Beiträge zur Algebra und Geometrie
2 (1974), 27—35

Zur spezialisierungstheoretischen Charakterisierung der Freiheit und φ-Freiheit

Ludwig Stammler

1. Es sei K eine beliebige und $L := k(x) := k(x_1, \ldots, x_n)$ eine endliche[1]) Körpererweiterung eines Körpers k. In den Arbeiten [1]—[5] wurde die Untersuchung von Fragen, die mit der Erweiterung einer Spezialisierung

$$(x) \xrightarrow[k]{} (x') \tag{s}$$

zusammenhängen, zurückgeführt auf Eigenschaften von Stellen φ über k des Körpers L, die zu (s) gehörig sind, d. h. $\varphi(x_i) = x_i'$ $(i = 1, \ldots, n)$ erfüllen. Diese Eigenschaften, die φ-Disjunktheit $K\ \varphi\text{-disj}_{(k)}\ L$ und φ-Freiheit $K\ \varphi\text{-frei}_{(k)}\ L$, sind Abschwächungen der linearen Disjunktheit $K\ \text{ldisj}_{(k)}\ L$ bzw. Freiheit $K\ \text{frei}_{(k)}\ L$ der beiden Körper K, L über k. Man setzt dabei K, die x_i und die x_i' in einem gemeinsamen (nötigenfalls algebraisch abgeschlossen gedachten) Oberkörper voraus, in dem dann Bildungen wie $K \cdot L$, $K[x']$, $\bar{k}$ zu verstehen sind.

Die genannten Eigenschaften dienten in [5] und sinngemäß bereits in [2]—[4] als „Obstruktionsmaße" für Spezialisierungserweiterungen. So wurde die (in [4] definierte) φ-Disjunktheit in [5], Lemma 1.2.(1) folgendermaßen spezialisierungstheoretisch charakterisiert[2]):

---

[1]) Eine Übertragung des Folgenden auf unendliche Körpererweiterungen L ist möglich (vgl. lediglich S. 31, Anm. 3); wir wählen die obige Einschränkung um einer mehr „geometrischen" Ausdrucksweise willen.

[2]) Genauer: Nicht die $\hat{\varphi}$-Disjunktheit bezüglich eines vorgegebenen $\hat{\varphi}$ wird charakterisiert, sondern die Existenz einer zu (s) gehörigen Stelle $\hat{\varphi}$, bezüglich deren $\hat{\varphi}$-Disjunktheit vorliegt.

Genau dann ist (s) zu

$$(x) \xrightarrow[K]{} (x') \tag{S}$$

fortsetzbar, wenn eine zu (s) gehörige Stelle $\hat{\varphi}$ mit K $\hat{\varphi}$-disj$_{(k)}$ L existiert.
Wir fragen, ob es eine ähnlich lautende spezialisierungstheoretische Charakterisierung der φ-Freiheit gibt. (Siehe Abschnitt 3., Satz ($\mathfrak{C}_2$).)
Die formal hierzu in [5], Lemma 1.1.(2) vorliegende Antwort (siehe 2.5.2. ($\mathfrak{C}_1$ $\mathfrak{K}_\varphi$)) stellt nicht die gewünschte entsprechende Aussage dar, da in ihr noch die Rolle des dort vorkommenden Körpers K' zu klären ist. (Siehe 6.2.). Hierbei und bei der Betrachtung weiterer mit unserer Frage zusammenhängender *Ansätze aus* [2]—[5] ergeben sich *auch zu diesen einige „Obstruktions“ aussagen.* (Siehe Abschnitt 2.5. und dazu Abschnitt 6.) Man betrachtet in diesen Ansätzen den Übergang

von (x) zu einem über k äquivalenten Punkt $(\bar{x})$, $\mathfrak{C}_1$
von (x') zu einem über k äquivalenten Punkt (x''), $\mathfrak{C}_2$
von K zu einem über k isomorphen Körper K'. $\mathfrak{K}$

Die Bezeichnungen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ stammen aus [5], wo z. B. $\mathfrak{C}_1(x \to x')$ die Klasse aller Spezialisierungen $(\bar{x}) \xrightarrow[k]{} (x')$ mit zu (x) über k äquivalentem $(\bar{x})$ bezeichnete. Werden beide Übergänge $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ zugelassen, so erhalten wir die Klasse $\mathfrak{C}_{12}(x \to x')$ aller entstehenden Spezialisierungen $(\bar{x}) \xrightarrow[k]{} (x'')$. Der Übergang $\mathfrak{K}$ soll nicht nur in Spezialisierungen (S), sondern auch in Eigenschaften, z. B. der φ-Freiheit, vorgenommen werden, was wir durch die Bezeichnungen $\mathfrak{K}_S$ bzw. $\mathfrak{K}_\varphi$ andeuten. Ferner betrachtet man „Obstruktions“fragen bei der

Bildung zusammengesetzter Punkte wie etwa (x', y') $\mathfrak{Z}$

in Spezialisierungen, wobei

$$(y) \xrightarrow[k]{} (y') \tag{$\tilde{s}$}$$

eine weitere, außer (s) gegebene Spezialisierung ist.
Schließlich werden sich unsere Überlegungen zur φ-Freiheit auch in Verbindung bringen lassen mit (aus [1] und [3] im wesentlichen bekannten) *spezialisierungstheoretischen Charakterisierungen der Freiheit.* (Siehe Abschnitt 7.)

2. Zur Vorbereitung stellen wir die Definition der φ-Freiheit und einige aus [1]—[5] entnommene Aussagen über Freiheit und φ-Freiheit im Rahmen unserer Fragestellung zusammen.

2.1. Das Bestehen von K φ-frei$_{(k)}$ L ist folgendermaßen *definiert* (vgl. [3], Def. 2): Ist $\mathfrak{v}\,(\subseteqq L)$ der Bewertungsring von φ, so existiert eine Transzendenzbasis $\mathfrak{M}$ von K über k derart, daß $\varphi \mid \mathfrak{v}$ *zu einem Homomorphismus* μ *von* $\mathfrak{v}[\mathfrak{M}]$ *fortgesetzt werden kann, für den* $\mu \mid k[\mathfrak{M}]$ *ein Isomorphismus ist.* Man zeigt (vgl.

das Zitat in [3], S. 272, Z. 11, 12), daß dann zu jeder Transzendenzbasis $\mathfrak{M}$ von K über k ein derartiger Homomorphismus μ existiert.

2.2. *Ist* K frei$_{(k)}$ L, *so gilt für jede Stelle* φ *von* L *über* k *auch* K φ-frei$_{(k)}$ L (vgl. [3], S. 272, Z. 5, 6). *Dieser Satz ist umkehrbar.* Zwar kann man nicht aus der Existenz einer Stelle φ mit K φ-frei$_{(k)}$ L auf K frei$_{(k)}$ L schließen (um dies zu sehen, wähle man etwa $K = L$ transzendent über k und φ als Identität). Wohl aber besteht nach dem Korollar aus [3] die Äquivalenz

$$K \text{ frei}_{(k)}\, L \Leftrightarrow \textit{Es gibt eine } \bar{k}\textit{-bewertete Stelle } \varphi \textit{ von } L \textit{ über } k \textit{ mit } K\ \varphi\text{-frei}_{(k)}\, L, \tag{φ_{f}}$$

und da für jedes $L \supseteqq k$ nach dem Fundamentalsatz der Stellentheorie gewiß $\bar{k}$-bewertete Stellen existieren, folgt die behauptete Umkehrung.

2.3. Nach [1] gilt sogar

$$K \text{ frei}_{(k)}\, L \Leftrightarrow \textit{Es gibt eine } \bar{k}\textit{-bewertete Stelle } \hat{\varphi} \textit{ von } L \textit{ über } k \textit{ mit } K\ \hat{\varphi}\text{-disj}_{(k)}\, L. \tag{$\hat{\varphi}_{\mathrm{d}}$}$$

2.4. Die in Abschnitt 2.1. genannte Unabhängigkeit von $\mathfrak{M}$ besteht auch hinsichtlich der Freiheitsdefinition (Forderung, jede Transzendenzbasis von K über k solle über L algebraisch unabhängig bleiben); d. h., es gilt der

Hilfssatz. *Existiert eine Transzendenzbasis* $\mathfrak{M}$ *von* K *über* k, *die über* L *algebraisch unabhängig bleibt, so ist* K frei$_{(k)}$ L.
Der Beweis kann mit Hilfe des Steinitzschen Austauschsatzes geführt werden: Sind irgendwelche $a_\alpha \in K$ ($\alpha = 1, \ldots, m$) über k algebraisch unabhängig, so sind sie zur endlichen Erzeugung von (einem $E \subseteqq K$ über k, also auch von) $E \cdot L$ über L austauschbar gegen m geeignete $t_\beta \in \mathfrak{M}$ ($\beta = 1, \ldots, m$) und daher wie diese algebraisch unabhängig über L.
Man kann den Beweis auch (um ihn direkt auf die in 2.1. genannte Unabhängigkeit zurückzuführen) der in [1], S. 272, B angegebenen Konstruktion eines Homomorphismus $\mathfrak{v}[\mathfrak{M}] \to \bar{k}[\mathfrak{M}]$ entnehmen. Sie war dort auf die Voraussetzung K frei$_{(k)}$ L gegründet und ergab (wenn man als eingangs zu wählenden Automorphismus j von k die Identität wählt) den Schluß „$\Rightarrow$" in (φ_f)[1]). Sie wird aber bereits ebenso ermöglicht durch die hier im Hilfssatz über $\mathfrak{M}$ gemachte Voraussetzung; diese impliziert demnach gleichfalls K φ-frei$_{(k)}$ L und damit (Schluß „$\Leftarrow$" in (φ_{f})) die Behauptung K frei$_{(k)}$ L.

2.5. Wir entnehmen nun [2]—[5] die sechs in Abschnitt 2.5.2. folgenden einzelnen „obstruktions"artigen Zusammenhänge zwischen φ-Freiheit bzw. Freiheit und Spezialisierungserweiterung.

---

[1]) sowie — was wir hier nicht benötigen — nach weiteren Konstruktionen den Schluß „$\Rightarrow$" in ($\hat{\varphi}_{\mathrm{d}}$).

2.5.1. Dabei wie auch im weiteren Verlauf sei stets (s), $(\tilde{\mathrm{s}})$ vorausgesetzt; *mit* φ, χ *seien stets zu* (s) *bzw.* $(\tilde{\mathrm{s}})$ *gehörige Stellen von* L *bzw.* $\tilde{L} := k(y)$ *über* k *bezeichnet;* $(\bar{x})$, (x''), K' *sollen stets die in* $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{K}$ *genannte Bedeutung haben, Analoges gelte für* $(\bar{y})$, (y''); bei vorliegender Stelle φ bezeichne $\mathfrak{v}$ stets ihren Bewertungsring; $\mathfrak{M}$ sei eine Transzendenzbasis von K über k.

2.5.2. Die zu betrachtenden Aussagen aus [2]—[5] lauten:

($\mathfrak{C}_1\ \mathfrak{K}_S$) *Gibt es* φ *mit* K φ-frei$_{(k)}$ L, *so existieren* K' *und* $(\bar{x})$ *mit* $(\bar{x}) \xrightarrow[K']{} (x')$.

($\mathfrak{C}_1$) *Gilt* K frei$_{(k)}$ L, *so existiert* $(\bar{x})$ *mit* $(\bar{x}) \xrightarrow[K]{} (x')$.

($\mathfrak{C}_{12}$) *Gibt es* φ *mit* K φ-frei$_{(k)}$ L, *so existieren* $(\bar{x})$ *und* (x'') *mit* $(\bar{x}) \xrightarrow[K]{} (x'')$.

($\mathfrak{C}_1\ \mathfrak{K}_\varphi$) *Genau dann, wenn es* K' *und* φ *mit* K' φ-frei$_{(k)}$ L *gibt, existiert* $(\bar{x})$ *mit* $(\bar{x}) \xrightarrow[K]{} (x')$.

($\mathfrak{C}_{12}\ \mathfrak{K}_S\ \mathfrak{Z}$) *Gibt es* φ, χ *mit* K φ-frei$_{(k)}$ L *und* K χ-frei$_{(k)}$ $\tilde{L}$, *so existieren* K', $(\bar{x})$, $(\bar{y})$, (y'') *mit* $(\bar{x}, \bar{y}) \xrightarrow[K']{} (x', y'')$.

($\mathfrak{C}_{12}\ \mathfrak{Z}$) *Gibt es* φ, χ *mit* K φ-frei$_{(k)}$ L *und* K χ-frei$_{(k)}$ $\tilde{L}$, *so existieren* $(\bar{x})$, $(\bar{y})$, (x''), (y'') *mit* $(\bar{x}, \bar{y}) \xrightarrow[K]{} (x'', y'')$.

Zu ($\mathfrak{C}_1\ \mathfrak{K}_S$) siehe [3], S. 273, Z. 10 v. u. ff., insbesondere Z. 6 v. u. ff.
Zu ($\mathfrak{C}_1$) siehe [4], S. 49, Z. 18ff. Beide Aussagen verschärfen [2], Satz C, wo von K frei$_{(k)}$ L auf $(\bar{x}) \xrightarrow[K']{} (x')$ geschlossen wurde.
Zu ($\mathfrak{C}_{12}$) siehe [5], Lemma 1.1. unter Berücksichtigung von Lemma 1.2.(1).
Zu ($\mathfrak{C}_1\ \mathfrak{K}_\varphi$) siehe zunächst [5], Lemma 1.2.(2); da jedoch der dortige Beweis, S. 268, Z. 9—12, mit speziellem K' argumentiert, beachte auch die unten in den Abschnitten 5.1., 5.3. erhaltenen und in 6.2. zusammengefaßten Ergebnisse.
Zu ($\mathfrak{C}_{12}\ \mathfrak{K}_S\ \mathfrak{Z}$) und ($\mathfrak{C}_{12}\ \mathfrak{Z}$) siehe [5], Satz 1.

2.5.3. Diese sechs Aussagen erscheinen zunächst als in angemessener Weise abgestuft. Jedoch rührt dies, wie sich zeigen wird, zumeist davon her, daß, verglichen mit den tatsächlich vorliegenden Sachverhalten, teils *Voraussetzungen zu stark*, teils *Behauptungen* (*richtig, aber*) *zu schwach* formuliert sind. Wir wollen versuchen, dies zu vermeiden; danach wird sich eine geänderte Beschreibung ergeben, die sogar in mehrfacher Hinsicht einfacher sein wird. (Siehe Abschnitt 6.)
Die in [2]—[5] gegebenen Beweise zu ($\mathfrak{C}_1\ \mathfrak{K}_S$)—($\mathfrak{C}_{12}\ \mathfrak{Z}$) sind aber nach wie vor wegen ihres teilweise „geometrischen“ Charakters sowie vor allem wegen der konstruktiven Elemente in der Gewinnung der behaupteten Spezialisierungsfortsetzungen bedeutsam (siehe z. B. die Bemerkung in 5.3.).

3. Wir behandeln zunächst ($\mathfrak{C}_{12}$) und zeigen: Erstens läßt sich diese Aussage durch Weglassen der Voraussetzung $\mathfrak{C}_1$ verschärfen, und zweitens kann die verschärfte Aussage umgekehrt werden. Damit gelangen wir zu einer Lösung der ersten in Abschnitt 1. gestellten Aufgabe:

($\mathfrak{C}_2$) Satz zur Charakterisierung der φ-Freiheit[1]).

Genau dann, wenn es für einen Körper $K \supseteqq k$ eine zu $(x) \xrightarrow[k]{} (x')$ gehörige Stelle φ mit K φ-frei$_{(k)}$ $k(x)$ gibt, existiert ein zu (x') über k äquivalentes (x'') mit $(x) \xrightarrow[k]{} (x'')$.[2])

Beweis. I. Es gebe φ mit K φ-frei$_{(k)}$ L, also einen $\varphi \mid \mathfrak{v}$ fortsetzenden Homomorphismus μ von $\mathfrak{v}[\mathfrak{M}]$, für den $\mu \mid k[\mathfrak{M}]$ ein Isomorphismus ist. Man kann μ zu einer Stelle Φ von $K(x)$ fortsetzen, und dabei wird auch $\lambda := \Phi \mid K$ ein Isomorphismus, da K algebraisch über $k(\mathfrak{M})$ ist.

Ist $\lambda(K) =: K'$, so kann man (wieder durch geeignete Wahl von Bildern x_i'') den Isomorphismus λ^{-1} fortsetzen zu einem Isomorphismus $\Lambda : K'(x') \xrightarrow[k]{} K(x'')$. Dann ergibt der Isomorphismus $\Lambda \mid k[x']$ die Äquivalenz von (x') mit (x'') über k und der Homomorphismus $\Lambda\,\Phi \mid K[x]$ die Spezialisierung $(x) \xrightarrow[K]{} (x'')$.

II. Es gebe (x'') mit $(x) \xrightarrow[K]{} (x'')$, also eine hierzu gehörige Stelle Θ von $K(x)$ über K sowie einen Isomorphismus $\psi : k[x''] \xrightarrow[k]{} k[x']$ mit $\psi(x_i'') = x_i'$. Ist F der Körper der endlichen Bilder von Θ, so können wir ψ zu einem Isomorphismus Ψ von F fortsetzen sowie noch $\Psi(\infty) := \infty$ definieren. Dann ist $\Phi := \Psi\,\Theta$ eine Stelle von $K(x)$ über k mit $\Phi(x_i) = x_i'$, die (auf K, also erst recht) auf $k[\mathfrak{M}]$ als Isomorphismus wirkt. Definiert man nun $\varphi := \Phi \mid k(x)$, so hat man damit eine zu (s) gehörige Stelle gefunden, und der Homomorphismus $\mu := \Phi \mid \mathfrak{v}[\mathfrak{M}]$ ergibt K φ-frei$_{(k)}$ L.

4. Nun wollen wir die Motive $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{K}$ in den Aussagen aus 2.5.2. untersuchen. Zur Vorbereitung dient das folgende einfache

Lemma. *Zu je zwei Erweiterungskörpern K, L eines Körpers k existiert ein Körper K', der über k zu K isomorph und von L frei ist.*[3])

Beweis. Es seien $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{Q}$ Transzendenzbasen von K bzw. L über k. Man wähle eine zu $\mathfrak{Q}$ elementfremde und mit $\mathfrak{M}$ gleichmächtige Menge $\mathfrak{M}'$ so, daß $\mathfrak{M}' \cup \mathfrak{Q}$ eine Menge unabhängiger Transzendenter über k ist. Dann gibt es einen zu K über k isomorphen Körper $K' \supseteqq k(\mathfrak{M}')$, und dieser erfüllt nach dem in 2.4. genannten Hilfssatz die Behauptung.

---

[1]) Vgl. S. 27, Anm. 2.

[2]) In der 2.5.1. vereinbarten Bezeichnungsweise kurz: *Genau dann, wenn es φ mit K φ-frei$_{(k)}$ L gibt, existiert (x'') mit $(x) \xrightarrow[K]{} (x'')$.*

[3]) Sind K und L in einem Universalkörper Ω enthalten, der über $K \cdot L$ von unendlichem Transzendenzgrad ist, so kann dies auch für $K' \cdot L$ stets dann erreicht werden, wenn wenigstens einer der Körper K, L endlichen Transzendenzgrad über k hat. Bei den von uns betrachteten Erweiterungen $L := k(x)$ ist dies stets der Fall; andernfalls (s. S. 27, Anm. 1) muß man unter Umständen Ω vergrößern.

5. Das Lemma aus 4. hat folgende Konsequenzen:

5.1. *Es gibt K' mit K' φ-frei$_{(k)}$ L.*

Beweis. Siehe den Anfang von 2.2. Die Stelle φ von L ist also sogar beliebig wählbar.

5.2. *Es gibt K' und $(\bar{x})$ mit $(\bar{x}) \xrightarrow[K']{} (x')$.*

Beweis. Man wähle K' frei$_{(k)}$ L und wende $(\mathfrak{C}_1)$ an.

5.3. Dieses Ergebnis und $(\mathfrak{C}_1)$ besitzen als gemeinsame Verschärfung den

Satz über Spezialisierungserweiterung bei geeignetem allgemeinem Punkt. *Für jeden Körper $K \supseteqq k$ und jede Spezialisierung $(x) \xrightarrow[k]{} (x')$ gibt es ein zu (x) über k äquivalentes $(\bar{x})$ mit $(\bar{x}) \xrightarrow[K]{} (x')$.*[1]

Beweis. Nach dem Lemma aus 4. existiert ein Isomorphismus σ von L auf einen Körper L' mit K frei$_{(k)}$ L'. Setzt man $\sigma(x_i) =: \bar{\bar{x}}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, so ist $(\bar{\bar{x}})$ zu (x) äquivalent über k; also gilt $(\bar{\bar{x}}) \xrightarrow[k]{} (x')$, woraus nach $(\mathfrak{C}_1)$ auch $(\bar{x}) \xrightarrow[K]{} (x')$ mit einem zu $(\bar{\bar{x}})$ und somit zu (x) über k äquivalenten $(\bar{x})$ folgt.
In mehr „geometrischer Weise“ läßt sich der Beweis folgendermaßen auf den Zerfall des über k gebildeten Ortes V von (x) zurückführen: Man wählt erst, um den Zerfall in absolute Varietäten zu verwenden, ein zu (x) über k äquivalentes $(\tilde{x})$ mit $(\tilde{x}) \xrightarrow[\bar{k}]{} (x')$ (siehe $(\mathfrak{C}_1)$ mit $\bar{k}$ statt K oder, was dasselbe ist, Satz A aus [2]). Mit Hilfe des Lemmas aus 4. (ebenso wie bei $(\bar{\bar{x}})$ im vorigen Beweis) erhält man dann ein zu $(\tilde{x})$ über $\bar{k}$ äquivalentes $(\bar{x})$ mit $K \cdot \bar{k}$ frei$_{(\bar{k})}$ $\bar{k}(\bar{x})$. Da $\bar{k}(\bar{x})$ über $\bar{k}$ regulär ist, gilt sogar $K \cdot \bar{k}$ ldisj$_{(\bar{k})}$ $\bar{k}(\bar{x})$, also bleibt die Spezialisierung $(\bar{x}) \xrightarrow[\bar{k}]{} (x')$ über $K \cdot \bar{k}$ erhalten.
Zu beiden Beweisvarianten kann man bemerken, daß sie nur eine Zurückführung auf $(\mathfrak{C}_1)$ darstellen. Zur Frage einer konstruktiven Gewinnung von $(\bar{x})$ aus gegebenem (s) und K ziehe man daher die Beweise von $(\mathfrak{C}_1)$ aus [2] und [4] heran.

5.4. Analog gilt der

Satz über Spezialisierungszusammensetzung bei geeignetem allgemeinem Punktepaar. *Für jeden Körper $K \supseteqq k$ und je zwei Spezialisierungen $(x) \xrightarrow[k]{} (x')$, $(y) \xrightarrow[k]{} (y')$ gibt es zu (x) bzw. (y) über k äquivalente $(\bar{x})$, $(\bar{y})$ mit $(\bar{x}, \bar{y}) \xrightarrow[K]{} (x', y')$.*[2]

---

[1] In der 2.5.1. vereinbarten Bezeichnungsweise kurz: *Es gibt $(\bar{x})$ mit $(\bar{x}) \xrightarrow[K]{} (x')$.*

[2] In der 2.5.1. vereinbarten Bezeichnungsweise kurz: *Es gibt $(\bar{x})$, $(\bar{y})$ mit $(\bar{x}, \bar{y}) \xrightarrow[K]{} \xrightarrow[K]{} (x', y')$.*

Beweis. Man wähle zu (x) bzw. (y) über k äquivalente $(\tilde{x})$, $(\tilde{y})$ mit $(\tilde{x}) \xrightarrow[k]{} (x')$, $(\tilde{y}) \xrightarrow[k]{} (y')$ und weiter ein zu $(\tilde{y})$ über $\bar{k}$ äquivalentes $(\tilde{\tilde{y}})$ mit $\bar{k}(\tilde{x})$ $\text{frei}_{(\bar{k})}$ $\bar{k}(\tilde{\tilde{y}})$ (Lemma in 4.). Wieder ist dann sogar $\bar{k}(\tilde{x})$ $\text{ldisj}_{(\bar{k})}$ $\bar{k}(\tilde{\tilde{y}})$; nach [4], Satz 1 folgt hieraus $(\tilde{x}, \tilde{\tilde{y}}) \xrightarrow[k]{} (x', y')$. (Dieser Beweisverlauf, einschließlich des hier als Lemma in 4. formulierten Schlußverfahrens, liegt bereits bei [5], Satz 1 im Beweisteil A vor, der dort den Fall $K = \bar{k}$ behandelt. Zur geometrischen Interpretation vgl. auch die dortige Anm. 7 auf S. 266.) Schließlich findet man wie im vorigen Beweis ein zu $(\tilde{x}, \tilde{\tilde{y}})$ über $\bar{k}$ äquivalentes $(\bar{x}, \bar{y})$ mit $K \cdot \bar{k}$ $\text{frei}_{(\bar{k})}$ $\bar{k}(\bar{x}, \bar{y})$ und daraus die Behauptung.

6. Damit haben wir statt 2.5.2. folgende „Obstruktions"angaben:

6.1. Die Behauptungen vom Typ $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{E}_1$ sind stets, auch *bei Wegfall aller Voraussetzungen* (außer $K \supseteqq k$ und (s)) erfüllt. Insbesondere enthält also die Klasse $\mathfrak{E}_1(x \to x')$ stets (d. h. für jeden Oberkörper K von k) eine auf K erweiterungsfähige Spezialisierung. Die in ($\mathfrak{E}_1$ $\mathfrak{K}_S$), ($\mathfrak{E}_1$), ($\mathfrak{E}_{12}$), ($\mathfrak{E}_{12}$ $\mathfrak{K}_S$ $\mathfrak{Z}$), ($\mathfrak{E}_{12}$ $\mathfrak{Z}$) angegebenen „Obstruktions"voraussetzungen sind somit noch zu stark; eher wäre es gerechtfertigt, nun von „Obstruktion" $= 0$ zu sprechen.

6.2. Aussage ($\mathfrak{E}_1$ $\mathfrak{K}_\varphi$) ist richtig (auch ohne das spezielle K' aus [5], S. 268), aber einfach deswegen, weil sowohl die Existenzaussage für K' $\varphi\text{-frei}_{(k)}$ L (siehe 5.1.) als auch die für $(\bar{x}) \xrightarrow[K]{} (x')$ (siehe 5.3.) stets zutreffen. Als Charakterisierung der φ-Freiheit ist ($\mathfrak{E}_1$ $\mathfrak{K}_\varphi$) daher nicht geeignet.

6.3. Die Aussagen ($\mathfrak{E}_1$ $\mathfrak{K}_S$), ($\mathfrak{E}_1$), ($\mathfrak{E}_{12}$), ($\mathfrak{E}_{12}$ $\mathfrak{K}_S$ $\mathfrak{Z}$), ($\mathfrak{E}_{12}$ $\mathfrak{Z}$) sind *nicht umkehrbar* (und somit ebenfalls keine Charakterisierungen der φ-Freiheit). Denn ihre Behauptungen treffen stets zu (vgl. 6.1.), während die in ihnen vorausgesetzte φ-Freiheit bzw. Freiheit nicht stets vorliegen muß. Dies folgt aus Satz ($\mathfrak{E}_2$) in 3. (sowie aus 2.2.), sobald wir noch nachweisen, daß es K und (s) gibt, zu denen kein (x'') mit $(x) \xrightarrow[K]{} (x'')$ existiert.
Hierzu wähle man $K \supseteqq k(x)$ und (s) so, daß (x') von kleinerer Dimension über k ist als (x). Dann gestattet einerseits (x) über K nur die Spezialisierung $(x) \xrightarrow[K]{} (x)$; andererseits ist jedes zu (x') über k äquivalente (x'') mit (x') gleichdimensional, also von (x) verschieden und erfüllt daher nicht $(x) \xrightarrow[K]{} (x'')$.

6.4. Als Charakterisierung der φ-Freiheit hat sich (statt ($\mathfrak{E}_1$ K_φ)) eine Verschärfung von ($\mathfrak{E}_{12}$), nämlich der Satz ($\mathfrak{E}_2$) in 3. ergeben. Die Existenz eines φ mit K $\varphi\text{-frei}_{(k)}$ L besagt also, daß man über K *von* (x) *aus zwar nicht notwendig zu* (x') *selbst, aber wenigstens zu einem „ebenso speziellen", nämlich mit* (x') *äquivalenten* (x'') *hin* spezialisieren kann.

Die φ-Freiheit erweist sich somit im wesentlichen als ein technisches Hilfsmittel[1]) zur Vermeidung „ungünstiger" Transzendenzbasen von K und L über k (ungünstig in dem Sinne, daß die x_i infolge einer zu starken „Bindung" durch K nicht mehr „genügend weit ins Spezielle hinein beweglich" sind). Und zwar ist die φ-Freiheit der jeweiligen Ausgangsspezialisierung (s) angepaßt, während der globale Charakter der Freiheit als gleichzeitiger Forderung aller φ-Freiheiten (siehe 2.2.) bereits zu weitergehenden Schlüssen führt (siehe 2.3., Aussage ($\hat{\varphi}_d$) und Anm. 1).

7. An das zuletzt Gesagte knüpfen wir noch eine Bemerkung über spezialisierungstheoretische Charakterisierungen der Freiheit an. Man erhält diese, indem man die in den stellentheoretischen Charakterisierungen (φ_f) und ($\hat{\varphi}_d$) auftretenden Stellen φ, $\hat{\varphi}$ als zu Spezialisierungen gehörig auffaßt:
K frei$_{(k)}$ L ist gleichbedeutend sowohl mit der Existenz einer algebraischen Spezialisierung[2]) $(x) \xrightarrow[k]{} (x')$, für die bezüglich einer zugehörigen Stelle φ die *φ-Freiheit* K φ-frei$_{(k)}$ L gilt, als auch mit der Existenz einer algebraischen Spezialisierung $(x) \xrightarrow[k]{} (\hat{x}')$, für die bezüglich einer zugehörigen Stelle $\hat{\varphi}$ die *$\hat{\varphi}$-Disjunktheit* K $\hat{\varphi}$-disj$_{(k)}$ L gilt.
Deutet man die φ-Freiheit nach Satz ($\mathfrak{C}_2$) in Abschnitt 3. und die $\hat{\varphi}$-Disjunktheit nach dem in Abschnitt 1. zitierten Lemma 1.2.(1) aus [5], so erkennt man die beiden spezialisierungstheoretischen Charakterisierungen der Freiheit als tautologische Umformungen ein und desselben Sachverhaltes:
K frei$_{(k)}$ L ist gleichbedeutend damit, daß *ein zu einem algebraischen (x') über k äquivalentes (x'') mit $(x) \xrightarrow[K]{} (x'')$ existiert* (Deutung der φ-Freiheit), und dieser Sachverhalt besagt umgeformt, daß *ein algebraisches $(\hat{x}')$ mit $(x) \xrightarrow[K]{} (\hat{x}')$ existiert* (Deutung der $\hat{\varphi}$-Disjunktheit).

---

[1]) Während die φ-Disjunktheit bereits „echt geometrisch" von Bedeutung ist, nämlich für das Spezialisieren innerhalb der Komponenten, in die V bei Erweiterung von k zu K zerfällt.

[2]) D. h. einer Spezialisierung, für die alle x_i' algebraisch über k sind.

LITERATUR

[1] HERRMANN, M.: Eine Charakterisierung freier Körper durch den Stellenbegriff. Math. Ann. *159* (1965), 271–272.

[2] HERRMANN, M.: Zur algebraischen Theorie der Spezialisierungen. Math. Ann. *166* (1966), 1–7.

[3] HERRMANN, M.: Über Stellenerweiterungen. Math. Ann. *173* (1967), 271–274.

[4] HERRMANN, M.: Zur Erweiterung algebraischer Spezialisierungen. Math. Ann. *179* (1968), 47–52.

[5] HERRMANN, M., und U. STERZ: Über Obstruktionen bei Spezialisierungserweiterungen. Math. Ann. *182* (1969), 263–272.

Manuskripteingang: 11. 8. 1971

VERFASSER:
LUDWIG STAMMLER, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg