

Werk

Titel: Zur Perfektheit von Determinantenidealen

Autor: EISENREICH, G.

Jahr: 1974

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0003|log10

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Zur Perfektheit von Determinantenidealen

GÜNTHER EISENREICH

1. Zwischen der Höhe h und der Anzahl μ der Erzeugenden eines Ideals $\mathfrak{a}$ in einem Polynomring R über einem Körper (und allgemeiner in einem beliebigen [kommutativen] Ring) besteht stets die Ungleichung

$$\mu \geq h = \text{ht } \mathfrak{a};$$

gilt hierin das Gleichheitszeichen (Fall eines Ideals der Hauptklasse), so ist $\mathfrak{a}$ sogar perfekt, d. h., zwischen homologischer Dimension $\text{hd } \mathfrak{a}$ und Höhe $\text{ht } \mathfrak{a}$ besteht die Beziehung $\text{hd } \mathfrak{a} = \text{ht } \mathfrak{a} - 1$.

Ist $\mathfrak{a}$ k -reihiger Vektormodul über R , d. h. Untermodul der direkten Summe von k Exemplaren R , so gilt allgemein

$$\mu \geq \text{ht } \mathfrak{a} + k - 1.$$

Gilt hierin das Gleichheitszeichen (wir haben derartige Moduln als Hauptklassenmoduln bezeichnet), so ist gleichfalls $\mathfrak{a}$ perfekt [1]. Ordnet man die Basisvektoren von $\mathfrak{a}$ in eine Matrix A an, so kann man A nach MACAULAY das durch $\mathfrak{a}$ eindeutig bestimmte Ideal $|\mathfrak{a}|$ zuordnen, das von den k -reihigen Unterdeterminanten von A erzeugt wird; es hat dieselbe Höhe wie $\mathfrak{a}$ und ist gleichfalls perfekt, wenn es sich bei $\mathfrak{a}$ um einen Hauptklassenmodul handelt.

Diese Ergebnisse legen es nahe, allgemeiner das Ideal $\mathfrak{a}_p$ zu untersuchen, das von den p -reihigen Unterdeterminanten einer (m, n) -Matrix A mit Elementen aus R erzeugt wird. Für dessen Höhe gilt folgende Verallgemeinerung der obigen Ungleichungen:

$$\text{ht } \mathfrak{a}_p \leq (m - p + 1)(n - p + 1).$$

[2].¹⁾ Gleichheit tritt insbesondere dann ein, wenn die Elemente von A lauter verschiedene Unbestimmte sind, und für diesen Fall hat D. W. SHARPE [6]²⁾ bei $p = 2$

¹⁾ Anm. bei der Korrektur: Wie mir erst nach Fertigstellung dieser Arbeit bekannt wurde, haben A. J. EAGON und M. HOCHSTER (Amer. J. Math. 93 (1971), 1020–1058) bewiesen, daß im Fall der Gleichheit das Ideal $\mathfrak{a}_p$ perfekt ist; der Beweis unterscheidet sich jedoch stark von dem hier gegebenen.

²⁾ Da mir nur die Besprechung dieser Arbeit in den Math. Rev. zugänglich war, weiß ich nicht, ob die dortigen Überlegungen (insbesondere die Berechnung der ersten Syzygien) dem folgenden Beweisgang ähneln.

die Perfektheit von α_p nachweisen können. Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, dieses Ergebnis auf beliebige p zu verallgemeinern.

2. Im folgenden bezeichne R einen Polynomring der Form

$$k[y_1, \dots, y_r, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn}]$$

über einem Körper k . A sei eine (m, n) -Matrix mit dem allgemeinen Element x_{ij} , p eine natürliche Zahl mit $p \leq m$, $p \leq n$ und α_p das von den p -reihigen Unterdeterminanten von A in R erzeugte Ideal. Für dessen Höhe gilt dann

$$\text{ht } \alpha_p = (m - p + 1)(n - p + 1)$$

[2]. Um die Perfektheit von α_p nachzuweisen, haben wir zu zeigen, daß seine homologische Dimension

$$\text{hd } \alpha_p = \text{ht } \alpha_p - 1$$

ist.

3. Wir bestimmen zunächst die ersten Syzygien von α_p . Im Grenzfall $p = m$ (bzw. $p = n$) wissen wir (siehe z. B. [3]), daß jede lineare Relation zwischen den p -reihigen Unterdeterminanten von A Linearkombination der Relationen ist, die man durch Entwickeln $(p + 1)$ -reihiger Determinanten mit zwei gleichen Zeilen (bzw. Spalten) erhält. Wir behaupten, daß für beliebiges p gilt:

Eine Basis für die zwischen den p -reihigen Unterdeterminanten von A bestehenden linearen Relationen wird von den Relationen gebildet, die man auf folgende Weise gewinnt:

- a) aus dem Verschwinden von $(p + 1)$ -reihigen Determinanten mit zwei gleichen Zeilen oder Spalten, deren Zeilen bzw. Spalten einer $(p + 1)$ -reihigen Untermatrix von A entnommen sind,
- b) durch Gleichsetzen der Entwicklungen ein und derselben $(p + 1)$ -reihigen Unterdeterminante von A nach zwei verschiedenen Zeilen oder Spalten oder nach einer Zeile und nach einer Spalte.

Insbesondere bilden also die p -reihigen Unterdeterminanten von A eine Minimalbasis von α_p , und die Koeffizienten in jeder zwischen den Erzeugenden von α_p bestehenden linearen Relation sind in dem von $x_{11}, \dots, x_{mn}$ erzeugten Ideal enthalten. Den Beweis dieses Satzes führen wir durch Induktion nach der Größe von A .

4. In dem Grenzfall $p = m$ ist die Behauptung richtig. Im Grenzfall $p = 1$ handelt es sich bei α_p um das von den x_{ij} erzeugte Hauptideal, für das sich bekanntlich alle ersten Syzygien als Linearkombination der trivialen Relationen

$$x_{i'j'} \cdot x_{ij} - x_{ij'} \cdot x_{i'j} = 0$$

ergeben. Für $i = i'$ oder $j = j'$ erhält man diese Relationen nach a) gemäß

$$\begin{vmatrix} x_{ij} & x_{ij'} \\ x_{ij} & x_{ij'} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \begin{vmatrix} x_{ij} & x_{ij} \\ x_{i'j} & x_{i'j} \end{vmatrix} = 0.$$

Für $i \neq i'$, $j \neq j'$ gewinnt man diese Relationen nach b) gemäß

$$\begin{vmatrix} x_{ij} & x_{ij'} \\ x_{i'j} & x_{i'j'} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{ij} & x_{ij'} \\ x_{i'j} & x_{i'j'} \end{vmatrix} = 0,$$

indem man die linke Determinante nach der letzten Zeile und die rechte Determinante nach der ersten Spalte entwickelt.

5. Wir können daher im folgenden $1 < p < m$ annehmen. Die Behauptung sei bereits für kleinere Matrizen als A bewiesen. Wir bezeichnen die p -reihigen Unterdeterminanten von A mit D_i und zeigen, daß man aus einer Relation

$$\sum \lambda_i D_i = 0 \quad (*)$$

mit $\lambda_i \in R$ durch Subtraktion einer Linearkombination von Relationen der Form a) und b) eine lineare Relation zwischen den D_i erhält, in die nur noch solche D_i mit von Null verschiedenen Koeffizienten eingehen, die keine Elemente der ersten Zeile von A enthalten; durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung folgt dann die Behauptung.

6. Wir reduzieren (*) modulo allen Elementen der ersten Zeile von A . Dann entsteht aus (*) die Kongruenz

$$\sum' \lambda_i D_i \equiv 0, \quad (**)$$

wobei der Strich am Summenzeichen andeutet, daß nur noch über diejenigen D_i zu summieren ist, die keine Elemente der ersten Zeile enthalten. Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir, daß (**) Linearkombination von Relationen der Form a) und b) ist. Daher können wir durch Subtraktion einer Linearkombination von Relationen der Form a) und b) von (*) o. B. d. A. annehmen, daß der Koeffizient λ_i derartiger D_i Linearkombination der x_{1j} ist.

Wir greifen jetzt eine der Determinanten D_i heraus, an deren Bildung die erste Zeile von A nicht beteiligt ist; wir wollen sie kurz D nennen. Wenn x_{1j} in einer bei der Bildung von D beteiligten Spalte von A enthalten ist, folgt durch Entwickeln einer durch Rändern aus D hervorgehenden $(p+1)$ -reihigen Determinante mit zwei gleichen Spalten, daß sich $x_{1j} \cdot D$ als Linearkombination p -reihiger Unterdeterminanten darstellen läßt, die Elemente der ersten Zeile von A enthalten. Ist dagegen x_{1j} in keiner bei der Bildung von D beteiligten Spalte enthalten, so gilt dasselbe Ergebnis wie eben, wenn wir modulo einer x_{1j} enthaltenden $(p+1)$ -reihigen Unterdeterminante $\bar{D}$ von A rechnen, die sich durch Rändern von D ergibt. $\bar{D}$ können wir aber durch Entwickeln nach der letzten Zeile als Linearkombination p -reihiger Unterdeterminanten von A darstellen, die sämtlich Elemente der ersten Zeile von A enthalten.

