Beiträge zur Algebra und Geometrie
2 (1974), 19—25

Der Satz von Kronecker und Perron für Veronesesche Ideale

BODO RENSCHUCH

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

In der KUMMER-Festschrift formuliert KRONECKER ([10], Seite 30; die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit) folgendes: „*Man sieht dabei leicht, dass stets $n + 1$ solcher Werthsysteme ausreichen, damit die hieraus entstehenden Gleichungen $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0, \ldots, \Phi_{n+1} = 0$ die Gesammtresolvente $\Phi = 0$ haben, und es ergiebt sich daher das Resultat, dass der gesammte Inhalt jedes Theilers der Resolvente eines Gleichungssystems für n Grössen z durch ein System von nur $n + 1$ Gleichungen dargestellt, also auch jedes System von beliebig vielen Gleichungen durch ein solches von nur $n + 1$ Gleichungen ersetzt werden kann*“ (zitiert nach dem Originaltext). Dieser Satz wurde geometrisch so interpretiert: *Jede algebraische Mannigfaltigkeit im n-dimensionalen Raum ist Schnitt von höchstens $n + 1$ Hyperflächen*, speziell: *Jede algebraische Kurve im dreidimensionalen Raum ist Schnitt von höchstens vier Flächen.* Diese Aussagen sind *falsch*, wenn man den Begriff *algebraische Mannigfaltigkeit* (bzw. den Begriff *algebraische Kurve*) unter Berücksichtigung von *Multiplizitäten* definiert, insbesondere, wenn man überdies von der eineindeutigen Zuordnung zwischen Polynomidealen und algebraischen Mannigfaltigkeiten ausgeht (vgl. GRÖBNER in [3], Seite 88). Von PERRON wurde in [13], § 2, klargestellt, daß der Kroneckersche Satz nur folgendes aussagt: *Unter den unendlich vielen Idealen mit demselben Nullstellengebilde gibt es wenigstens eines, das eine Basis von höchstens $n + 1$ Polynomen hat* (PERRON verwendet den damals gebräuchlichen Begriff *Null-*

stellenmannigfaltigkeit; zur Definition der Begriffe aus der Idealtheorie sei auf [3], [5], [6] und [14] verwiesen). VAN DER WAERDEN zeigte in [15], daß die Schranke $n+1$ auch noch für H-Ideale aus $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ richtig ist, woraus ihre Gültigkeit auch für den Fall inhomogener Ideale aus $K[x_1, \ldots, x_n]$ gesichert ist (vgl. [11]; dort auch Widerlegung eines angeblichen Gegenbeispiels von VAHLEN). Daneben hat PERRON in [13] einen Beweis des Satzes gegeben. Unter Benutzung des Begriffes *Radikal eines Ideals* läßt sich der Satz wie folgt formulieren und beweisen:

Satz. *Ist* $\mathfrak{a} \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *ein H-Ideal mit* $\mathfrak{a} = (F_1, F_2, \ldots, F_s)$, $s > n+1$, $(F_1, \ldots, F_s)$ *Minimalbasis, so existiert wenigstens ein H-Ideal* $\mathfrak{b} \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *mit* $\mathfrak{b} = (G_1, G_2, \ldots, G_k)$, $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$ *und* $k \leqq n+1$.

Anders formuliert: *In der Klasse aller Ideale mit demselben Radikal existiert wenigstens eines, das eine Minimalbasis aus höchstens* $n+1$ *Formen besitzt.*

Das Radikal $\mathfrak{r} = \sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$ gehört zwar selbst dieser Klasse an, leistet aber im allgemeinen *nicht* das Gewünschte, denn es gibt Primideale $\mathfrak{p}$ (für die stets $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$ ist) mit $k > n+1$, zum Beispiel $\mathfrak{p} = \mathfrak{v}_{23}$ mit $n = 9$, $s = 27$ (Beispiel 4).

Beweis. Sei $\mathfrak{a} = (\bar{\bar{F}}_1, \ldots, \bar{\bar{F}}_s) \subset K[x_0, \ldots, x_n]$, $s > n+1$, $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = d = n - r$ und $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p}_{r1} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{r \cdot s_r} \frown \mathfrak{p}_{r+1 \cdot 1} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{r+1 \cdot s_{r+1}} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{n1} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{n \cdot s_n}$ mit $\operatorname{Dim} \mathfrak{p}_{ik} = n - i$ und den *Grundidealen* (vgl. [14], Seite 7)

$$\mathfrak{g}_r(\sqrt{\mathfrak{a}}) = \mathfrak{p}_{r1} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{r \cdot e_r},$$

$$\mathfrak{g}_{r+i}(\sqrt{\mathfrak{a}}) = \mathfrak{p}_{r1} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{r \cdot s_r} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{r+i \cdot 1} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{r+i \cdot s_i} \quad (i = 1, \ldots, d).$$

Für $\mathfrak{a}$ existiert eine $\mathfrak{a}$-*Schnellbasis* (vgl. [14], Seite 12)

$$\mathfrak{a} = (F_1, \ldots, F_r, \bar{F}_{r+1}, \ldots, \bar{F}_s), \qquad \mathfrak{h} \doteq (F_1, \ldots, F_r),$$
$$\operatorname{Dim} \mathfrak{h} = n - r = d.$$

Dann ist $\sqrt{\mathfrak{h}} \subseteqq \sqrt{\mathfrak{a}}$; gilt das Gleichheitszeichen, so kann $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}$ mit $k = r$ gesetzt werden, und wir sind fertig. — Ist dagegen $\sqrt{\mathfrak{h}} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$, so gilt

$$\sqrt{\mathfrak{h}} = \mathfrak{p}_{r1} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{r \cdot s_r} \frown \mathfrak{b}_r = \mathfrak{g}_r(\sqrt{\mathfrak{a}}) \frown \mathfrak{b}_r \quad \text{mit} \quad \mathfrak{b}_r \neq (1), \quad \mathfrak{b}_r = \sqrt{\mathfrak{b}_r}$$

(d. h., $\mathfrak{b}_r$ ist *semiprim*), $\mathfrak{b}_r$ *ungemischt* und $\operatorname{Dim} \mathfrak{b}_r = n - r = d$.
Wir wählen nun eine Form $F_{r+1} \in \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteqq \mathfrak{g}_r(\sqrt{\mathfrak{a}})$ mit $\mathfrak{b}_r : (F_{r+1}) = \mathfrak{b}_r$.
Dann wird (vgl. [14], (2), (4))

$$\sqrt{(\mathfrak{h}, F_{r+1})} = \sqrt{(\mathfrak{p}_{r1}, F_{r+1})} \frown \cdots \frown \sqrt{(\mathfrak{p}_{r \cdot s_r}, F_{r+1})} \frown \sqrt{(\mathfrak{b}_r, F_{r+1})}$$
$$= \mathfrak{p}_{r1} \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_{r \cdot s_r} \frown \sqrt{(\mathfrak{b}_r, F_{r+1})}.$$

Nach einem Satz von GRÖBNER ([3], Seite 147, 137.13) ist dann $\sqrt{(\mathfrak{b}_r, F_{r+1})}$ ungemischt und $\operatorname{Dim}(\mathfrak{b}_r, F_{r+1}) = d - 1$. Weiter ist $\sqrt{(\mathfrak{h}, F_{r+1})} \subseteqq \sqrt{\mathfrak{a}}$, und im Fall des Gleichheitszeichens sind wir wieder fertig und können $\mathfrak{b} = (\mathfrak{h}, F_{r+1})$ setzen. – Ist dagegen $\sqrt{(\mathfrak{h}, F_{r+1})} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$, so gilt

$$\sqrt{(\mathfrak{h}, F_{r+1})} = \mathfrak{g}_{r+1}(\sqrt{\mathfrak{a}}) \frown \mathfrak{b}_{r+1}$$

mit $\mathfrak{b}_{r+1} \neq (1)$, $\mathfrak{b}_{r+1} = \sqrt{\mathfrak{b}_{r+1}}$, $\mathfrak{b}_{r+1}$ ungemischt und $\operatorname{Dim} \mathfrak{b}_{r+1} = d - 1$.
So fortfahrend, erhalten wir schließlich im ungünstigsten Fall

$$\sqrt{(\mathfrak{h}, F_{r+1}, F_{r+2}, \ldots, F_n)} = \mathfrak{g}_n(\sqrt{\mathfrak{a}}) \frown \mathfrak{b}_n = \sqrt{\mathfrak{a}} \frown \mathfrak{b}_n \text{ mit } n = r + d,$$

$\mathfrak{b}_n \neq (1)$, $\mathfrak{b}_n = \sqrt{\mathfrak{b}_n}$, $\mathfrak{b}_n$ ohne triviale Komponente und $\operatorname{Dim} \mathfrak{b}_n = 0$.
Für den Fall $\sqrt{(\mathfrak{h}, F_{r+1}, F_{r+2}, \ldots, F_n)} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$ wählen wir dann abschließend F_{n+1} mit $F_{n+1} \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{b}_n : (F_{n+1}) = \mathfrak{b}_n$, dann folgt

$$\sqrt{(\mathfrak{h}, F_{r+1}, F_{r+2}, \ldots, F_n, F_{n+1})} = \sqrt{\mathfrak{a}} \frown \mathfrak{b}_{n+1}$$

mit $\mathfrak{b}_{n+1} \neq (1)$, $\mathfrak{b}_{n+1} = \sqrt{\mathfrak{b}_{n+1}}$ und $\operatorname{Dim} \mathfrak{b}_{n+1} = -1$. Dann aber muß

$$\mathfrak{b}_{n+1} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

sein und kann in der Durchschnittsdarstellung weggelassen werden. Mithin ist $\sqrt{(\mathfrak{h}, F_{r+1}, F_{r+2}, \ldots, F_n, F_{n+1})} = \sqrt{\mathfrak{a}}$, also

$$\mathfrak{b} = (\mathfrak{h}, F_{r+1}, \ldots, F_{n+1}) = (F_1, \ldots, F_r, F_{r+1}, \ldots, F_{n+1}), \text{ q. e. d.}$$

Neben einer ringtheoretischen Verallgemeinerung dieses Satzes von FORSTER (vgl. [2]) wurden von verschiedenen Verfassern Untersuchungen zur Verbesserung der Gradschranke $n + 1$ für *ungemischte* Radikale vorgenommen.

Optimal wäre folgendes Ergebnis: Zu pseudogemischten $\mathfrak{a} \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ mit $\operatorname{Dim} \mathfrak{a} = d$, $r = n - d$ existiert $\mathfrak{b} = (F_1, \ldots, F_k)$ mit $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$ und

$$k = r \text{ für } \mathfrak{a} \textit{ pseudogemischt.} \tag{1}$$

Nun hat BUDACH in [1] (Seite 189, Korollar 7.5.3) mit homologischen Methoden gezeigt, daß im dreidimensionalen projektiven Raum eine ungemischte Kurve existiert, die *nicht* als Schnitt zweier Flächen darstellbar ist (also $n = 3$, $d = 1$, $r = 2$, $k \geqq 3$), womit (1) widerlegt worden ist. Die schwächere Forderung

$$k = r \text{ für } \mathfrak{a} \textit{ quasiprimär}, \text{ d. h. } \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p} \textit{ prim}, \tag{2}$$

wurde von HARTSHORNE in [7] durch Angabe eines Beispiels für ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $n = 4$, $d = 2$, $r = 2$, $k = 3$ widerlegt.

Es bleibt also zu wünschen, daß

$$k \leqq r + 1 \text{ für } \mathfrak{a} \textit{ pseudogemischt (also } \sqrt{\mathfrak{a}} \textit{ ungemischt)} \tag{3}$$

gilt; für (3) ist dem Verfasser bisher kein Gegenbeispiel bekannt.[1])
Ist nun $r \geqq 2$, also $1 \leqq n - d - 1$ und $n - d + 1 \leqq 2n - 2d - 1$, so folgt aus (3) die Vermutung von HARTSHORNE:

$$k \leqq 2n - 2d - 1 \tag{4}$$

([8], Seite 126, Problem 5.19).
Ist $d \geqq 1$, also $-1 \leqq -d$ und $n - d + 1 \leqq n$, so folgt aus (3) die Vermutung von M. KNESER:

$$k \leqq n \text{ [2])} \tag{5}$$

(nach einer mündlichen Mitteilung; siehe auch [2], Seite 86).
Für den Fall *gemischter Radikale* wäre (5) *optimal* (man denke an eine Hyperfläche und einen nicht auf ihr liegenden Punkt). Für $n = 3$ wurde (5) von MARTIN KNESER in [9] bewiesen.

Mit dem Gegenbeispiel von HARTSHORNE für (2) im Fall $n = 4$ ist allerdings die Frage, ob $k = 2$ für den „klassischen" Fall $n = 3, d = 1, r = 2, \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p}$ *prim* gilt, noch nicht entschieden; *es ist also noch offen, ob es irreduzible Kurven gibt, die nicht Schnitt zweier Flächen sind.* BUDACH hat in [1] gezeigt, daß die homologischen Methoden bereits bei dem als Gegenbeispiel offenbar unerschöpflichen Macaulayschen imperfekten Primideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$ (für die Bezeichnung siehe [4], [6]) zu keiner Entscheidung führen ([1], Seite 189), was auch von HARTSHORNE erwähnt wird ([8], Seite 125/126, Exercise 5.16).

Auf Anregung von W. VOGEL (Halle) beschäftigen wir uns mit der

Frage. *Ist (2) für alle Veroneseschen Ideale und bestimmte ihrer Projektionen gültig?*

Das Veronesesche Ideal $\mathfrak{v}_{dm} \subset K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ mit $n = -1 + \binom{d+m}{d}$ ist das *Primideal* mit der *allgemeinen Nullstelle* $y_0 = t_0^m$, $y_1 = t_0^{m-1} t_1, \ldots$, $y_{k_1} = t_1^m, \ldots, y_{k_j} = t_j^m, \ldots, y_{k_{d-1}} = t_{d-1}^m, \ldots, y_{n-1} = t_{d-1} t_d^{m-1}, y_n = t_d^m$ und hat

---

1) Auf der Herbstschule 1971 in Ahrenshoop wurden dem Verfasser Gegenbeispiele zu (3) auch für den Fall quasiprimärer Ideale angegeben.

2) Dies wurde inzwischen bewiesen; vgl. EISENBUD, D., and D. G. EVANS jr.: Every algebraic set in n-space is the intersection of n hypersurfaces. Invent. Math. *19* (1973), 107–112.

nach GODDARD und GRÖBNER ([4], Seite 258, III) eine aus $\binom{n+2}{2} - \binom{2m+d}{d}$ *Quadriken* der Form $x_h x_i - x_j x_k$ bestehende Minimalbasis. Sei $y_k = t_0^{i_0} t_1^{i_1} \cdots t_{d-1}^{i_{d-1}} t_d^{i_d}$, $i_0 + i_1 + \cdots + i_{d-1} + i_d = m$, $i_j \geq 0$; dann ist $y_k^m = y_0^{i_0} y_{k_1}^{i_1} \cdots y_{k_{d-1}}^{i_{d-1}} y_n^{i_d}$; also ist

$$F_k = x_0^{i_0} x_{k_1}^{i_1} \cdots x_{k_{d-1}}^{i_{d-1}} x_n^{i_d} - x_k^m \in \mathfrak{v}_{dm} \tag{6}$$

für alle $k \in (0, 1, \ldots, n)$ mit $k \neq 0, k_1, \ldots, k_{d-1}, n$.
Damit erhalten wir $n - d = r$ Formen F_k vom Grad m und $\mathfrak{q} = \bigcup (F_k)$ ist ein H-Ideal der Hauptklasse r mit $\sqrt{\mathfrak{q}} \subseteqq \mathfrak{v}_{dm}$; wegen der Ungemischtheit von Idealen der Hauptklasse ist $\mathfrak{q}$ nicht nur quasiprimär, sondern sogar *primär*. — Für $d = 1$, $k = r = n - 1$ wurde dieser Satz schon von PERRON ([12], Seite 306, 307) mit Gültigkeit des Gleichheitszeichens bewiesen.

Entsprechend kann man für solche Projektionen $\mathfrak{v}_{dm}^{(i)}$ von $\mathfrak{v}_{dm}$ schließen, bei denen $i \neq 0, k_1, \ldots, k_{d-1}, n$ ist. Für $d = 1$ kann im Falle $i = 0$ oder $i = n$ in der allgemeinen Nullstelle ein Faktor gekürzt werden, mithin ist $\mathfrak{v}_{1n}^{(0)} = \mathfrak{v}_{1n}^{(n)} = \mathfrak{v}_{1 \cdot n-1}$. Doch erhält man wegen der konjugierten Nullstellen aus (6) im allgemeinen *keine* vollständigen Schnitte.

Beispiele

1. Das Ideal $\mathfrak{v}_{13}$
Hier ist $y_0 = t_0^3$, $y_1 = t_0^2 t_1$, $y_2 = t_0 t_1^2$, $y_3 = t_1^3$ und

$$\mathfrak{v}_{13} = \mathfrak{J}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = (x_0 x_2 - x_1^2,\ x_0 x_3 - x_1 x_2,\ x_1 x_3 - x_2^2).$$

Dann wird $\mathfrak{q} = (F_1, F_2) = (x_0^2 x_3 - x_1^3,\ x_0 x_3^2 - x_2^3)$ mit $\sqrt{\mathfrak{q}} \subset \mathfrak{v}_{13}$.
Durch Bildung von Eliminationsidealen erhält man ebenfalls $\mathfrak{q}$. Andererseits hat PERRON ([11], Seite 319) ein weiteres Primärideal $\mathfrak{q}_1$ der Hauptklasse 2 mit $\sqrt{\mathfrak{q}_1} = \mathfrak{v}_{13}$ angegeben, dessen Basis eine *Quadrik* enthält, nämlich

$$\mathfrak{q}_1 = (x_0 x_2 - x_1^2,\ x_0 x_3^2 - 2\, x_1 x_2 x_3 + x_2^3).$$

Das angegebene Verfahren und auch die Eliminationsmethode liefern also keineswegs Primärideale der Hauptklasse von kleinstmöglicher Ordnung, die Ergebnisse sind also in dieser Beziehung *nicht optimal*.

2. Das Ideal $\mathfrak{v}_{14}$
Hier ist $y_0 = t_0^4$, $y_1 = t_0^3 t_1$, $y_2 = t_0^2 t_1^2$, $y_3 = t_0 t_1^3$, $y_4 = t_1^4$ und

$$\mathfrak{v}_{14} = \mathfrak{J}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$
$$= (x_0 x_2 - x_1^2,\ x_0 x_3 - x_1 x_2,\ x_0 x_4 - x_2^2,\ x_1 x_3 - x_2^2,\ x_1 x_4 - x_2 x_3,\ x_2 x_4 - x_3^2).$$

Dann wird $\mathfrak{q} = (F_1, F_2, F_3) = (x_0^3 x_4 - x_1^4,\ x_0^2 x_4^2 - x_2^4,\ x_0 x_4^3 - x_3^4)$ mit $\sqrt{\mathfrak{q}} \subset \mathfrak{v}_{13}$.

Durch Elimination würde man $\mathfrak{q}_1 = (x_0^3 x_4 - x_1^4, x_0 x_4 - x_2^2, x_0 x_4^3 - x_3^4)$ erhalten. Überdies existiert nach PERRON ([12], Seite 306, 308, 309) ein

$$\mathfrak{q}_2 = (Q_1, Q_2, Q_3) \text{ mit } \sqrt{\mathfrak{q}_2} = \mathfrak{v}_{14}$$

und *Quadriken* Q_1, Q_2, Q_3. Dies gilt analog für alle $\mathfrak{v}_{1n}$ mit $n = 2^s$ (vgl. PERRON [12], a. a. O.).

3. Das Ideal $\mathfrak{v}_{14}^{(2)}$

Hier ist $y_0 = t_0^4, y_1 = t_0^3 t_1, y_2 = t_0 t_1^3, y_3 = t_1^4$ und

$$\mathfrak{v}_{14}^{(2)} = (x_0 x_3 - x_1 x_2, x_0^2 x_2 - x_1^3, x_0 x_2^2 - x_1^2 x_3, x_2^3 - x_1 x_3^2).$$

Jetzt ist $y_1^4 = t_0^{12} t_1^4 = y_0^3 y_3, y_2^4 = t_0^4 t_1^{12} = y_0 y_3^3$, also $\mathfrak{q} = (x_0^3 x_3 - x_1^4, x_0 x_3^3 - x_2^4)$.

4. Das Ideal $\mathfrak{v}_{23}$

Hier ist $y_0 = t_0^3, y_1 = t_0^2 t_1, y_2 = t_0^2 t_2, y_3 = t_0 t_1^2, y_4 = t_0 t_1 t_2, y_5 = t_0 t_2^2, y_6 = t_1^3$, $y_7 = t_1^2 t_2, y_8 = t_1 t_2^2, y_9 = t_2^3$ und

$$\mathfrak{v}_{23} = \mathfrak{J}\begin{pmatrix} x_0 \, x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4 \, x_5 \\ x_1 \, x_3 \, x_4 \, x_6 \, x_7 \, x_8 \\ x_2 \, x_4 \, x_5 \, x_7 \, x_8 \, x_9 \end{pmatrix} \text{ hat eine Basis aus 27 Quadriken.}$$

Hier ist $d = 2$, $n = 9$, $r = n - d = 7$. Dann wird

$$\mathfrak{q} = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_7, F_8) \text{ mit } F_1 = x_0^2 x_6 - x_1^3, F_2 = x_0^2 x_9 - x_2^3,$$
$$F_3 = x_0 x_6^2 - x_3^3, \quad F_4 = x_0 x_6 x_9 - x_4^3, \quad F_5 = x_0 x_9^2 - x_5^3,$$
$$F_7 = x_6^2 x_9 - x_7^3, \quad F_8 = x_6 x_9^2 - x_8^3.$$

Hier bereiten nur die Projektionen $\mathfrak{v}_{23}^{(0)}$, $\mathfrak{v}_{23}^{(6)}$, $\mathfrak{v}_{23}^{(9)}$ Schwierigkeiten.

LITERATUR

[1] BUDACH, L.: Quotientenfunktoren und Erweiterungstheorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

[2] FORSTER, O.: Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring. Math. Z. *84* (1964), 80–67.

[3] GRÖBNER, W.: Moderne algebraische Geometrie. Springer-Verlag, Wien 1949.

[4] GRÖBNER, W.: Über Veronesesche Varietäten und deren Projektionen. Archiv Math. *16* (1965), 257–264.

[5] GRÖBNER, W.: Algebraische Geometrie I. Bibliographisches Institut, Mannheim 1968.

[6] GRÖBNER, W.: Algebraische Geometrie II. Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich 1970.

[7] HARTSHORNE, R.: Complete intersections and connectedness. Amer. J. Math. *84* (1962), 497–508.

[8] HARTSHORNE, R.: Ample subvarieties of algebraic varieties. Lecture notes in mathematics, vol. 156. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1970.
[9] KNESER, M.: Über die Darstellung algebraischer Raumkurven als Durchschnitte von Flächen. Archiv Math. *11* (1960), 157–158.
[10] KRONECKER, L.: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. J. reine angew. Math. *92* (1881), 1–123 = KUMMER-Festschrift, Berlin 1882.
[11] PERRON, O.: Über das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von Kronecker. Math. Z. *47* (1941), 318–324.
[12] PERRON, O.: Über die Bedingung, daß eine binäre Form n-ten Grades eine n-te Potenz ist, und über die rationale Kurve n-ter Ordnung im R_n. Math. Ann. *118* (1941–43), 305–309.
[13] PERRON, O.: Beweis und Verschärfung eines Satzes von Kronecker. Math. Ann. *118* (1941–43), 441–448.
[14] RENSCHUCH, B.: Verallgemeinerungen des Bezoutschen Satzes. Sitzungsberichte der Sächs. Akad. d. Wiss., math.-nat. Klasse *107*, Heft 4 (1966).
[15] VAN DER WAERDEN, B. L.: Referat zur Arbeit [11] von Perron. Zentralblatt für Math. *24* (1941), 276.

Manuskripteingang: 6. 7. 1971

VERFASSER:
BODO RENSCHUCH, Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule „Karl Liebknecht“ Potsdam