alpha \in x +$

$+ A_\alpha$, d. h., in jeder Umgebung von x gibt es ein Element von U . Da U abgeschlossen ist, folgt $x \in U$, und x ist Urbild von $[u_\alpha]$. Also ist U dem inversen Limes der $U_\alpha = U/(U \cap A_\alpha)$ isomorph. Nach (V) und (VIII) genügt es zu zeigen, daß die $U/(U \cap A_\alpha)$ im engeren Sinne linear kompakt sind. Da $U/(U \cap A_\alpha) \cong (U + A_\alpha)/A_\alpha \subseteq R/A_\alpha$ gilt und R/A_α diskret ist, ist zu zeigen: Gilt

$$R = \sum_{i=1}^n S^{(i)} \boxplus R^*, \quad (*)$$

wobei R^* streng artinsch ist und die $S^{(i)}$ absolut algebraische Körper mit Primcharakteristik sind, so ist jeder Unterring U von R ein artinscher Ring. Dies ist aber der Inhalt von Satz 4 in [3].

Satz 9. Die i.e.S.l.k. Ringe mit einem Basisfilter aus Idealen und der Eigenschaft, daß jeder Filter von abgeschlossenen Restklassen nach Unterringen einen nicht leeren Durchschnitt hat, sind die Ringe des Hauptsatzes, bei denen sämtliche $n_\mu = 1$ sind, und sämtliche $S^{(\mu)}$ absolut algebraische Körper mit Primcharakteristik und mit Minimalbedingung für Unterkörper sind.

Beweis. Nach Satz 8 sind alle $n_\mu = 1$ und die $S^{(\mu)}$ absolut algebraische Körper mit Primzahlcharakteristik. Angenommen, in $S^{(\mu)}$ gäbe es eine streng absteigende unendliche Kette von Unterkörpern:

$$K_1 \supset K_2 \supset \dots$$

Da jedes K_i ein K_{i+1} -Vektorraum ist, gilt

$$K_i = K_{i+1} \oplus H_i$$

mit einem gewissen K_{i+1} -Vektorraum H_i . Man wähle $0 \neq h_i \in H_i$, dann bilden die

$$h_1 + h_2 + \dots + h_i + K_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

einen Filter mit leerem Durchschnitt. Man sieht das sofort ein, wenn man bedenkt, daß die h_i über dem Primkörper $P^{(\mu)}$ von $S^{(\mu)}$ linear unabhängig sind. Also kann man $\{h_i\}$ zu einer Basis von $S^{(\mu)}$ über $P^{(\mu)}$ ergänzen. Jedes Element von $S^{(\mu)}$ kann daher nur die Summe endlich vieler h_i sein.

Für die Umkehrung genügt es zu zeigen: Haben alle Ringe R_λ die Eigenschaft des Satzes, so hat auch $R = \sum_\lambda R_\lambda$ diese Eigenschaft. Der Beweis wird ganz analog zu dem Beweis des Satzes über die Kompaktheit von $R = \sum_\lambda R_\lambda$ im Falle der Kompaktheit aller R_λ geführt (vgl. [5], S. 19).

Es sei also ein Filter $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}$ von Restklassen nach abgeschlossenen Unterringen von $R = \sum_\lambda R_\lambda$. Nach dem Zornschen Lemma gibt es einen maximalen Filter von

Restklassen nach (nicht notwendig abgeschlossenen) Unterringen. Dieser Filter sei $\mathfrak{G} = \{G_\beta\}$. Sei π_λ die Projektion $R \rightarrow R_\lambda$ und $\mathfrak{G}_\lambda = \{\text{Cl}(\pi_\lambda(G_\beta))\}$. $\mathfrak{G}_\lambda$ ist ein Filter von abgeschlossenen Nebenklassen nach Unterringen in R_λ . Wegen der Voraussetzung über R_λ gibt es ein $x_\lambda (\in R_\lambda)$, das in allen $\text{Cl}(\pi_\lambda(G_\beta))$ liegt. Es sei $x = [x_\lambda]$ und $x + N$ eine Basisumgebung von x . Es gibt Basisumgebungen $x_\lambda + N_\lambda$ von x_λ für alle λ , so daß für endlich viele λ , etwa $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gilt:

$$x \in \bigcap_{i=1}^k (\pi_{\lambda_i}^{-1}(x_{\lambda_i} + N_{\lambda_i})) \subseteq x + N.$$

Da $x_{\lambda_i} \in \text{Cl}(\pi_{\lambda_i}(G_\beta))$, ist $(x_{\lambda_i} + N_{\lambda_i}) \cap \pi_{\lambda_i}(G_\beta) \neq \emptyset$. Also gilt

$$\pi_{\lambda_i}^{-1}(x_{\lambda_i} + N_{\lambda_i}) \cap G_\beta \neq \emptyset. \quad (*)$$

Da $\pi_{\lambda_i}^{-1}(x_{\lambda_i} + N_{\lambda_i})$ eine Nebenklasse nach einem Unterring ist, und $\mathfrak{G} \cup \pi_{\lambda_i}^{-1}(x_{\lambda_i} + N_{\lambda_i})$ wegen (*) einen Filter bildet, folgt aus der Maximalität von $\mathfrak{G}$

$$\pi_{\lambda_i}^{-1}(x_{\lambda_i} + N_{\lambda_i}) \in \mathfrak{G}.$$

Aus dem gleichen Grunde folgt dann

$$\bigcap_{i=1}^k \pi_{\lambda_i}^{-1}(x_{\lambda_i} + N_{\lambda_i}) \in \mathfrak{G}$$

und $x + N \in \mathfrak{G}$. Insbesondere gilt also $(x + N) \cap F_\alpha \neq \emptyset$, d. h. $x \in \text{Cl}(F_\alpha) = F_\alpha$, $x \in \bigcap_{\mathfrak{f}} F_\alpha$.

6. Algebren. Diskrete Topologie

Es sei jetzt R eine Algebra über dem diskreten Körper K . Ganz analog heißt die Algebra linear kompakt, wenn jeder Filter von abgeschlossenen Restklassen nach Algebrarechtsidealen (d. h. Rechtsidealen des Ringes R , die gleichzeitig K -Untermoduln sind) einen nichtleeren Durchschnitt hat und wenn R einen Basisfilter aus Algebrarechtsidealen besitzt. R heißt im engeren Sinne linear kompakt, wenn R l.k. ist und wenn jeder Algebrahomomorphismus von R in einen linear topologischen R -Modul (Algebramodul) offen ist. Wir nennen die K -Algebra R streng linear kompakt, wenn sie einen Basisfilter aus Algebraidealen besitzt und wenn jeder Filter von Nebenklassen nach abgeschlossenen K -Untermoduln einen nicht leeren Durchschnitt hat.

Das Radikal der Algebra R stimmt mit dem Radikal des Ringes R überein ([2], Satz 6.18).

Alle Sätze der Abschnitte 2 und 3 gelten mit den gleichen Beweisen auch für Algebren.

Als Analogon zu Satz 2 haben wir

Satz 10. *Jede streng linear kompakte Algebra R über K ist inverser Limes von diskreten Algebren endlichen Ranges (über K) und umgekehrt.*

Beweis. Ist $\{A_\alpha\}$ der Basisfilter von Idealen von R , so sind die R/A_α diskret und streng linear kompakt, also nach (X) von endlicher Dimension über K . Nach (XV) gilt $R = \varprojlim [R/A_\alpha, \pi_\alpha^\#]$. Die Umkehrung ist wegen (V) richtig.

Hilfssatz 4 und Hilfssatz 5 sind unverändert für Algebren gültig. Aus Satz 3 wird
 Satz 11. *Ist R eine primäre i.e.S.l.k. Algebra über K mit einem Basisfilter aus zwei-
 seitigen Idealen und im e.S.l.k. Radikal $J \neq (0)$, so ist R eine streng linear kom-
 pakte Algebra. Dies ist genau dann der Fall, wenn R/J endliche Dimension über K
 hat.*

Der Beweis bleibt erhalten. Analog zu Satz 4 gilt mit analogem Beweis

Satz 12. *Sei R eine i.e.S.l.k. Algebra über K mit einem Idealbasisfilter und i.e.S.l.k.
 Radikal J , $R/J = \bar{R} = \sum_{\mu \in \Gamma} \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$. Ist $\bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu$ von unendlichem Rang über K , so gilt
 $e_\mu R e_\mu \cong \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu (e_\mu R e_\mu \rightarrow \bar{e}_\mu \bar{R} \bar{e}_\mu)$ und $e_\mu J = J e_\mu = (0)$.*

Mit diesen Sätzen erhält man auf genau die gleiche Weise wie im Beweis von Satz 5
 das Hauptergebnis für Algebren:

Satz 13.

