Beiträge zur Algebra und Geometrie
2 (1974), 145—154

Die flächenkleinsten Dreiecke, die zwei gegebene, sich von außen berührende Kreise enthalten

Otto Krötenheerdt

1. Einleitung und Resultate

Bei Untersuchungen gewisser regelmäßiger Lagerungen von Kreisen unterschiedlicher Radien in der Ebene bzw. in größeren vorgegebenen Bereichen spielen Fundamentalbereiche mit eingelagerten Kreisen oder Kreisteilen eine gewisse Rolle. Von besonderem Interesse sind dabei spezielle und allgemeine Dreiecke und spezielle Vierecke, weil diese als Fundamentalbereiche von Deckabbildungsgruppen der Ebene auftreten. In diesem Zusammenhang ergeben sich einige mehr oder weniger elementargeometrische Fragen, deren Beantwortung auch losgelöst von der ursprünglichen Problemstellung gewissen Reiz haben dürfte.

Eine dieser Fragen soll im folgenden behandelt und beantwortet werden, nämlich die Frage nach einem bzw. dem flächenkleinsten Dreieck, welches zwei gegebene, sich von außen berührende Kreise K_1 und K_2 enthält. Die Radien beider Kreise seien mit r_1 bzw. r_2 bezeichnet; ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $r_1 \geqq r_2$ annehmen. Die Untersuchungen zur gestellten Frage führen zu folgendem Ergebnis.

(A): *K_1 und K_2 seien zwei sich von außen berührende Kreise mit den Radien r_1 bzw. r_2, und es sei $r_1 \geqq r_2$.*

a) *Ist $0 < r_2 < \frac{1}{3} \cdot r_1$, so gibt es für jedes r_2 dieses Intervalls unendlich* *viele flächenkleinste Dreiecke, die K_1 und K_2 enthalten. Jedes solche Dreieck ist gleichseitig und enthält K_1 als Inkreis* (vgl. Abb. 1).

b) *Ist* $\frac{1}{3} \cdot r_1 \leqq r_2 \leqq \frac{1}{8}(1 + \sqrt{17}) \cdot r_1$, *so gibt es für jedes r_2 dieses Intervalls genau ein flächenkleinstes Dreieck, das K_1 und K_2 enthält. Dieses Dreieck ist ein gleichschenkliges Dreieck, bei dem der Mittelpunkt der Basisseite Berührungspunkt mit K_1 ist und bei dem jeder Schenkel so auf einer gemeinsamen Tangente an K_1 und K_2 liegt, daß sich der Schenkelmittelpunkt nicht außerhalb der durch die Berührungspunkte mit K_1 und K_2 bestimmten Strecke befindet* (vgl. Abb. 2); *ist* $r_2 = \frac{1}{3} \cdot r_1$, *so ist jeder Schenkelmittelpunkt Berührungspunkt von K_1, und das Dreieck ist gleichseitig* (vgl. Abb. 2a); *ist* $r_2 = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{17})$, *so ist jeder Schenkelmittelpunkt Berührungspunkt von K_2* (vgl. Abb. 2c).

c) *Ist* $\frac{1}{8}(1 + \sqrt{17}) \cdot r_1 < r_2 \leqq r_1$, *so gibt es für jedes r_2 dieses Intervalls genau zwei spiegelbildlich (Spiegelachse ist die Gerade durch die Kreismittelpunkte) zueinander gelegene flächenkleinste Dreiecke, die K_1 und K_2 enthalten. Jedes der beiden Dreiecke ist ein (im allgemeinen asymmetrisches) Dreieck, bei dem eine Dreiecksseite so auf einer gemeinsamen Tangente beider Kreise liegt, daß der Seitenmittelpunkt sich nicht außerhalb der durch die beiden Berührungspunkte bestimmten Strecke befindet, und bei dem eine weitere Seite mit ihrem Mittelpunkt K_1 und mit keinem Punkt K_2 berührt, während die dritte Seite mit ihrem Mittelpunkt K_2 und mit keinem Punkt K_1 berührt* (vgl. Abb. 3); *im Grenzfall $r_1 = r_2$ ist jedes der beiden Dreiecke gleichschenklig und rechtwinklig.*

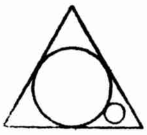


Abb. 1

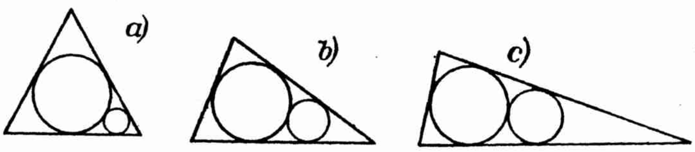


Abb. 2

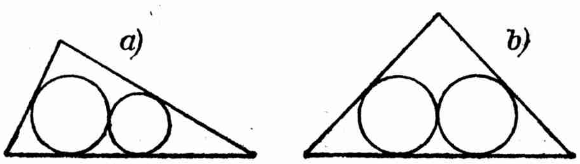


Abb. 3

Bevor wir zum Beweis der Aussagen unter (A) kommen, wollen wir an die gestellte Frage noch eine weitere naheliegende Frage anknüpfen. Für welche Werte $q = r_2 : r_1$ aus dem Intervall $0 \leqq q \leqq 1$ wird in einem bzw. dem flächenkleinsten Dreieck der größte und für welche Werte q wird der kleinste Teil der Dreiecksfläche von den Kreisflächen bedeckt? (Wir schließen hier den Fall $q = 0$ mit ein, weil sonst die Existenz der gefragten q-Werte nicht von vornherein gesichert wäre.) Wir arbeiten mit dem Quotienten q der Radien r_2 und r_1, weil alle Kreisflächenpaare mit demselben q-Wert in jedem zugehörigen flächenkleinsten Dreieck von der gesamten Dreiecksfläche denselben Teil bedecken. Die Untersuchungen zu dieser Zusatzfrage führen zu folgendem Ergebnis.

(B): *Es sei q der Quotient $r_2 : r_1$, und $d(q)$ sei die Lagerungsdichte der sich von außen berührenden Kreise K_1 und K_2 in einem oder in dem flächenkleinsten Dreieck, welches K_1 und K_2 enthält, das heißt, $d(q)$ ist der Quotient aus der Summe der zu K_1 und K_2 gehörenden Kreisflächeninhalte und dem Flächeninhalt eines oder des flächenkleinsten Dreiecks, welches K_1 und K_2 enthält.*

a) *Ist $0 \leqq q \leqq \frac{1}{3}$, so wird die Dichte $d(q)$ durch die Funktion*

$$d(q) = \frac{1}{9}\sqrt{3} \cdot \pi \cdot (1 + q^2)$$

beschrieben; in diesem Intervall wächst die Dichte streng monoton von

$$d(0) = \frac{1}{9}\sqrt{3} \cdot \pi \quad bis \quad d\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{81}\sqrt{3} \cdot \pi.$$

b) *Ist $\frac{1}{3} \leqq q \leqq \frac{1}{8}(1 + \sqrt{17})$, so wird die Dichte durch die Funktion*

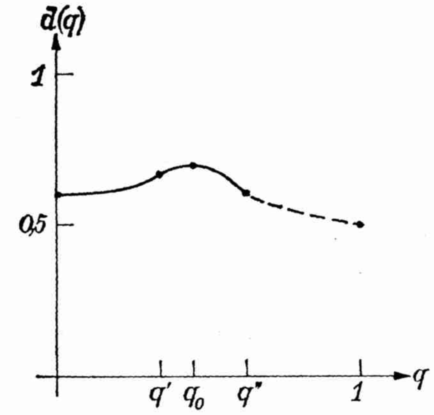
$$d(q) = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{q} \cdot (-q^3 + q^2 - q + 1)$$

beschrieben; in diesem Intervall wächst die Dichte streng monoton von der Stelle $q' = \frac{1}{3}$ bis zur Stelle

$$q_0 = \frac{1}{21}\left(5 + \sqrt[3]{314 + 42\sqrt{87}} + \sqrt[3]{314 - 42\sqrt{87}}\right),$$

an der $d(q)$ das Maximum annimmt, und fällt von der Stelle q_0 bis zur Stelle $q'' = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{17})$ streng monoton.

c) *Ist $\frac{1}{8}(1 + \sqrt{17}) \leqq q \leqq 1$, so ist im Inneren dieses Intervalls für die Dichte $d(q)$ eine explizit gegebene Funktion von q nicht bekannt. Näherungsweise Berechnungen an mehreren Zwischenstellen deuten darauf hin, daß*



$d(q)$ in diesem Intervall von $d\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}\right)$ *bis zum Minimum* $d(1) = (3 - 2\sqrt{2}) \cdot \pi$ *streng monoton fällt* (vgl. Abb. 4).

Abb. 4

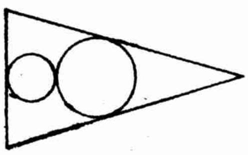


Abb. 5

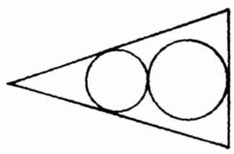


Abb. 6

2. Beweis zu (A)

Wir betrachten die durch K_1 und K_2 bestimmten Kreisflächen F_1 und F_2 als Punktmengen und bezeichnen mit H die abgeschlossene konvexe Hülle der Vereinigung von F_1 und F_2; H wird also von zwei Kreisbögen und zwei Strecken berandet. Jedes flächenkleinste Dreieck, welches K_1 und K_2 enthält, ist auch ein flächenkleinstes Dreieck, welches H enthält, und umgekehrt. H ist ein konvexer Bereich, und für ihn gilt der Satz, daß jedes H enthaltende konvexe n-Eck von minimalem Inhalt dem Bereich derart umbeschrieben ist, daß jeder Seitenmittelpunkt Stützpunkt der betreffenden Seite ist (vgl. [1], S. 6); Stützpunkte sind Punkte der n-Ecksseiten, die auf dem Rande von H liegen. Offensichtlich gibt es auf jeder Seite jedes flächenkleinsten Dreiecks, welches H enthält, entweder genau einen oder unendlich viele Stützpunkte.

Auf Grund des zitierten Satzes muß jedes flächenkleinste Dreieck, welches H (und damit auch K_1 und K_2) enthält, eines derjenigen Dreiecke sein, die durch die folgende Aufzählung charakterisiert sind.

1. **Jede Dreieckseite besitzt genau einen Stützpunkt, d. h., außer den Seitenmittelpunkten gibt es keine weiteren Stützpunkte.**

   1.1. **Drei Stützpunkte liegen auf K_1.**
   In diesem Fall ist K_1 Inkreis eines gleichseitigen Dreiecks. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn

   $$0 < r_2 < q' \cdot r_1 \quad \text{mit} \quad q' = \frac{1}{3}.$$

Der Wert $q' = \frac{1}{3}$ ergibt sich bei der Bestimmung eines größtmöglichen Kreises K_2, welcher K_1 außen berührt und in einem K_1 umbeschriebenen regulären Dreieck enthalten ist (vgl. Abb. 2a).

1.2. Zwei Stützpunkte liegen auf K_1, ein Stützpunkt liegt auf K_2. Jedes derartige Dreieck ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel K_1 berühren und dessen Basis K_2 berührt; gleichseitig kann kein solches Dreieck sein (vgl. Abb. 5). Dieser Fall kann für jedes r_2 des Intervalls

$$0 < r_2 \leqq r_1$$

eintreten. In jedem Dreieck der beschriebenen Art ist zwar jeder Seitenmittelpunkt Stützpunkt der betreffenden Seite, aber das ist für den minimalen Flächeninhalt des Dreiecks nur notwendig, nicht hinreichend. Offensichtlich können zu jedem Dreieck der beschriebenen Art durch Abrollen von K_2 auf K_1 flächenkleinere Dreiecke gefunden werden, so daß der Fall 1.2. für die Lösung unserer gestellten Aufgabe nicht in Betracht kommt.

1.3. Ein Stützpunkt liegt auf K_1, zwei Stützpunkte liegen auf K_2. Jedes derartige Dreieck ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel K_2 berühren und dessen Basis K_1 berührt; gleichseitig kann kein solches Dreieck sein (vgl. Abb. 6). Dieser Fall kann nur eintreten, wenn

$$q'' \cdot r_1 < r_2 \leqq r_1 \quad \text{mit} \quad q'' = \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt{17}\right).$$

Den Wert q'' finden wir durch die Bestimmung desjenigen Kreises K_2, welcher K_1 außen berührt und welcher so in einem K_1 umbeschriebenen gleichschenkligen Dreieck liegt, daß die Schenkelmittelpunkte K_2 berühren (vgl. Abb. 2c). Es ist nämlich der Abstand zwischen den beiden Berührungspunkten einer gemeinsamen Tangente beider Kreise gleich $2\sqrt{r_1 r_2}$. Wird nun die Länge eines Schenkels mit x bezeichnet, so ist auf Grund ähnlicher Dreiecke

$$\frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2} = \frac{2x}{x - 2\sqrt{r_1 r_2}},$$

d. h.

$$x = \frac{-2\sqrt{r_1 r_2} \cdot (r_1 + r_2)}{r_1 - 3r_2}.$$

Es ist aber auch

$$\frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2} = \frac{\sqrt{x^2 + r_2^2}}{r_2},$$

d. h.

$$x = \frac{2\sqrt{r_1 r_2} \cdot r_2}{r_1 - r_2}\,.$$

Also ist

$$-(r_1 + r_2) \cdot (r_1 - r_2) = r_2 \cdot (r_1 - 3\,r_2),$$

d. h.

$$r_2^2 - \frac{1}{4} r_1 r_2 - \frac{1}{4} r_1^2 = 0,$$

und daraus folgt schließlich für den gegebenen geometrischen Sachverhalt

$$r_2 = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{17}) \cdot r_1\,.$$

Offensichtlich können zu jedem Dreieck der am Anfang von 1.3. beschriebenen Art genauso wie im Fall 1.2. durch Abrollen von K_1 auf K_2 flächenkleinere Dreiecke gefunden werden, so daß der Fall 1.3. für die Lösung unserer gestellten Aufgabe ebenfalls nicht in Betracht kommt.

2. Zwei Dreieckseiten besitzen jeweils genau einen Stützpunkt, und eine Dreieckseite besitzt unendlich viele Stützpunkte, d. h., bei zwei Seiten ist jeweils der Seitenmittelpunkt einziger Stützpunkt, und die dritte Seite liegt auf einer gemeinsamen Tangente an K_1 und K_2, wobei der Mittelpunkt dieser Seite nicht außerhalb der durch die Berührungspunkte bestimmten Strecke liegt.

   2.1. Drei Stützpunkte liegen auf K_1, ein Stützpunkt liegt auf K_2. In diesem Fall ist wieder wie im Fall 1.1. der Kreis K_1 Inkreis eines gleichseitigen Dreiecks. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn

$$0 < r_2 < q' \cdot r_1 \quad \text{mit} \quad q' = \frac{1}{3}\,.$$

   2.2. Zwei Stützpunkte liegen auf K_1, zwei Stützpunkte liegen auf K_2. Jedes derartige Dreieck ist im allgemeinen ein asymmetrisches Dreieck (vgl. Abb. 3); nur bei gleichgroßen Kreisen K_1 und K_2 liegt ein gleichschenkliges Dreieck als Grenzfall der asymmetrischen Form vor, und dieses Dreieck ist rechtwinklig, wie einfache Überlegungen zeigen. Der Fall 2.2. kann nur eintreten, wenn

$$q'' \cdot r_1 < r_2 \leqq r_1 \quad \text{mit} \quad q'' = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{17}).$$

   Zu jedem derartigen Dreieck gehört ein spiegelbildliches Dreieck, welches durch Spiegelung an der Geraden durch die Kreismittelpunkte entsteht und welches ebenfalls K_1 und K_2 enthält.

3. Eine Dreiecksseite besitzt genau einen Stützpunkt, und zwei Dreieckseiten besitzen jeweils unendlich viele Stützpunkte, d. h., bei einer Dreieckseite ist der Seitenmittelpunkt einziger Stützpunkt, und jede der beiden anderen Seiten liegt auf einer gemeinsamen Tangente an K_1 und K_2, wobei der Mittelpunkt jeder dieser Seiten nicht außerhalb der jeweiligen durch die Berührungspunkte bestimmten Strecke liegt.

3.1. Drei Stützpunkte liegen auf K_1, zwei Stützpunkte liegen auf K_2. (Weitere Fälle sind unter 3. nicht möglich.) Jedes derartige Dreieck ist ein gleichschenkliges Dreieck (vgl. Abb. 2), welches für $r_2 = \frac{1}{3} \cdot r_1$ gleichseitig wird. Der Fall 3.1. kann nur eintreten, wenn

$$q' \cdot r_1 \leqq r_2 \leqq q'' \cdot r_1 \quad \text{mit} \quad q' = \frac{1}{3} \text{ und } q'' = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{17}).$$

Wenn r_2 von $q' \cdot r_1$ bis $q'' \cdot r_1$ wächst, so wandert offensichtlich der Mittelpunkt jedes Schenkels des gleichschenkligen Dreiecks vom Berührungspunkt mit K_1 zum Berührungspunkt mit K_2.

Auf Grund des oben zitierten Satzes — wonach jedes flächenkleinste Dreieck, welches H (und damit K_1 und K_2) enthält, dem Bereich H derart umbeschrieben ist, daß jeder Seitenmittelpunkt Stützpunkt der betreffenden Seite ist — sind in der durchgeführten Fallunterscheidung alle in Betracht kommenden Dreiecke erfaßt. Fassen wir nun die gefundenen Ergebnisse zusammen, wobei die Fälle 1.2. und 1.3. unberücksichtigt bleiben können, so finden wir, daß für jedes r_2 aus dem Intervall $0 < r_2 < \frac{1}{3} \cdot r_1$ jedes flächenkleinste Dreieck gleichseitig ist und K_1 als Inkreis enthält (für jedes solche r_2 gibt es unendlich viele gleichseitige Dreiecke mit K_1 als Inkreis), daß für jedes r_2 aus dem Intervall $\frac{1}{3} \cdot r_1 \leqq r_2 \leqq \frac{1}{8}(1 + \sqrt{17}) \cdot r_1$ genau ein flächenkleinstes Dreieck mit den angegebenen Eigenschaften verbleibt und daß es für jedes r_2 aus dem Intervall $\frac{1}{8}(1 + \sqrt{17}) \cdot r_1 < r_2 \leqq r_1$ genau zwei flächenkleinste Dreiecke mit den angegebenen Eigenschaften gibt. Damit sind die Aussagen unter (A) bewiesen.

3. Beweis zu (B)

Die Dichte $d(q)$ ist der Quotient aus $(r_1^2 + r_2^2) \cdot \pi$ und dem Flächeninhalt F eines oder des flächenkleinsten Dreiecks, welches K_1 und K_2 enthält.

Im Intervall $0 \leqq q \leqq \frac{1}{3}$ gilt für den Flächeninhalt F die Formel

$$F = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot r_1^2,$$

denn F ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks, welches K_1 als Inkreis enthält. Folglich ist

$$d(q) = \frac{(1+q^2)\cdot\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{9}(1+q^2)\cdot\sqrt{3}\cdot\pi.$$

Die quadratische Funktion $d(q)$ wächst im betrachteten Intervall streng monoton. Näherungsweise Berechnungen ergeben

$$d(0) \approx 0{,}60 \text{ und } d\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0{,}67.$$

Im Intervall $\frac{1}{3} \leqq q \leqq \frac{1}{8}(1+\sqrt{17})$ gilt für den Flächeninhalt F die Formel

$$F = \frac{2\cdot r_1^4}{(r_1 - r_2)\cdot\sqrt{r_1 r_2}},$$

denn der Abstand der beiden Berührungspunkte einer gemeinsamen Tangente an zwei sich berührende Kreise ist $2\cdot\sqrt{r_1 r_2}$, und wenn wir in dem flächenkleinsten (gleichschenkligen) Dreieck (vgl. Abb. 2) die Höhe mit h und die Basis mit b bezeichnen, so ist auf Grund ähnlicher Dreiecke

$$\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = \frac{r_2}{h - (2r_1 + r_2)}, \text{ d. h., } h = \frac{2\cdot r_1^2}{r_1 - r_2},$$

und außerdem

$$\frac{r_1 - r_2}{2\cdot\sqrt{r_1 r_2}} = \frac{b}{2\cdot h}, \text{ d. h., } b = \frac{h\cdot(r_1 - r_2)}{\sqrt{r_1 r_2}},$$

und somit ist der Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h = \frac{2\cdot r_1^4}{(r_1 - r_2)\cdot\sqrt{r_1 r_2}}.$$

Folglich ist

$$d(q) = (1+q^2)\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-q)\cdot\sqrt{q} = \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{q}\cdot(-q^3+q^2-q+1);$$

für $q = \frac{1}{3}$ ist

$$\frac{1}{9}(1+q^2)\cdot\sqrt{3}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{q}\cdot(-q^3+q^2-q+1).$$

Um weitere Eigenschaften von $d(q)$ zu erkennen, betrachten wir vorübergehend $d(q)$ im Intervall $0 \leqq q < \infty$. Für die Ableitung $d(q)$ nach q erhalten wir

$$d'(q) = \frac{\pi}{4\cdot\sqrt{q}}(-7q^3 + 5q^2 - 3q + 1) \quad \text{für} \quad q > 0.$$

Weil $-7q^3 + 5q^2 - 3q + 1 = 0$ nur die eine reelle Lösung

$$q_0 = \frac{1}{21}\left(5 + \sqrt[3]{314 + 42\sqrt{87}} + \sqrt[3]{314 - 42\sqrt{87}}\right)$$

besitzt, und weil $d\left(\frac{1}{3}\right) > 0$, $d(0) = 0$ und auch $d(1) = 0$ ist, wächst $d(q)$ im ursprünglich betrachteten Intervall von der Stelle $q' = \frac{1}{3}$ streng monoton bis zur Stelle q_0 und fällt dann streng monoton bis zur Stelle $q'' = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{17})$. Näherungsweise Berechnungen ergeben

$$d\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0{,}67, \quad q_0 \approx 0{,}46, \quad d(q_0) \approx 0{,}71,$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} \approx 0{,}64 \text{ und auch } d\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17}\right) \approx 0{,}64.$$

Im Intervall $\frac{1}{8}(1 + \sqrt{17}) < q < 1$ ist ein nur von r_1 und r_2 abhängiger Ausdruck für den Flächeninhalt F nicht bekannt. Näherungsweise Berechnungen an mehreren Stellen des betrachteten Intervalls deuten darauf hin, daß $d(q)$ im betrachteten Intervall streng monoton fällt und an der Stelle $q = 1$ das Minimum annimmt; auf Grund von Abschätzungen ist jedenfalls

$$d(q'') > d(q) > d(1).$$

Für $q = 1$, das heißt für $r_1 = r_2$, ist

$$F = 2 \cdot (3 + 2\sqrt{2}) \cdot r_1^2;$$

denn jedes der beiden flächenkleinsten Dreiecke ist gleichschenklig und rechtwinklig, und wenn wir die Schenkellänge mit x bezeichnen, so ist (vgl. Abb. 3b)

$$x = \frac{2 \cdot r_1}{\tan 22{,}5^\circ} = \frac{2 \cdot r_1}{\sqrt{2} - 1} = 2 \cdot (\sqrt{2} + 1) \cdot r_1$$

und somit

$$F = \frac{1}{2} \cdot x^2 = 2 \cdot (3 + 2\sqrt{2}) \cdot r_1^2.$$

Folglich ist

$$d(1) = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot (3 + 2\sqrt{2})} = \pi \cdot (3 - 2\sqrt{2}) \approx 0{,}54.$$

Damit sind die Aussagen unter (B) bewiesen.

LITERATUR

[1] FEJES TÓTH, L.: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.
[2] FEJES TÓTH, L.: Reguläre Figuren. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965.

Manuskripteingang: 15. 12. 1971

VERFASSER:
OTTO KRÖTENHEERDT, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg