Werk

Titel: Über einen algebraischen Satz, welcher in der Theorie der geometrischen Objekte a...

Autor: GOLAB, S.

Jahr: 1974

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0002|log6

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beiträge zur Algebra und Geometrie
2 (1974), 7–10

Über einen algebraischen Satz, welcher in der Theorie der geometrischen Objekte auftritt

Stanisław Gołąb

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

In der Theorie der geometrischen Objekte begegnete ich einer Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $GL(n, R)$, deren nähere Bestimmung zu einem unerwarteten Resultat geführt hat. Dieses Resultat bildet eben den Gegenstand der vorliegenden Note.

Bezeichnungen. Mit L_s^n bezeichnen wir die Gruppe, deren Elemente Folgen von Zahlen

$$\alpha = \{A_k^i, A_{kl}^i, \ldots, A_{k_1 k_2 \cdots k_s}^i\} \tag{1}$$

sind, wo die Indizes

$$i, k, l, k_1, \ldots, k_s = 1, \ldots, n$$

durchlaufen,

$$J = \operatorname{Det}(A_k^i) \neq 0 \tag{2}$$

und

$$A_{k_1 k_2 \cdots k_s}^i$$

in allen unteren Indizes $k_1, \ldots, k_s$ vollkommen symmetrisch sind. Es kann also im folgenden

$$k_1 \leqq k_2 \leqq \cdots \leqq k_r, \quad r = 2, \ldots, s, \tag{3}$$

vorausgesetzt werden.

Alle Zahlen $A^i_{k_1 k_2 \dots k_r}$ $(r = 1, \dots, s)$ gehören zu $\mathbf{R}$, d. h. zu dem Körper aller reellen Zahlen, und können ganz beliebig sein.
Eine binäre interne Operation in L^n_s wird folgendermaßen erklärt.
Es sei

$$\beta = \{B^i_k, B^i_{kl}, \dots\} \tag{4}$$

ein zweites Element aus L^n_s. Mit

$$\gamma = \{C^i_k, C^i_{kl}, \dots\} \tag{5}$$

definieren wir die Zusammensetzung

$$\gamma = \beta \circ \alpha \tag{6}$$

der Elemente α, β mit Hilfe der folgenden Formeln:

$$\begin{cases} C^i_k = A^i_j \cdot B^j_k, \text{[1]} \\ C^i_{kl} = A^i_{pq} \cdot B^p_k \cdot B^q_l + A^i_p \cdot B^p_{kl}, \text{ usw.} \end{cases} \tag{7}$$

Die so definierte Operation $\circ$ macht aus L^n_s eine Gruppe, wo

$$\varepsilon = \{\delta^i_k, 0, \dots, 0\} \tag{8}$$

das neutrale Element ist und entsprechend die Parameter des zu α inversen Elementes α^{-1} wie folgt erklärt werden:

$$\alpha^{-1} = \{\bar{A}^i_k, \dots\}, \tag{9}$$

wo $\bar{A}^i_k$ die zu A^i_k inverse Matrix bedeutet (sie existiert immer auf Grund der Voraussetzung (2)). Die weiteren Parameter wollen wir nicht explizit ausschreiben.

Eine Untergruppe von L^n_2

Betrachten wir das folgende System von Relationen:

$$A^i_{kl} = A^i_k \cdot \bar{A}^j_m \cdot A^m_{lj}, \quad i, k, l = 1, \dots, n. \tag{10}$$

Die Relationen (10) scheiden von der Menge L^n_2 eine Untermenge $\tilde{L}^n_2$ aus.

Wir beweisen den folgenden

Hilfssatz. *Die Untermenge $\tilde{L}^n_2$ bildet eine Untergruppe der Gruppe $\tilde{L}^n_2$.*

Beweis. Nehmen wir zwei Elemente $\alpha = \{A^i_k, A^i_{kl}\}$, $\beta = \{B^i_k, B^i_{kl}\}$ aus L^n_2. Wir setzen also neben (10) auch

$$B^i_{kl} = B^i_k \cdot \bar{B}^j_m \cdot B^m_{lj} \tag{11}$$

voraus und bilden

$$C^i_k = A^i_j \cdot B^j_k, \qquad C^i_{kl} = A^i_{pq} \cdot B^p_k \cdot B^q_l + A^i_p \cdot B^p_{kl}. \tag{12}$$

[1]) Wir verwenden die Einsteinsche Konvention über das Weglassen des Summationszeichens.

Es handelt sich darum, aus (10), (11), (12) die Relationen

$$C^i_{kl} = C^i_k \cdot \bar{C}^j_m \cdot C^m_{lj} \tag{13}$$

abzuleiten. Zu diesem Zwecke beachten wir, daß bekanntlich

$$\bar{C}^j_m = \bar{B}^j_t \cdot \bar{A}^t_m \tag{14}$$

gilt. Wir gehen nun von der rechten Seite (13) aus und berücksichtigen (12) und (14):

$$\begin{aligned} \Phi &= C^i_k \cdot \bar{C}^j_m \cdot C^m_{lj} = A^i_w \cdot B^w_k \cdot \bar{B}^j_t \cdot \bar{A}^t_m \cdot (B^p_l \cdot B^q_j \cdot A^m_{pq} + A^m_p \cdot B^p_{lj}) \\ &= A^i_w \cdot B^w_k \cdot \bar{A}^t_m \cdot B^p_l \cdot (\bar{B}^j_t \cdot B^q_j) \cdot A^m_{pq} + A^i_w \cdot B^w_k \cdot \bar{B}^j_t \cdot (\bar{A}^t_m \cdot A^m_p) \cdot B^p_{lj}. \end{aligned}$$

Aber

$$\bar{B}^j_t \cdot B^q_j = \delta^q_t, \qquad \bar{A}^t_m \cdot A^m_p = \delta^t_p,$$

also

$$\Phi = A^i_w \cdot B^w_k \cdot \bar{A}^t_m \cdot B^p_l \cdot A^m_{pt} + A^i_w \cdot B^w_k \cdot \bar{B}^j_t \cdot B^t_{lj}.$$

Jetzt transformieren wir die linke Seite Ψ von (13) auf Grund von (12), (10) und (11):

$$\begin{aligned} \Psi = C^i_{kl} &= A^i_{pq} \cdot B^p_k \cdot B^q_l + A^i_p \cdot B^p_{kl} \\ &= B^p_k \cdot B^q_l \cdot (A^i_p \cdot \bar{A}^j_m \cdot A^m_{qj}) + A^i_p \cdot (B^p_k \cdot \bar{B}^j_m \cdot B^m_{lj}) \\ &= A^i_p \cdot B^p_k \cdot \bar{A}^j_m \cdot B^q_l \cdot A^m_{qj} + A^i_p \cdot B^p_k \cdot \bar{B}^j_m \cdot B^m_{lj}. \end{aligned}$$

Eine Umänderung der Summationsindizes zeigt sofort, daß $\Psi = \Phi$ ist, was zu beweisen war.

Hauptsatz. *Wenn man die Struktur der Relationen* (10) *beobachtet, so erkennt man, daß* (10) *in bezug auf* A^i_{jk} *ein System von* $n \cdot \binom{n+1}{2}$ *linearen und homogenen Gleichungen darstellt, wobei die Koeffizienten rationale* (*oder nach dem Multiplizieren beider Seiten mit J sogar ganze*) *Funktionen der* A^i_k *darstellen.*

Außer der trivalen Lösung $A^i_{jk} = 0$ könnte also (10) nur dann erfüllt werden, falls die Determinante des Systems (10), die den Grad $n \cdot \binom{n+1}{2}$ besitzt, verschwindet. Dies würde eine algebraische Gleichung in bezug auf die A^i_k bedeuten und folglich eine Einschränkung der Gruppe L^n_1 zu einer Untergruppe $\tilde{L}^n_1$ mit sich bringen. Dem ist aber nicht so. Wir werden nämlich den folgenden Satz beweisen.

Satz. *Aus den Relationen* (10) *folgt* $A^i_{kj} = 0$ *für* $i, k, j = 1, \ldots, n$. *Anders gesagt, die Untergruppe* $\tilde{L}^n_2$ *reduziert sich zu der Untergruppe* L^n_1.

Beweis. Wir führen die folgenden kurzen Bezeichnungen ein:

$$W_l \overset{\text{df}}{=} \bar{A}^j_m \cdot A^m_{lj}. \tag{15}$$

Aus (10) und (15) erhalten wir

$$A^i_{kl} = A^i_k \cdot W_l. \tag{16}$$

Aus

$$A^i_{kl} = A^i_{lk} \tag{17}$$

und (16) folgt

$$A^i_k \cdot W_l = A^i_l \cdot W_k. \tag{18}$$

Setzen wir vorläufig voraus, daß wenigstens ein W_i von Null verschieden ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $W_1 \neq 0$ vorausgesetzt werden. Für $k = 1$ folgt dann aus (18)

$$A^i_1 \cdot W_l = A^i_l \cdot W_1$$

oder

$$A^i_l = \frac{W_l}{W_1} \cdot A^i_1. \tag{19}$$

(19) besagt aber, daß jede Spalte der Determinante J proportional zu der ersten Spalte ist, woraus $J = 0$ folgt entgegen der Voraussetzung (2). Die Annahme, daß wenigstens ein W_i von Null verschieden ist, führt also zum Widerspruch. Folglich haben wir $W_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$, was zusammen mit (16) den Beweis vollendet.

Manuskripteingang: 5. 1. 1971

VERFASSER:
STANISŁAW GOŁĄB, Kraków (Polen)