Beiträge zur Algebra und Geometrie
3 (1974), 131 – 137

Über einige Eigenschaften der Zentralreihe der p-Sylowgruppe der symmetrischen Gruppe vom Grade p^m

LOTHAR TESCHKE

Nach L. KALOUJNINE [1] ist die Nilpotenzklasse der p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}_m$ der symmetrischen Gruppe vom Grade p^m gleich p^{m-1}. In $\mathfrak{P}_m$ fällt die aufsteigende mit der absteigenden Zentralreihe zusammen, so daß wir kurz von der Zentralreihe von $\mathfrak{P}_m$ sprechen wollen. Zur Herleitung einiger Eigenschaften dieser Zentralreihe benutzen wir das in [1] entwickelte Modell für $\mathfrak{P}_m$. Insbesondere werden uns die Ableitungen $\mathfrak{K}_i$ von $\mathfrak{P}_m$ und die Untergruppen $\mho_i$, die aus allen p^i-ten Potenzen der Elemente von $\mathfrak{P}_m$ erzeugt werden, interessieren. Sowohl die $\mathfrak{K}_i$ als auch die $\mho_i$ sind Glieder der Zentralreihe. Es stellt sich heraus, daß $\mathfrak{K}_1$, die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{P}_m$, mit dem Durchschnitt aller maximalen Untergruppen von $\mathfrak{P}_m$, der Φ-Gruppe, zusammenfällt. In Analogie zu der bekannten Tatsache, daß $\mathfrak{K}_{i+1}$ in $\mathfrak{K}_i$ der Normalteiler mit maximaler abelscher Faktorgruppe ist, wird weiter gezeigt, daß $\mho_{i+1}$ in $\mho_i$ der Normalteiler mit maximaler regulärer[1]) Faktorgruppe ist. Die Faktorgruppen $\mathfrak{K}_i/\mathfrak{K}_{i+1}$ und $\mho_i/\mho_{i+1}$ sind alle vom Exponenten p. Damit handelt es sich bei den $\mathfrak{K}_i/\mathfrak{K}_{i+1}$ um elementarabelsche Gruppen. Dagegen sind die $\mho_i/\mho_{i+1}$ im allgemeinen nicht abelsch.
Diesen in Teil II hergeleiteten Ergebnissen schicken wir in Teil I einige Resultate aus [1] voraus.
Alle betrachteten Gruppen seien endlich.

I.

Um gewisse spezielle Untergruppen von $\mathfrak{P}_m$ bequem untersuchen zu können, wird in [1] einer solchen Untergruppe $\mathfrak{R}$ ein m-Tupel von nichtnegativen ganzen Zahlen

$$\langle |\mathfrak{R}|_1, |\mathfrak{R}|_2, \dots, |\mathfrak{R}|_m \rangle$$

zugeordnet. Für die Koordinaten $|\mathfrak{R}|_u$ eines solchen m-Tupels, das *Indikatrix* von $\mathfrak{R}$ genannt wird, gilt die Bedingung

$$0 \leqq |\mathfrak{R}|_u \leqq p^{u-1}, \qquad 1 \leqq u \leqq m .$$

---

[1]) Den Terminus „regulär" benutzen wir im Sinne von P. HALL [2].

Eine Untergruppe von $\mathfrak{P}_m$, die sich auf diese Weise beschreiben läßt, wird in [1] als eine „groupe parallélotopique", abgekürzt G. P., bezeichnet.
Eine G. P. $\mathfrak{R}$ ist genau dann in einer G. P. $\mathfrak{S}$ enthalten, wenn

$$|\mathfrak{R}|_u \leqq |\mathfrak{S}|_u\,, \quad 1 \leqq u \leqq m_m\,,$$

erfüllt ist. Weiter soll eine G. P. $\mathfrak{R}$ die *Tiefe* r haben, wenn gilt

$$|\mathfrak{R}|_u = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq u \leqq r \quad \text{und} \quad |\mathfrak{R}|_{r+1} \neq 0\,.$$

Eine G. P. $\mathfrak{R}$ der Tiefe r ist Normalteiler von $\mathfrak{P}_m$ genau dann, wenn

$$|\mathfrak{R}|_u \geqq p^{u-1} - p^r \quad \text{für alle } u \text{ mit} \quad r + 1 \leqq u \leqq m\,.$$

Das Hauptergebnis von [1] ist, daß die Normalteiler unter den G. P. genau die charakteristischen Untergruppen von $\mathfrak{P}_m$ sind.
Ist nun

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{Z}_0 \subset \mathfrak{Z}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{Z}_s \subset \cdots \subset \mathfrak{Z}_{p^{m-1}} = \mathfrak{P}_m$$

die aufsteigende Zentralreihe von $\mathfrak{P}_m$, so ist jedes Glied $\mathfrak{Z}_s$ eine G. P. Für die Indikatrix von $\mathfrak{Z}_s$ gilt

$$|\mathfrak{Z}_s|_u = \max\,(0, p^{u-1} - p^{m-1} + s)\,, \quad 1 \leqq u \leqq m\,, \quad 0 \leqq s \leqq p^{m-1}\,. \tag{1}$$

Die Faktorgruppen $\mathfrak{Z}_s/\mathfrak{Z}_{s-1}$, $1 \leqq s \leqq p^{m-1}$, sind elementarabelsche Gruppen. Sie haben die Ordnung p^t, wobei t die Differenz aus m und der Tiefe von $\mathfrak{Z}_s$ ist. (2)

Bezeichnet man mit $\mathfrak{K}_i$ die i-te Ableitung von $\mathfrak{P}_m$, so ist $\mathfrak{K}_i$ eine G. P. der Tiefe i. Ist $i \geqq 1$, so gilt für deren Indikatrix

$$|\mathfrak{K}_i|_u = p^{u-1} - p^{i-1}\,, \quad i + 1 \leqq u \leqq m\,. \tag{3}$$

Wegen $\mathfrak{K}_{m-1} \neq \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{K}_m = \mathfrak{E}$ folgt daraus sofort, daß $\mathfrak{P}_m$ die Stufe m hat. Für $i = 0$ gilt $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{P}_m$ und

$$|\mathfrak{K}_0|_u = p^{u-1}\,, \quad 1 \leqq u \leqq m\,.$$

Auch $\mho_i = \mho_i(\mathfrak{P}_m)$, nämlich die aus allen p^i-ten Potenzen der Elemente von $\mathfrak{P}_m$ erzeugte Untergruppe, ist eine G. P. der Tiefe i. Für alle i mit $0 \leqq i \leqq m - 1$ gilt für die Indikatrix von $\mho_i$

$$|\mho_i|_u = p^{u-1} - p^i + 1\,, \quad i + 1 \leqq u \leqq m\,. \tag{4}$$

Aus der Tatsache, daß $\mathfrak{P}_m$ zwar Elemente der Ordnung p^m, aber keine Elemente größerer Ordnung enthält, folgt außerdem sofort

$$\mho_m = \mathfrak{E}\,. \tag{5}$$

II.

1. Die Untergruppen $\mathfrak{K}_i$ und $\mho_i$ als Glieder der Zentralreihe von $\mathfrak{P}_m$

Schreiben wir (3) und (4) in der Form

$$|\mathfrak{K}_i|_u = \max\,(0, p^{u-1} - p^{i-1})\,, \qquad 1 \leqq u \leqq m\,,$$

bzw.

$$|\mho_i|_u = \max\,(0, p^{u-1} - p^i + 1)\,, \qquad 1 \leqq u \leqq m\,,$$

so erkennen wir mittels (1), daß sowohl die $\mathfrak{K}_i$ als auch die $\mho_i$ Glieder der Zentralreihe von $\mathfrak{P}_m$ sind, und zwar gilt

$$\mathfrak{K}_i = \mathfrak{Z}_{p^{m-1} - p^{i-1}}\,, \quad 1 \leqq i \leqq m\,, \tag{6}$$

dazu wie üblich $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{P}_m = \mathfrak{Z}_{p^{m-1}}$, sowie

$$\mathfrak{U}_i = \mathfrak{Z}_{p^{m-1}-p^{i+1}}, \quad 0 \leqq i \leqq m-1, \tag{7}$$

und außerdem nach (5) $\mathfrak{U}_m = \mathfrak{E} = \mathfrak{Z}_0$.

Daraus ergeben sich folgende Eigenschaften:

a) $\mathfrak{U}_i \subseteqq \mathfrak{K}_i, \quad 1 \leqq i \leqq m-1$.

Unter Beachtung von $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{K}_0 = \mathfrak{P}_m$ und $\mathfrak{U}_m = \mathfrak{K}_m = \mathfrak{E}$ ist diese Inklusion auch für $0 \leqq i \leqq m$ richtig.
Es gilt sogar

$$\mathfrak{U}_i \subset \mathfrak{K}_i, \quad 1 \leqq i \leqq m-1,$$

abgesehen von dem Fall $p = 2$, $i = 1$, in welchem $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{K}_1$ ist.

b) $\mathfrak{K}_{i+1} \subset \mathfrak{U}_i, \quad 0 \leqq i \leqq m-1$.

$\mathfrak{K}_{i+1}$ und $\mathfrak{U}_i$ sind, wie (6) und (7) zeigen, Glieder der Zentralreihe von $\mathfrak{P}_m$, die unmittelbar aufeinanderfolgen. Da $\mathfrak{U}_i$ die Tiefe i, $\mathfrak{K}_{i+1}$ aber die Tiefe $i+1$ hat, ist $\mathfrak{U}_i$ das erste Glied der Zentralreihe mit der Tiefe i. Deshalb haben nach (2) genau die Faktorgruppen aufeinanderfolgender Glieder der Zentralreihe, die sich zwischen $\mathfrak{K}_{i+1}$ und $\mathfrak{K}_i$ bilden lassen, die Ordnung p^{m-i}.
Oder:
Die Ableitungen $\mathfrak{K}_i$ von $\mathfrak{P}_m$, $1 \leqq i \leqq m-1$, sind genau diejenigen Glieder $\mathfrak{Z}_s$ der Zentralreihe, für die

$$(\mathfrak{Z}_s : \mathfrak{Z}_{s-1}) \neq (\mathfrak{Z}_{s+i} : \mathfrak{Z}_s)$$

gilt:

$$\underbrace{\cdots}_{p^{m-i-1}} \mathfrak{K}_{i+1} \underbrace{\subset}_{p^{m-i}} \Omega_i \underbrace{\subset \cdots}_{p^{m-i}\cdots} \underbrace{\subset}_{p^{m-i}} \mathfrak{K}_i \underbrace{\subset}_{p^{m-i+1}} \Omega_{i-1} \subset \cdots .$$

2. Φ-Gruppe und Kommutatorgruppe von $\mathfrak{P}_m$

Unter der Φ-Gruppe einer endlichen Gruppe, die verschieden von $\mathfrak{E}$ ist, versteht man bekanntlich den Durchschnitt ihrer maximalen Untergruppen. In einer p-Gruppe ist die Kommutatorgruppe stets in der Φ-Gruppe enthalten ([3], S. 204).
Die Kommutatorgruppe einer beliebigen Gruppe ist der Normalteiler mit maximaler abelscher Faktorgruppe, in einer p-Gruppe ist die Φ-Gruppe der Normalteiler mit maximaler elementarabelscher Faktorgruppe.
In $\mathfrak{P}_m$ gilt nun

Satz 1. *In $\mathfrak{P}_m$ fällt die Kommutatorgruppe mit der Φ-Gruppe zusammen.*

Beweis. Nach 1b) ist die Kommutatorgruppe (oder erste Ableitung) $\mathfrak{K}_1$ von $\mathfrak{P}_m$ das vorletzte Glied der aufsteigenden Zentralreihe von $\mathfrak{P}_m = \mathfrak{U}_0$. Deshalb ist $\mathfrak{P}_m/\mathfrak{K}_1$ nach (2) elementarabelsch, was das Zusammenfallen von $\mathfrak{K}_1$ mit der Φ-Gruppe von $\mathfrak{P}_m$ nach sich zieht, q.e.d.

Folgerungen.

1. Der Index der Kommutatorgruppe in $\mathfrak{P}_m$ ist gleich p^m. (Dies folgt aus den Betrachtungen in 1b) für $i = 0$.)

2. In $\mathfrak{P}_m$ gibt es genau $\dfrac{p^m - 1}{p - 1}$ maximale Untegruppen (oder Normalteiler vom Index p).

3. In $\mathfrak{P}_m$ gibt es genau $\dfrac{(p^{m-1} - 1)(p^m - 1)}{(p - 1)(p^2 - 1)}$ Normalteiler vom Index p^2.

3. Abelsche und reguläre Faktorgruppen aus Gliedern der Zentralreihe von $\mathfrak{P}_m$

Da $\mathfrak{K}_{i+1}$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{K}_i$ ist, ist offenbar $\mathfrak{K}_{i+1}$ in $\mathfrak{K}_i$ der Normalteiler mit maximaler *abelscher* Faktorgruppe, $0 \leqq i \leqq m - 1$.
Eine analoge Aussage läßt sich nun für die Normalteiler $\mho_i$ herleiten, falls man entsprechende reguläre Faktorgruppen betrachtet. Es gilt nämlich

Satz 2. *$\mho_{i+1}$ ist in $\mho_i$ der Normalteiler mit maximaler regulärer Faktorgruppe,* $0 \leqq i \leqq m - 1$.

Dem Beweis des Satzes schicken wir einige allgemeine Betrachtungen über p-Gruppen voraus:

Satz 3. *Sei $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe, die sich durch Elemente der Ordnung p erzeugen läßt. Genau dann ist $\mathfrak{G}$ regulär, wenn $\mathfrak{G}$ vom Exponenten p ist.*

Beweis. Zunächst ist jede p-Gruppe vom Exponenten p trivialerweise regulär. Sei nun $\mathfrak{G}$ regulär. Dann ist in $\mathfrak{G}$ die Ordnung eines Produktes nicht größer als das Maximum der Ordnungen seiner Faktoren ([3], S. 235). Da sich $\mathfrak{G}$ durch Elemente der Ordnung p erzeugen läßt, kann infolgedessen jedes Element von $\mathfrak{G}$ höchstens die Ordnung p haben, womit $\mathfrak{G}$ vom Exponenten p sein muß, q.e.d.

Der Beweis zu Satz 3 zeigt uns übrigens noch, daß folgende allgemeine Aussage gilt:

Eine reguläre p-Gruppe, die sich durch Elemente der Ordnung p^s erzeugen läßt, ist vom Exponenten p^s, $s \geqq 0$.

In einer p-Gruppe $\mathfrak{G}$ sei $\mho_i(\mathfrak{G})$ diejenige Untergruppe, die von allen p^i-ten Potenzen der Elemente von $\mathfrak{G}$ erzeugt wird. Die $\mho_i(\mathfrak{G})$ sind vollinvariante Untergruppen von $\mathfrak{G}$.

Folgerung. *Ist $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe, die sich durch Elemente der Ordnung p erzeugen läßt, so ist $\mho_1(\mathfrak{G})$ der Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit maximaler regulärer Faktorgruppe,.*

Beweis. Ist nämlich $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ regulär, so ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, das sich natürlich auch durch Elemente der Ordnung p erzeugen läßt, nach Satz 3 vom Exponenten p. Daraus folgt $(A\mathfrak{N})^p = A^p\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{N}$ und damit $A^p \in \mathfrak{N}$ für alle $A \in \mathfrak{G}$, was $\mho_1(\mathfrak{G}) \subseteqq \mathfrak{N}$ ergibt. Weiter ist $\mathfrak{G}/\mho_1(\mathfrak{G})$ vom Exponenten p, also regulär.

Bemerkung. Läßt sich $\mho_1(\mathfrak{G})$ ebenfalls durch Elemente der Ordnung p erzeugen, so ist also $\mho_1(\mho_1(\mathfrak{G}))$ der Normalteiler von $\mho_1(\mathfrak{G})$ mit maximaler regulärer Faktorgruppe. Es gilt nun

$$\mho_2(\mathfrak{G}) \subseteqq \mho_1(\mho_1(\mathfrak{G}))$$

und allgemein sogar

$$\mho_{i+1}(\mathfrak{G}) \subseteqq \mho_1(\mho_i(\mathfrak{G})) \,. \tag{8}$$

Denn jedes erzeugende Element $a^{p^{i+1}}$ von $\mho_{i+1}(\mathfrak{G})$ ist wegen $a^{p^{i+1}} = (a^{p^i})^p$ p-te Potenz eines Elementes von $\mho_i(\mathfrak{G})$ und damit Element von $\mho_1(\mho_i(\mathfrak{G}))$.

Es wird sich herausstellen, daß für $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_m$ in (8) das Gleichheitszeichen gilt. Zunächst jedoch besteht unsere Aufgabe darin, in $\mathfrak{P}_m$ Untergruppen aufzusuchen, die sich durch Elemente der Ordnung p erzeugen lassen:

Satz 4. *Jede G. P. läßt sich durch Elemente der Ordnung p erzeugen.*

Beweis. (Für die Bezeichnungen siehe [1].) Eine G. P. $\mathfrak{N}$ der Tiefe r enthält die Elemente

$$T_{u,l} = \left[\underbrace{0, \ldots, 0}_{u-1}, x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_{u-1}^{i_{u-1}}, 0, \ldots, 0\right],$$

wobei $i_1, i_2, \ldots, i_{u-1}$ alle Exponentensysteme durchläuft, für die

$$|T_{u,l}|_u = h\left[x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_{u-1}^{i_{u-1}}\right] = l \leqq |\mathfrak{N}|_u, \quad r+1 \leqq u \leqq m,$$

gilt. Mit h wird hierbei die Höhe des entsprechenden Monoms bezeichnet. Alle diese Elemente sind, wie sofort zu sehen ist, von der Ordnung p. Sie bilden ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{N}$; sei nämlich A ein beliebiges Element aus $\mathfrak{N}$, so daß also

$$|A|_u = h\,[a(x_1, x_2, \ldots, x_{u-1})] \leqq |\mathfrak{N}|_u, \quad r+1 \leqq u \leqq m,$$

gilt. Mit

$$A^{(u)} = \left[\underbrace{0, \ldots, 0}_{u-1}, a(x_1, x_2, \ldots, x_{u-1}), 0, \ldots, 0\right], \quad r+1 \leqq u \leqq m,$$

ist dann

$$A = A^{(m)} \cdot A^{(m-1)} \cdots A^{(r+1)}.$$

Gilt ausführlich

$$a(x_1, x_2, \ldots, x_{u-1}) = \sum_{l=1}^{|A|_u} a_{i_1 i_2 \cdots i_{u-1}}\, x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_{u-1}^{i_{u-1}},$$

wobei über die Höhe der Monome in $a(x_1, x_2, \ldots, x_{u-1})$ zu summieren ist, so ergibt sich

$$A^{(u)} = \prod_{l=1}^{|A|_u} T_{u,l}^{a_{i_1 i_2 \cdots i_{u-1}}}, \quad r+1 \leqq u \leqq m,$$

womit alles gezeigt ist, q.e.d.

Folgerungen.

1. Alle Glieder der Zentralreihe und damit auch alle Untergruppen $\mathfrak{K}_i$ und $\mho_i$, $0 \leqq i \leqq m$, von $\mathfrak{P}_m$ lassen sich durch Elemente der Ordnung p erzeugen.
2. Auch $\mathfrak{P}_m$ läßt sich durch Elemente der Ordnung p erzeugen. Da nach Folgerung 1 zu Satz 1 die Ordnung der Faktorgruppe von $\mathfrak{P}_m$ nach der Φ-Gruppe gleich p^m ist, umfaßt ein minimales Erzeugendensystem von $\mathfrak{P}_m$ genau m Elemente.

Bemerkung. Es läßt sich zeigen, daß $\mathfrak{P}_m$ z.B. von den $m-1$ Elementen

$$T_{u,p^{u-1}} = \left[\underbrace{0, \ldots, 0}_{u-1}, x_1^{p-1} x_2^{p-1} \cdots x_{u-1}^{p-1}, 0, \ldots, 0\right], \quad 2 \leqq u \leqq m,$$

und $T_{1,1} = [1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-1}]$ erzeugt wird.

Ein Studium des Beweises von Lemma 18 in [1] ergibt, daß aus $A \in \mathfrak{U}_i$ die Beziehung $A^p \in \mathfrak{U}_{i+1}$ folgt, $0 \leqq i \leqq m-1$. Damit haben wir

Satz 5. *In $\mathfrak{P}_m$ sind die Faktorgruppen $\mathfrak{U}_i/\mathfrak{U}_{i+1}$, $0 \leqq i \leqq m-1$, vom Exponenten p.*

Beweis zu Satz 2. Da sich $\mathfrak{U}_i$ durch Elemente der Ordnung p erzeugen läßt (Folgerung 1 zu Satz 4) und $\mathfrak{U}_i/\mathfrak{U}_{i+1}$ vom Exponenten p ist (Satz 5), ist $\mathfrak{U}_i/\mathfrak{U}_{i+1}$ regulär (Satz 3). Weil weiter $\mathfrak{U}_1(\mathfrak{U}_i(\mathfrak{P}_m))$ der Normalteiler von $\mathfrak{U}_i(\mathfrak{P}_m) = \mathfrak{U}_i$ mit maximaler regulärer Faktorgruppe ist (Folgerung zu Satz 3), gilt $\mathfrak{U}_{i+1} \supseteqq \mathfrak{U}_1(\mathfrak{U}_i(\mathfrak{P}))$. Mit (8) ergibt das $\mathfrak{U}_{i+1} = \mathfrak{U}_1(\mathfrak{U}_i(\mathfrak{P}_m))$, q.e.d.

Schließlich soll geklärt werden, ob

1. die Faktorgruppen $\mathfrak{K}_i/\mathfrak{K}_{i+1}$ vom Exponenten p sind oder nicht,
2. die Faktorgruppen $\mathfrak{U}_i/\mathfrak{U}_{i+1}$ abelsch oder nicht abelsch sind.

Sicher ist $\mathfrak{K}_i/\mathfrak{K}_{i+1}$ vom Exponenten p in den Fällen $i = 0$ (wegen Satz 1) und $i = m-1$ (weil $\mathfrak{K}_{m-1}$ von der Tiefe $m-1$ ist). Dies läßt sich aber sogar allgemein zeigen:

Satz 6. *Die Faktorgruppen $\mathfrak{K}_i/\mathfrak{K}_{i+1}$, $0 \leqq i \leqq m-1$, sind vom Exponenten p und damit elementarabelsch.*

Beweis. In Abwandlung des Beweises von Lemma 18 in [1] zeigen wir, daß aus $A \in \mathfrak{K}_i$ die Beziehung $A^p \in \mathfrak{K}_{i+1}$ folgt:
Wegen

$$|\mathfrak{K}_i|_u = \max(0, p^{u-1} - p^{i-1})$$

und

$$|\mathfrak{K}_{i+1}|_u = \max(0, p^{u-1} - p^{i}), \qquad 1 \leqq u \leqq m,$$

ergibt sich aus $A \in \mathfrak{K}_i$ sofort

$$|A|_u = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq u \leqq i$$

und

$$|A|_u \leqq p^{u-1} - p^{i-1} \quad \text{für} \quad i+1 \leqq u \leqq m.$$

Mit $[A]_u = a(X_{u-1})$ aber folgt

$$[A^p]_u = \sum a\left(X_{u-1}^{A^s_{u-1}}\right), \quad 0 \leqq s \leqq p-1. \tag{9}$$

$A^p \in \mathfrak{K}_{i+1}$ ist klar, wenn $|A^p|_u \leqq p^{u-1} - p^i$, $i+2 \leqq u \leqq m$, gezeigt ist.
Zunächst ist das Glied in der $(i+1)$-ten Koordinate von A^p gleich Null, und die Tiefe von A^p ist mindestens $i+1$. Die Monome in (9), die höhenmäßig die Schranke $p^{u-1} - p^i$ übersteigen könnten, können wegen

$$h[x_1^{p-1} \cdots x_{i-1}^{p-1}\, x_i^{p-2}\, x_{i+1}^{p-1} \cdots x_{u-1}^{p-1}] = p^{u-1} - p^{i-1} \tag{10}$$

nur von Monomen in $a(X_{u-1})$ herrühren, die von der Form

$$x_1^{k_1} \cdots x_i^{k_i} x_{i+1}^{p-1} \cdots x_{u-1}^{p-1}, \qquad 0 \leqq k_s \leqq p-1, \qquad k_i < p-1,$$

sind. Wäre nämlich ein Exponent von $x_{i+1}, \dots, x_{u-1}$ kleiner als $p-1$, so wäre die Höhe des Monoms wegen (10) höchstens gleich $p^{u-1} - p^i$. Beim Studium der Glieder, die sich aus diesen Monomen in $[A^p]_u$ ergeben, stellt man jedoch fest, daß sie alle von einer Höhe sind, die höchstens gleich $p^{u-1} - p^i$ ist, q.e.d.

Beim zweiten Problem ist zunächst zu beachten, daß $\mathfrak{U}_i/\mathfrak{U}_{i+1}$ für $i = 0$ nicht abelsch ist, da $\mathfrak{U}_1$ nach 1a) echt in $\mathfrak{K}_1$ enthalten ist, und für $i = m-1$ abelsch ist, da $\mho_{m-1}$ nach (7) mit dem Zentrum $\mathfrak{Z}_1$ von $\mathfrak{P}_m$ übereinstimmt. Für $p > 2$ läßt sich folgende allgemeine Aussage zeigen:

Satz 7. *Die Faktorgruppen* $\mho_i/\mho_{i+1}$, $0 \leqq i \leqq m-2$, *sind für* $p > 2$ *nicht abelsch.*

Beweis. Es genügt, zwei Elemente A und B aus Ω_i anzugeben, für die $ABA^{-1}B^{-1} \notin \mho_{i+1}$ gilt.

Die Elemente

$$A = \left[\underbrace{0, \dots, 0}_{i}, 1, x_{i+1}, 0, \dots 0\right]$$

und

$$B = \left[\underbrace{0, \dots, 0, 0}_{i+1}, x_{i+1}^2, 0, \dots, 0\right]$$

sind nun wegen

$$|A|_{i+2} = h\,[x_{i+1}] = p^i + 1 < |B|_{i+2} = h[x_{i+1}^2] = 2p^i + 1$$

und

$$2p^i + 1 \leqq p^{i+1} - p^i + 1 = |\mho_i|_{i+2}$$

in $\mho_i$ enthalten und haben die gewünschte Eigenschaft. Es gilt nämlich

$$ABA^{-1}B^{-1} = \left[\underbrace{0, \dots, 0, 0,}_{i+1} -2x_{i+1} + 1, 0, \dots, 0\right],$$

wobei $|ABA^{-1}B^{-1}|_{i+2} = h[-2x_{i+1} + 1] = h[x_{i+1}] = p^i + 1$ ist, was wegen $|\mho_{i+1}|_{i+2} = 1$ sofort $ABA^{-1}B^{-1} \notin \mho_{i+1}$ nach sich zieht, q.e.d.

LITERATUR

[1] Kaloujnine, L.: La structure des p-groupes de Sylow des groupes symétriques finis. Ann. Ecole Norm. Sup. (3) *65* (1948), 239–276.

[2] Hall, P.: A contribution to the theory of groups of prime-power order. Proc. London Math. Soc. *36* (1933), 29–95.

[3] Kochendörffer, R.: Lehrbuch der Gruppentheorie unter besonderer Berücksichtigung der endlichen Gruppen. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1966.

Manuskripteingang: 6. 9. 1972

VERFASSER:

Lothar Teschke, Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule Halle