(I) *Jede i.e.S.l.k. Algebra R über dem (diskreten) Körper K mit i.e.S.l.k. Radikal
 und einem Basisfilter aus Idealen besitzt die direkte Zerlegung*

$$R = \sum_{\mu \in \Gamma} S_{n_\mu}^{(\mu)} \oplus R^*, \quad (1)$$

wobei R^* eine streng linear kompakte Algebra über K ist und die $S^{(\mu)}$ diskrete
 Divisionsalgebren unendlichen Ranges über K sind.

(II) *Jede Algebra mit der Dsartellung (1) ist eine i.e.S.l.k. Algebra mit Idealbasis und
 i.e.S.l.k. Radikal.*

(III) *Die Darstellung (1) ist eindeutig im folgenden Sinne: Ist auch noch*

$$R = \sum_{\lambda \in \Lambda} S_{n_\lambda}^{(\lambda)} \oplus R^*,$$

wobei R^{**} streng linear kompakt ist und die $S^{(\lambda)}$ unendlichen Rang über K
 haben, so gibt es eine eineindeutige Abbildung der Indexmenge Γ auf Λ ($\mu \rightarrow \lambda_\mu$)
 mit $S^{(\mu)} \cong S^{(\lambda_\mu)}$ und $n_\mu = n_{\lambda_\mu}$, und es gilt $R^* \cong R^{**}$.

Analog zu Satz 6 und Satz 7 gelten mit analogem Beweis:

Satz 14. *Die Algebren über K , deren sämtliche abgeschlossenen Ideale i.e.S.l.k.
 Algebren mit einer Idealbasis sind, sind die Algebren von Satz 13.*

Satz 15. *Die Algebren über K , deren sämtliche abgeschlossenen Rechtsideale i.e.S.l.k.
 Algebren mit Idealbasis sind, sind die Algebren von Satz 13, bei denen in (1) sämtliche
 $n_\mu = 1$ sind.*

Weiter gilt der

Satz 16. *Die Algebren über K , deren sämtliche abgeschlossenen Unteralegebren
 i.e.S.l.k. mit einer Basis aus Idealen sind, sind die Algebren von Satz 13, bei denen
 alle $n_\mu = 1$ und alle $S^{(\mu)}$ algebraisch über K sind.*

Beweis. Da $S^{(\mu)}$ ein Einselement hat, kann man K als einen im Zentrum von $S^{(\mu)}$
 liegenden Unterkörper von $S^{(\mu)}$ auffassen. Nach Satz 15 sind die $n_\mu = 1$. Ange-
 nommen, $z \in S^{(\mu)}$ wäre transzendent über K . $K[z]$ ist eine (abgeschlossene) Unter-
 algebra von $S^{(\mu)}$, die die Restklassen

$$z + K[z^2], \quad z + z^2 + K[z^4], \dots$$

enthält. Diese bilden einen Filter, der leeren Durchschnitt hat, da z transzendent über K angenommen war.

Für die Umkehrung zeigen wir: Jede Unteralgebra $U \neq (0)$ von $S^{(\mu)}$ ($S^{(\mu)}$ algebraisch über K) ist ein Schiefkörper. Es sei $(0 \neq) z \in U$. Es gibt eine Gleichung

$$a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (a_i \in K).$$

Dies sei das Minimalpolynom. Dann gilt $a_0 \neq 0$, anderenfalls wäre

$$(a_n z^{n-1} + \dots + a_1) z = 0,$$

was im Schiefkörper $S^{(\mu)}$ unmöglich ist. Daher gilt $(0 \neq) a_0 \in U$ (denn $a_n z^n + \dots + a_1 z \in U$, da U Unteralgebra sein soll), also $K \subseteq U$, $K[z] \subseteq U$. Da z algebraisch ist, gilt $K[z] = K(z)$, das Inverse von z liegt also in U , q. e. d.

Jetzt gelingt der Beweis genauso wie bei Satz 8.

Satz 17. *Die i.e.S.l.k. Algebren mit einem Basisfilter aus Idealen und der Eigenschaft, daß jeder Filter von abgeschlossenen Restklassen nach Unteralgebren einen nichtleeren Durchschnitt hat, sind die Algebren von Satz 13, bei denen sämtliche $n_\mu = 1$ sind und sämtliche $S^{(\mu)}$ algebraisch über K mit Minimalbedingung für Unter-algebren sind.*

Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 9.

Wir betrachten jetzt den Spezialfall, daß die Topologie des Ringes R die diskrete sei. Ist R dann ein i.e.S.l.k. Ring mit i.e.S.l.k. Radikal, so gilt der Hauptsatz, d. h. die Indexmenge I (im Hauptsatz) ist endlich, und nach (IX) ist R^* ein streng artinscher Ring. Also ist R artinsch mit artinschem Radikal.

Umgekehrt ist ein diskreter artinscher Ring mit artinschem Radikal nach (VII) (b) ein i.e.S.l.k. Ring mit i.e.S.l.k. Radikal. Also folgen aus unseren Ergebnissen für Ringe sofort die Ergebnisse von [3].

Für den Fall der diskreten Topologie einer Algebra über einem Körper K erhält man:

Satz 18.

(I) *Jede artinsche Algebra R (d. h. jede Algebra mit Minimalbedingung für Algebra-rechtsideale) mit artinschem Radikal ist die direkte Summe*

$$R = \sum_{k=1}^n S_{n_k}^{(k)} \oplus R^*, \quad (1^*)$$

wobei die $S^{(k)}$ Divisionsalgebren unendlichen Ranges über K sind und R eine Algebra endlichen Ranges über K ist.

(II) *Jede Algebra mit der Darstellung (1^*) ist eine artinsche Algebra mit artinschem Radikal.*

(III) *Die Darstellung (1^*) ist im folgenden Sinne eindeutig: Ist auch noch*

$$R = \sum_{l=1}^m L_{m_l}^{(l)} \oplus R^{*'},$$

mit $R^{*'}$ von endlichem Rang über K und $L^{(l)}$ Divisionsalgebren unendlichen Ranges über K , so ist $n = m$ und nach eventueller Umnummerierung $L^{(k)} \cong S^{(k)}$, $m_k = n_k$, $R^{*' \cong R^*$.

Satz 19. *Die Algebren über einem Körper, deren sämtliche Ideale artinsch sind, sind die Algebren von Satz 18.*

Satz 20. *Die Algebren über K , deren sämtliche Rechtsideale artinsch sind, sind die Algebren von Satz 18, bei denen in (1^*) alle $n_k = 1$ sind.*

Satz 21. *Die Algebren über K , deren sämtliche Unteralgebren artinsch sind, sind die Algebren von Satz 18, bei denen in (1^*) alle $n_k = 1$ sind und die $S^{(k)}$ alle algebraisch über K sind.*

Satz 22. ([13]) *Die Algebren mit Minimalbedingung für Unteralgebren sind die Algebren von Satz 18, bei denen in (1^*) alle $n_k = 1$ sind und die $S^{(k)}$ algebraische Divisionsalgebren über K mit Minimalbedingung für Unteralgebren sind.*

LITERATUR

- [1] JACOBSON, N.: Structure of rings. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 37, Providence 1956.
- [2] KERTÉSZ, A.: Vorlesungen über artinsche Ringe. Akademiai Kiado/B. G. Teubner, Budapest/Leipzig 1968.
- [3] KERTÉSZ, A., und A. WIDIGER: Artinsche Ringe mit artinschem Radikal. J. reine angew. Math. 242 (1970), 8—15.
- [4] KOVACS, I.: Infinite rings without infinite proper subrings. Publ. Math. Debrecen 4 (1955), 104—108.
- [5] LEFSCHETZ, S.: Algebraic Topology. New York 1942.
- [6] LEPTIN, H.: Über eine Klasse linear kompakter abelscher Gruppen. Abh. Math. Sem. Hamb. 19 (1954), 23—40.
- [7] LEPTIN, H.: Linear kompakte Moduln und Ringe. Math. Z. 62 (1955), 241—267.
- [8] LEPTIN, H.: Linear kompakte Moduln und Ringe II, Math. Z. 66 (1957), 289—327.
- [9] WIEGANDT, R.: Über transfinit nilpotente Ringe. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 17 (1966), 101—114.
- [10] ZELINSKY, D.: Linearly compact modules and rings. Amer. J. Math. 75 (1953), 79—90.
- [11] ZELINSKY, D.: Rings with ideal nuclei. Duke Math. J. 18 (1951), 431—442.
- [12] Шнейдмюллер, В. И.: Бесконечные кольца с конечными убывающими цепами подколец, Мат. Сб. Н. С. 27 (62) (1950), 218—228.
- [13] Шнейдмюллер, В. И.: Алгебры бесконечного ранга с условием минимальности для подалгебр, Докл. Акад. Наук СССР 86 (1952), 665—668.

Manuskripteingang: 14. 9. 1972

VERFASSEN:

ALFRED WIDIGER, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