7. Wir dürfen daher annehmen, daß in (*) alle D_i die erste Zeile von A enthalten. Wir verallgemeinern die Behauptung auf den Fall, daß die Elemente der ersten Zeile vom $(v+1)$ -ten an durch Nullen ersetzt sind (wobei natürlich nur nicht identisch verschwindende Determinanten betrachtet werden), und beweisen diese durch Induktion nach v . Indem man $x_{1v} = 0$ setzt und hierauf die Induktionsvoraussetzung anwendet, kann man durch Subtraktion von Relationen der Form a) und b) annehmen, daß der Koeffizient λ_i derjenigen D_i , die nicht x_{1v} in der linken oberen Ecke enthalten, durch x_{1v} teilbar ist. Außerdem darf man annehmen, daß die übrigen λ_i kein x_{1j} mit $j \neq v$ enthalten. Entwickelt man alle D_i nach der v -ten Spalte von A bzw. nach ihrer rechten Spalte, dividiert die Relation durch x_{1v} , wendet hierauf die Induktionsvoraussetzung für $p-1$ an und rändert die hierbei benötigten p -reihigen Determinanten mit der x_{1v} enthaltenden Zeile und Spalte, so erkennt man, daß man o. B. d. A. annehmen kann, daß kein D_i das Element x_{1v} in der linken oberen Ecke enthält und daß alle λ_i durch x_{1v} teilbar sind. Durch Iteration des Verfahrens folgt, daß sich λ_i zu 0 machen läßt. Damit ist der Satz bewiesen.

8. Neben dem von den p -reihigen Unterdeterminanten der Matrix A erzeugten Ideal haben wir noch Unterideale zu betrachten, die nur von solchen Unterdeterminanten erzeugt werden, die gewisse Elemente von A nicht enthalten. Wir führen dazu die folgenden Bezeichnungen ein. Für die aus A durch Streichen der ersten σ Zeilen und τ Spalten hervorgehende Untermatrix schreiben wir $A^{(m-\sigma, n-\tau)}$, so daß also $A = A^{(m, n)}$ wird. $\alpha_p^{(r, s)}$ sei das von den p -reihigen Unterdeterminanten von $A^{(r, s)}$ erzeugte Ideal. Dann ist $\mathfrak{b}_\tau = \alpha_p^{(m-1, n)} + \alpha_p^{(m, n-\tau)}$ dasjenige Ideal, dessen Erzeugenden diejenigen Unterdeterminanten von A sind, die keines der Elemente $x_{11}, \dots, x_{1\tau}$ enthalten, die also in das Schema passen, das man aus A erhält, indem man links oben eine $(1, \tau)$ -Matrix ausschneidet.

Insbesondere ist $\mathfrak{b}_\tau: (x) = \mathfrak{b}_\tau$, wenn x eine Unbestimmte ist, die nicht in die erzeugenden Determinanten von $\mathfrak{b}_\tau$ eingeht.

9. Es ist $\mathfrak{b}_\tau \subset \mathfrak{b}_{\tau-1}$. Der Faktormodul $\mathfrak{b}_{\tau-1}/\mathfrak{b}_\tau$ läßt sich von den Restklassen zu $\mathfrak{b}_{\tau-1}$ gehöriger p -reihiger Unterdeterminanten von A erzeugen, die in der linken oberen Ecke das Element $x_{1\tau}$ enthalten. Diese lassen sich eineindeutig den $(p-1)$ -reihigen Unterdeterminanten von $A^{(m-1, n-\tau)}$ zuordnen, die ihrerseits $\alpha_{p-1}^{(m-1, n-\tau)}$ erzeugen. Wir definieren daher einen Homomorphismus φ von $\alpha_{p-1}^{(m-1, n-\tau)}$ auf $\mathfrak{b}_{\tau-1}/\mathfrak{b}_\tau$, indem wir jeder $(p-1)$ -reihigen Unterdeterminante $D_i^{(0)}$ von $A^{(m-1, n-\tau)}$ die Restklasse der durch Rändern eindeutig bestimmten p -reihigen Unterdeterminante D_i aus $\alpha^{(m-1, n)} + \alpha^{(m, n-\tau+1)}$ zuordnen, die $x_{1\tau}$ in der linken oberen Ecke enthält, und diese Abbildung linear auf ganz $\alpha_{p-1}^{(m-1, n-\tau)}$ fortsetzen. Um zu zeigen, daß dadurch wirklich in eindeutiger Weise ein Homomorphismus erklärt ist, müssen wir beweisen, daß aus einer Relation

$$\sum \lambda_i D_i^{(0)} = 0 \quad (*)$$

die Relation

$$\sum \lambda_i D_i \in \alpha^{(m-1, n)} + \alpha^{(m, n-\tau)} \quad (**)$$

folgt. Nun ist jede Relation (*) Linearkombination der trivialen Relationen, die durch a) oder b) gegeben werden. Rändern wir die hierbei benötigten p -reihigen Matrizen zu $(p+1)$ -reihigen Matrizen, die $x_{1\tau}$ enthalten, und entwickeln nach denselben Zeilen oder Spalten wie vorher, so erhalten wir die Behauptung (**).

10. Die Surjektivität von φ ist evident. Wir wollen den Kern von φ bestimmen. Wie man durch Rändern sofort erkennt, gehört $\alpha_p^{(m-1, n)} + \alpha_p^{(m, n-\tau)} = \mathfrak{b}_\tau$ zum Kern. Für $\sum \lambda_i D_i^{(0)}$ möge jetzt

$$\sum \lambda_i D_i \in \mathfrak{b}_\tau$$

gelten. Dann muß sich diese Relation als Linearkombination von Relationen der Form a) und b) darstellen lassen. Indem man die hierbei möglichen Fälle durchgeht und die hieran beteiligten $(p+1)$ -reihigen Determinanten erst nach der jeweiligen $x_{1\tau}$ enthaltenden Zeile bzw. Spalte entwickelt, erkennt man, daß in jedem Falle

$$x_{1\tau} \sum \lambda_i D_i^{(0)} \in x_{1\tau} \cdot \mathfrak{b}_\tau + \mathfrak{b}_\tau$$

sein muß. Nach Nr. 8 ist dann aber bereits

$$\sum \lambda_i D_i^{(0)} \in \mathfrak{b}_\tau.$$

Wir bekommen also die Isomorphie

$$\mathfrak{b}_{\tau-1}/\mathfrak{b}_{\tau} \cong \mathfrak{a}_{p-1}^{(m-1, n-\tau)} / \mathfrak{b}_{\tau}.$$

Insbesondere ist $\mathfrak{b}_{n-p+1} = \mathfrak{a}_p^{(m-1, n)}$ und $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a}_p^{(m, n)}$.

11. Wir behaupten jetzt:

Das von den p -reihigen Unterdeterminanten der Matrix A erzeugte Ideal $\mathfrak{a}_p$ ist stets perfekt.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach m . Im Grenzfall $m = p$ ist die Aussage richtig wegen der Perfektheit des Macaulayschen Ideals eines Hauptklassenmoduls; im Grenzfall $p = 1$ handelt es sich bei $\mathfrak{a}_p$ um ein Hauptklassenideal, das perfekt ist. Wir dürfen daher im folgenden annehmen, daß $p \geq 2$ und $p < m$ ist und daß die Behauptung für alle Matrizen kleinerer Zeilenzahl als m richtig ist.

Wegen der allgemeinen Ungleichung

$$\text{hd } \mathfrak{a} \geq \text{ht } \mathfrak{a} - 1$$

haben wir nur zu zeigen, daß $\text{hd } \mathfrak{a}_p \leq \text{ht } \mathfrak{a}_p - 1$, also $< (m - p + 1)(n - p + 1)$ ist. Das ist gleichbedeutend mit der Aussage $\text{Ext}^k(\mathfrak{a}_p, M) = 0$ für $k = (m - p + 1) \times (n - p + 1)$ und alle R -Moduln M .

12. Führen wir für den Faktormodul $\mathfrak{b}_{\tau-1}/\mathfrak{b}_{\tau}$ die Abkürzung $C_{\tau-1}$ ein, so können wir nach dem Ergebnis von Nr. 10 die folgenden exakten Sequenzen aufschreiben:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathfrak{b}_1 \rightarrow \mathfrak{a}_p^{(m, n)} \rightarrow C_0 \rightarrow 0, & \quad 0 \rightarrow \mathfrak{b}_1 \rightarrow \mathfrak{a}_{p-1}^{(m-1, n-1)} \rightarrow C_0 \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathfrak{b}_2 \rightarrow \mathfrak{b}_1 \rightarrow C_1 \rightarrow 0, & \quad 0 \rightarrow \mathfrak{b}_2 \rightarrow \mathfrak{a}_{p-1}^{(m-1, n-2)} \rightarrow C_1 \rightarrow 0, \\ \dots & \quad \dots \\ 0 \rightarrow \mathfrak{b}_{n-p} \rightarrow \mathfrak{b}_{n-p-1} \rightarrow C_{n-p-1} \rightarrow 0, & \quad 0 \rightarrow \mathfrak{b}_{n-p} \rightarrow \mathfrak{a}_{p-1}^{(m-1, p)} \rightarrow C_{n-p-1} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathfrak{a}_p^{(m-1, n)} \rightarrow \mathfrak{b}_{n-p} \rightarrow C_{n-p} \rightarrow 0, & \quad 0 \rightarrow \mathfrak{a}_p^{(m-1, n)} \rightarrow \mathfrak{a}_{p-1}^{(m-1, p-1)} \rightarrow C_{n-p} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich für einen beliebigen R -Modul M die exakten Ext-Sequenzen:

$$\begin{aligned} \text{Ext}^k(C_0, M) \rightarrow \text{Ext}^k(\mathfrak{a}_p^{(m, n)}, M) \rightarrow \text{Ext}^k(\mathfrak{b}_1, M), \\ \text{Ext}^{k-1}(\mathfrak{b}_1, M) \rightarrow \text{Ext}^k(C_0, M) \rightarrow \text{Ext}^k(\mathfrak{a}_{p-1}^{(m-1, n-1)}, M), \\ \text{Ext}^{k-1}(C_1, M) \rightarrow \text{Ext}^{k-1}(\mathfrak{b}_1, M) \rightarrow \text{Ext}^{k-1}(\mathfrak{b}_2, M), \\ \text{Ext}^{k-2}(\mathfrak{b}_2, M) \rightarrow \text{Ext}^{k-1}(C_1, M) \rightarrow \text{Ext}^{k-1}(\mathfrak{a}_{p-1}^{(m-1, n-2)}, M), \\ \dots, \\ \text{Ext}^{k-n+p+1}(C_{n-p-1}, M) \rightarrow \text{Ext}^{k-n+p+1}(\mathfrak{b}_{n-p-1}, M) \rightarrow \text{Ext}^{k-n+p+1}(\mathfrak{b}_{n-p}, M), \\ \text{Ext}^{k-n+p}(\mathfrak{b}_{n-p}, M) \rightarrow \text{Ext}^{k-n+p+1}(C_{n-p-1}, M) \rightarrow \text{Ext}^{k-n+p+1}(\mathfrak{a}_{p-1}^{(m-1, p)}, M), \\ \text{Ext}^{k-n+p}(C_{n-p}, M) \rightarrow \text{Ext}^{k-n+p}(\mathfrak{b}_{n-p}, M) \rightarrow \text{Ext}^{k-n+p}(\mathfrak{a}_p^{(m-1, n)}, M), \\ \text{Ext}^{k-n+p-1}(\mathfrak{a}_p^{(m-1, n)}, M) \rightarrow \text{Ext}^{k-n+p}(C_{n-p}, M) \rightarrow \text{Ext}^{k-n+p}(\mathfrak{a}_{p-1}^{(m-1, p-1)}, M). \end{aligned}$$

Setzt man $k = (m - p + 1)(n - p + 1)$, so verschwinden hierin nach Induktionsvoraussetzung alle Ext-Glieder, in denen ein $\mathfrak{a}$ mit dem ersten oberen Index $m - 1$

auftritt. Daraus folgt sukzessive das Verschwinden der übrigen Glieder. Insbesondere ist somit

$$\operatorname{Ext}^k(\mathfrak{a}_p^{(m,n)}, M) = 0$$

für beliebiges M , $\mathfrak{a}_p^{(m,n)}$ also in der Tat perfekt, q. e. d.

LITERATUR

- [1] EISENREICH, G.: Zur Syzygientheorie und Theorie des inversen Systems perfekter Ideale und Vektormoduln in Polynomringen und Stellenringen. S.-ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-naturw. Kl., 109, H. 3 (1970).
- [2] EISENREICH, G.: p -Vektormoduln und Determinantenideale. Math. Nachr. 50 (1971), 69–77.
- [3] GRÖBNER, W.: Moderne algebraische Geometrie. Wien-Innsbruck 1949.
- [4] MACAULAY, F. S.: The Algebraic Theory of Modular Systems. Cambridge 1916.
- [5] MOUNT, K. R.: A remark on determinantal loci. J. London Math. Soc. 42 (1967), 595–598.
- [6] SHARPE, D. W.: On certain ideals defined by matrices. Quart. J. Math. 15 (1964), 155–175.

Manuskripteingang: 8. 6. 1972

VERFASSEN:

GÜNTHER EISENREICH, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig