Beiträge zur Algebra und Geometrie
2 (1974), 11—18

$\mathcal{A}$-Verbände II

ANDOR KERTÉSZ und MANFRED STERN

§ 1. Einleitung

Im ersten Teil [3] dieser Arbeit haben wir eine Verallgemeinerung der modularen Verbände, die sogenannten $\mathcal{A}$-Verbände, eingeführt und hauptsächlich die relativ atomaren $\mathcal{A}$-Verbände von endlicher Länge untersucht. Der Gegenstand des vorliegenden zweiten Teils dieser Arbeit ist die Untersuchung von relativ atomaren algebraischen $\mathcal{A}$-Verbänden. Es wird gezeigt, daß gewisse Ergebnisse aus [2] auf diese umfangreichere Klasse von Verbänden verallgemeinert werden können.

Es sei V ein vollständiger Verband. Ein Element $s \in V$ wird kompakt genannt, falls aus der Relation $s \leqq \bigcup T$ $(T \subseteqq V)$ stets die Relation $s \leqq \bigcup T'$ für eine endliche Untermenge T' von T folgt. Der Verband V heißt algebraisch, wenn er vollständig ist und wenn es für jedes Element $d \in V$ eine Menge C kompakter Elemente von V gibt, für welche $\bigcup C = d$ gilt. Im übrigen halten wir uns grundsätzlich an die Bezeichnungen und Definitionen von [3].[1]

Die Verfasser danken Herrn E. T. SCHMIDT für seine wertvollen Bemerkungen bezüglich der Abfassung dieser Arbeit.

§ 2. Relativ atomare algebraische $\mathcal{A}$-Verbände

In diesem Paragraphen wollen wir die relativ atomaren algebraischen $\mathcal{A}$-Verbände charakterisieren. Wir beweisen den

---

[1]) Die Lektüre dieser Arbeit setzt die Kenntnis von [3] voraus.

Satz 1. *Sei V ein algebraischer $\mathcal{A}$-Verband mit wenigstens zwei Elementen und bezeichne K die Menge aller kompakten Elemente von V. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*
a) *V ist relativ atomar, d. h., für jedes Paar $b < a$ $(a, b \in V)$ gibt es ein Atom p in V, für welches $b < b \cup p \leqq a$ gilt;*
b) *V genügt den Bedingungen* (N) *und* (DN), *und* 1 *ist eine Vereinigung von Atomen;*
c) *Für jedes $s \in K$ ist das Intervall $[0, s]$ ein komplementärer modularer Verband von endlicher Länge.*
d) *Die Menge K erfüllt die Minimalbedingung, und es existiert in V eine nichtleere Menge von dualen Atomen, deren Durchschnitt* 0 *ist;*
e) *Jedes kompakte Element s (> 0) besitzt eine endliche spezielle Basis.*

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Nach Lemma 5 in [3] folgt, daß V der Bedingung (N) genügt. Um das Erfülltsein von (DN) zu zeigen, genügt es auf Grund des zu Lemma 5 in [3] dualen Lemmas nachzuweisen, daß V relativ dual atomar ist.
Es sei $a > b$ $(a, b \in V)$. Da V nach a) relativ atomar ist, existiert ein Atom $p \in V$, so daß

$$a \geqq b \cup p > b$$

mit

$$b \cap p = 0$$

gilt. Wir wählen ein Element $m \in V$ derart aus, daß es maximal unter den Elementen x ist, die die Relationen

$$x \cap p = 0 \quad \text{und} \quad x \geqq b$$

erfüllen. (Ein solches m existiert nach dem ZORNschen Lemma.) Daß m ein duales Atom ist, zeigt man analog zu dem gleichen Sachverhalt bei der Implikation c) $\Rightarrow$ d) im Beweis des Satzes 4 in [3]. Offensichtlich gilt $a > a \cap m$, da aus $a \cup m = a$ die Relation $p \leqq m$ folgen würde, was wegen der Wahl von m nicht möglich ist. Ferner folgt aus $b \leqq m$ die Beziehung

$$(a \cap m) \cap b = (a \cap b) \cap m = b \cap m = b,$$

d. h.

$$b \leqq a \cap m.$$

Damit haben wir bewiesen, daß V relativ dual atomar ist. Wegen der zu Lemma 5 in [3] dualen Aussage folgt hieraus die Gültigkeit von (DN).
Es sei jetzt S eine maximale unabhängige Menge von Atomen in V. Dann gilt

$$P \overset{\text{def}}{=} \bigcup S \leqslant 1.$$

Wäre $P < 1$, so gäbe es nach a) ein Atom $p \in V$ mit $P < P \cup p \leqq 1$. In diesem Fall ist $P \parallel p$, so daß $P \cap p = 0$ gilt. Dann ist die Menge $\langle S, p \rangle$ eben-falls unabhängig, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung über S. Daraus erhalten wir

$$\bigcup S = 1.$$

b) $\Rightarrow$ c): Es sei vorausgesetzt, daß für V die Bedingungen (N) und (DN) erfüllt sind und daß ferner

$$1 = \bigcup_{\nu \in \Gamma} a_\nu \tag{1}$$

gelte, wobei jedes a_ν ($\nu \in \Gamma$) ein Atom in V ist. Ist s ein beliebiges Element aus K, so gibt es nach (1) eine endliche Untermenge $\langle \nu_1, \ldots, \nu_n \rangle$ von Γ mit

$$s \leqq e \overset{\text{def}}{=} a_{\nu_1} \cup \ldots \cup a_{\nu_n}.$$

Dann gilt

$$s \in [0, e].$$

Der Verband $[0, e]$ ist ein $\mathcal{A}$-Verband, da (N) und (DN) auch für Intervalle von V gelten. Ferner ist das größte Element e von $[0, e]$ eine Vereinigung von endlich vielen Atomen. Daraus folgt nach Satz 4 in [3], daß das Intervall $[0, e]$ ein komplementärer modularer Unterverband endlicher Länge von V ist. Daher ist das Intervall $[0, s]$ ein komplementärer modularer Unterverband endlicher Länge von V (ein komplementärer modularer Verband ist nämlich stets relativ komplementär).

c) $\Rightarrow$ d): Da jedes Intervall $[0, s]$ ($s \in K$) von endlicher Länge ist, ist jede Kette der Gestalt

$$s > s_1 > s_2 > \cdots > s_j > \cdots \quad (s, s_1, s_2, \ldots \in K) \tag{2}$$

notwendig endlich.

Da 1 eine Vereinigung von kompakten Elementen ist und für jedes kompakte Element eine Relation (3) gilt, ist 1 offensichtlich eine Vereinigung von Atomen. Es sei $P = \langle \ldots, a_\nu, \ldots \rangle_{\nu \in \Gamma}$ eine maximale unabhängige Menge von Atomen in V. Dann gilt

$$1 = \bigcup_{\nu \in \Gamma} a_\nu,$$

wobei diese Darstellung wegen der Unabhängigkeit von P unverkürzbar ist. Wir definieren nun

$$m_\nu \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{\mu \in \Gamma \\ \mu \neq \nu}} a_\mu.$$

Dann gilt $a_\nu \cup m_\nu = 1$ und $a_\nu \cap m_\nu = 0$. Da a_ν Atom in V ist, ist m_ν duales Atom in V. Wir wollen noch zeigen, daß

$$\bigcup_{\nu \in \Gamma} m_\nu = 0$$

ist. Im Gegensatz hierzu nehmen wir an, daß

$$d \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{\nu \in \Gamma} m_\nu > 0$$

ist. Dann gibt es ein Element $(0 <)\ s \in K$ mit $s \leqq d$ und endlich viele geeignete Indizes $\nu_1, \ldots, \nu_n$ ($\in \Gamma$; $n > 1$), für welche

$$s \leqq \bigcup_{i=1}^{n} a_{\nu_i} \quad \text{und} \quad s \nleqq \bigcup_{i=1}^{n-1} a_{\nu_i}$$

gilt. Hieraus folgt nach Lemma 4 in [2]

$$a_{\nu_n} \leqq \bigcup_{i=1}^{n-1} a_{\nu_i} \cup s.$$

Daraus ergibt sich wegen $\bigcup_{i=1}^{n-1} a_{\nu_i} \leqq m_{\nu_n}$ und $s \leqq m_{\nu_n}$ die Relation

$$a_{\nu_n} \leqq m_{\nu_n},$$

was der Relation (3) widerspricht.

d) $\Rightarrow$ e): Nach d) gibt es in V duale Atome m_λ ($\lambda \in \Lambda$) mit

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda = 0, \tag{4}$$

und in K ist die Minimalbedingung erfüllt. Wir zeigen zunächst, daß es zu jedem $s \in K$ endlich viele Atome $a_1, \ldots, a_k$ von V gibt, so daß s deren direkte Summe ist, daß also

$$s = a_1 + \cdots + a_k \tag{5}$$

gilt. Um den Beweis von (5) zu erbringen, betrachten wir ein beliebiges $s \in K$, für welches es (gemäß der Minimalbedingung in K) mindestens ein Atom a_1 mit $a_1 \leqq s$ gibt. Weiter existiert wegen (4) ein duales Atom m_μ ($\mu \in \Lambda$) mit

$$a_1 \cup m_\mu = 0 \quad \text{und} \quad a_1 \cup m_\mu = 1.$$

Folglich gilt einerseits

$$a_1 \cap (m_\mu \cap s) = (a_1 \cap m_\mu) \cap s = 0 \tag{6}$$

und andererseits

$$m_\mu \cap s < a_1 \cup (m_\mu \cap s) \leqq s. \tag{7}$$

Hieraus erhalten wir wegen (A_2)

$$a_1 \cup (m_\mu \cap s) = s. \tag{8}$$

Die Beziehungen (6) und (8) ergeben zusammen

$$s = a_1 + (m_\mu \cap s). \tag{9}$$

Da der Verband V algebraisch ist, gibt es eine Untermenge $\langle \ldots, r, \ldots \rangle_{\nu \in \Gamma}$ von K mit

$$m_\mu \frown s = \bigcup_{\nu \in \Gamma} r_\nu, \tag{10}$$

und es folgt hieraus unter Beachtung von (9)

$$s = a_1 \smile (\bigcup_{\nu \in \Gamma} r_\nu).$$

Da s ein kompaktes Element ist, gibt es eine endliche Untermenge $\langle \nu_1, \ldots, \nu_t \rangle$ von Γ, so daß

$$s = a_1 \smile (r_{\nu_1} \smile \cdots \smile r_{\nu_t}) \tag{11}$$

gilt. Wir definieren

$$s_1 \stackrel{\text{def}}{=} r_{\nu_1} \smile \cdots \smile r_{\nu_t} \ (\in K).$$

Dann gilt wegen (11) die Relation

$$s = a_1 \smile s_1. \tag{12}$$

Weiter erhalten wir unter Beachtung von (10) und der Definition von s_1 die Beziehung

$$s_1 \leqq m_\mu \frown s.$$

Hieraus folgt wegen (9) die Relation

$$a_1 \frown s_1 = 0. \tag{13}$$

Die Beziehungen (12) und (13) zusammen ergeben

$$s = a_1 + s_1.$$

Falls s_1 schon ein Atom ist, haben wir bereits die gesuchte Darstellung von s. Ist das nicht der Fall, so verfahren wir auf analoge Weise mit dem Element $s_1 \in K$ und gelangen unter Beachtung von Lemma 6 in [3] zu einer Darstellung

$$s = a_1 + a_2 + s_2,$$

wo a_1, a_2 Atome und $s_2 \in K$ ist. Dieses Verfahren führt nach endlich vielen Schritten zu der gesuchten Darstellung (5)

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_k,$$

weil $s > s_1 > s_2 > \cdots$ als eine streng absteigende Kette von kompakten Elementen nach endlich vielen Schritten abbricht.

Im Intervall $[0, s]$ ist das größte Element s eine direkte Summe von endlich vielen Atomen. Da außerdem der Verband $[0, s]$ die Eigenschaft (A_1) besitzt, kann man ähnlich wie bei der Implikation b) $\Rightarrow$ c) im Beweis des Satzes 4 in [3] zeigen, daß $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ eine endliche spezielle Basis von s ist.

e) $\Rightarrow$ a): Gemäß e) besitzt jedes kompakte Element $s \in K$ eine Darstellung der Form

$$s = a_1 + \cdots + a_k, \tag{14}$$

wobei die a_i ($i = 1, \ldots, k$) Atome von V sind. Gilt nun $b < c$ ($b, c \in V$), so gibt es ein Element $s \in K$ der Form (14) mit

$$b < b \smile s \leqq c$$

und einen Index ($1 \leqq$) i ($\leqq k$) mit

$$a_i \frown b = 0.$$

Da $a_i \leqq s \leqq c$ ist, gilt

$$b < b \smile a_i \leqq c,$$

was zu beweisen war.

Damit ist der Beweis des Satzes erbracht.

§ 3. Servanzelemente in relativ atomaren algebraischen $\mathcal{A}$-Verbänden

Ein Element b von V heißt ein Servanzelement (englisch: pure element) in V, wenn b für jedes $s \in K$ in dem Intervall $[0, b \smile s]$ ein relatives Komplement besitzt, d. h. wenn es ein Element $b'(\leqq b \smile s)$ mit $b + b' = b \smile s$ gibt (vgl. [1]). Wir beweisen den folgenden

Satz 2. *Sei V ein algebraischer $\mathcal{A}$-Verband, und bezeichne K die Menge aller kompakten Elemente von V. Genügt V einer der Bedingungen* a) *bis* e) *von Satz* 1, *dann ist jedes Element von V ein Servanzelement in V.*

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen sind die Bedingungen a) bis e) äquivalent. Bei unserem Beweis wollen wir annehmen, daß e) erfüllt sei. Nach e) gibt es zu jedem $s \in K$ endlich viele Atome $a_1, \ldots, a_k$ von K, so daß s deren direkte Summe ist:

$$s = a_1 + \cdots + a_k.$$

Wir wollen zeigen, daß jedes Element $v \in V$ ein Servanzelement in V ist. Wir setzen $a_{i_0} = 0$ und wählen sukzessiv die Elemente $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$ ($m \leqq k$) unter den Summanden des Elements s so aus, daß

$$v \frown a_{i_1} = 0 \tag{15}$$

$$(v \smile a_{i_1}) \smile a_{i_2} = 0$$

$$(v \smile a_{i_1} \smile \cdots \smile a_{i_{m-2}}) \frown a_{i_{m-1}} = 0 \tag{16}$$

$$(v \smile a_{i_1} \smile a_{i_2} \smile \cdots \smile a_{i_{m-1}}) \frown a_{i_m} = 0 \tag{17}$$

und

$$v \cup (a_{i_1} \cup a_{i_2} \cup \cdots \cup a_{i_{m-1}} \cup a_{i_m}) = v \cup s \tag{18}$$

gilt.
Wir zeigen durch Induktion nach m, daß

$$v \frown (a_{i_1} \cup a_{i_2} \cup \cdots \cup a_{i_{m-1}} \cup a_{i_m}) = 0 \tag{19}$$

ist. Für $m = 0$ ist die Behauptung offenbar klar. Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, daß

$$v \frown (a_{i_1} \cup a_{i_2} \cup \cdots \cup a_{i_{m-1}}) = 0 \tag{20}$$

ist. Im Gegensatz zu (19) nehmen wir an, daß

$$v \frown \left(\bigcup_{\nu=1}^{m} a_{i_\nu} \right) = d > 0 \tag{21}$$

ist. Aus dieser Annahme ergibt sich

$$d \leqq \bigcup_{\nu=1}^{m} a_{i_\nu} \tag{22}$$

und

$$d \leqq v. \tag{23}$$

Aus (23) und aus der Induktionsvoraussetzung (20) folgt

$$d \frown \left(\bigcup_{\nu=1}^{m-1} a_{i_\nu} \right) = 0. \tag{24}$$

Da nach Voraussetzung $d > 0$ ist, ergibt sich aus (24) die Beziehung

$$d \,\|\, \bigcup_{\nu=1}^{m-1} a_{i_\nu}.$$

Hieraus und aus (22) bekommen wir

$$\bigcup_{\nu=1}^{m-1} a_{i_\nu} < \bigcup_{\nu=1}^{m-1} a_{i_\nu} \cup d \leqq \bigcup_{\nu=1}^{m} a_{i_\nu}. \tag{25}$$

Da a_{i_m} Atom ist und in V die Bedingung (A_1) gilt, folgt aus (25)

$$\bigcup_{\nu=1}^{m-1} a_{i_\nu} \cup d = \bigcup_{\nu=1}^{m} a_{i_\nu}.$$

Hieraus erhalten wir

$$a_{i_m} \leqq \bigcup_{\nu=1}^{m-1} a_{i_\nu} \cup d.$$

Unter Beachtung von (23) liefert die letzte Ungleichung die Beziehung

$$a_{i_m} \leqq \bigcup_{\nu=1}^{m-1} a_{i_\nu} \cup v,$$

die im Widerspruch zu (17) steht. Damit ist (19) bewiesen. Die Beziehungen (18) und (19) zusammen ergeben, daß $v \in V$ ein Servanzelement in V ist. Damit ist der Beweis des Satzes erbracht.
Die Frage, ob für einen algebraischen $\mathcal{A}$-Verband V die Aussagen a) bis e) des Satzes 1 gelten, falls jedes Element $v \in V$ ein Servanzelement in V ist, bleibt offen.

Anmerkung nach Redaktionsschluß:

Die Autoren wurden inzwischen mit dem Buch „Theory of Symmetric Lattices" (Berlin-Heidelberg-New York 1970) von F. MAEDA und S. MAEDA bekannt. In der Terminologie dieses Buches heißen die hier auftretenden relativ atomaren algebraischen A_1-Verbände *Matroidverbände*. Bei der Implikation a) $\Rightarrow$ b) im Beweis von Satz 1 folgt die relativ duale Atomarität von V auch aus Remark 13.1, S. 56 des eben erwähnten Buches.

LITERATUR

[1] KERTÉSZ, A.: Lattice theory remarks on completely reducible algebras. Colloquium Math. *14* (1966), 361–363.
[2] KERTÉSZ, A.: Zur Theorie der kompakt erzeugten modularen Verbände, Publ. Math. Debrecen *15* (1968), 1–11.
[3] KERTÉSZ, A., und M. STERN: $\mathcal{A}$-Verbände I. Beiträge zur Algebra und Geometrie *1* (1971), 121–133.

Manuskripteingang: 28. 5. 1971

VERFASSER:
ANDOR KERTÉSZ, Mathematisches Institut der Kossuth-Lajos-Universität Debrecen
MANFRED STERN, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg