Beiträge zur Algebra und Geometrie
2 (1974), 139—144

Die Homologiegruppen zweidimensionaler Kegel

Konrad Drechsler und Ulrich Sterz

In dieser Arbeit werden die Homologiegruppen von zweidimensionalen Kegeln in einem projektiven Raum X_n über dem Körper der komplexen Zahlen bestimmt. Dazu werden wie in [1] die Homologiegruppen bei einer birationalen Abbildung verfolgt. Hier bietet sich eine Abbildung auf das Produkt einer projektiven Geraden und der Basiskurve C_1 des Kegels an.
Im Ergebnis werden die gesuchten Homologiegruppen im wesentlichen durch die von C_1 ausgedrückt. Dies entspricht formal den Resultaten von [4]; allerdings wird dort die Singularitätenfreiheit der zu untersuchenden Varietät vorausgesetzt.

1. Die birationale Abbildung

Ein zweidimensionaler Kegel S_2 im projektiven n-dimensionalen Raum X_n über dem Körper der komplexen Zahlen sei gegeben durch die Geraden, die eine topologisch zusammenhängende[1]) Kurve C_1' schneiden und durch einen Punkt P_0 gehen. Dabei möge C_1' die Ordnung s haben und in einem Unterraum $X_{n-1} \subset X_n$ ganz enthalten sein, und P_0 möge nicht in X_{n-1} liegen. Die Koordinaten $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ von X_n seien so gewählt, daß X_{n-1} durch $x_n = 0$ beschrieben wird, $P_0 = (0, \ldots, 0, 1)$ ist und der Unterraum $x_0 = 0$ die Kurve C_1' in s verschiedenen Punkten schneidet.

---

1) C_1' kann mehrere algebraische Bestandteile haben.

Die Gleichungen in X_{n-1}, die C_1' definieren, seien $\varphi_\nu(x_0, \ldots, x_{n-1}) = 0$. Der Kegel S_2 wird dann beschrieben durch eben diese Gleichungen

$$\varphi_\nu(x_0, \ldots, x_{n-1}) = 0$$

in X_n. Sie werden von den Punkten aller Geraden durch C_1' und P_0 und nur durch Punkte solcher Geraden erfüllt.

Es sei Y_{n-1} ein weiterer projektiver Raum mit den Koordinaten $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ und T_1 eine projektive Gerade mit den Koordinaten (t_0, t_1). Wir betrachten zwischen X_n und dem Produktraum $T_1 \times Y_{n-1}$ die Korrespondenz Ψ:

$$x_i\, y_j = x_j\, y_i \qquad (i, j = 0, \ldots, n-1;\ i \neq j),$$
$$t_0\, x_n = t_1\, x_0.$$

Ψ ist birational, denn einem allgemeinen Punkt $(x_0, \ldots, x_n)$ aus X_n einerseits und einem allgemeinen Punkt $(t_0, t_1; y_0, \ldots, y_{n-1})$ aus $T_1 \times Y_{n-1}$ andererseits ist dabei eindeutig ein Punkt aus $T_1 \times Y_{n-1}$ bzw. aus X_n zugeordnet in der Form

$$\begin{aligned} &\varrho\, y_j = x_j \quad (j = 0, \ldots, n-1), && \\ &\sigma\, t_0 = x_0, && \text{bzw. } \gamma\, x_i = t_0\, y_i \ (i = 0, \ldots, n-1) \\ &\sigma\, t_1 = x_n, && \gamma\, x_n = t_1\, y_0. \end{aligned}$$

Die durch $\varphi_\nu(y_0, \ldots, y_{n-1})$ in Y_{n-1} gegebene Kurve werde mit C_1 bezeichnet. Nun schränken wir die Korrespondenz Ψ auf S_2 und $T_1 \times C_1$ ein. Damit erhalten wir eine Abbildung zwischen S_2 und $T_1 \times C_1$, die eineindeutig und in beiden Richtungen stetig ist bis auf folgende Ausnahmen:

1. die Menge $K' = S_1$ aller Punkte der s Schnittgeraden von S_2 mit der durch $x_0 = 0$ gegebenen Hyperebene in X_n;
2. die Vereinigungsmenge $K = (T_0 \times C_1) \cup (T_1 \times C_0)$, wobei T_0 der Punkt $(0, 1)$ auf T_1 und C_0 die Menge der s Schnittpunkte von C_1 mit der durch $y_0 = 0$ gegebenen Hyperebene in Y_{n-1} bedeuten.

2. Bekannte Begriffe und Sätze

Die algebraischen Flächen sind triangulierbar [6, 7]. Man kann Homologiegruppen $\boldsymbol{H}_r(S)$ und relative Homologiegruppen $\boldsymbol{H}_r(S, K')$ mit ganzzahligen Koeffizienten definieren. Sie seien nichtaugmentiert[1]). Für sie sind die folgenden drei Aussagen bekannt [2]:

Es gibt eine exakte Homologiesequenz

$$\to \boldsymbol{H}_r(K') \xrightarrow{i_*} \boldsymbol{H}_r(S) \xrightarrow{j_*} \boldsymbol{H}_r(S, K') \xrightarrow{\partial_*} \boldsymbol{H}_{r-1}(K') \to . \tag{2.1}$$

[1]) Das wirkt sich auf die nullte Homologiegruppe aus [3].

Wenn R ein topologischer Raum, A eine abgeschlossene Menge von R und U eine offene Menge von R mit $U \subset A$ sind, gilt (Ausschneidungssatz)

$$\boldsymbol{H}_r(R - U, A - U) \cong \boldsymbol{H}_r(R, A) \text{ für alle } r. \tag{2.2}$$

Sind $B \subset A \subset R$, so ist die Tripelsequenz

$$\rightarrow \boldsymbol{H}_r(A, B) \rightarrow \boldsymbol{H}_r(R, B) \rightarrow \boldsymbol{H}_r(R, A) \rightarrow \boldsymbol{H}_{r-1}(A, B) \rightarrow \tag{2.3}$$

exakt.

Es ist weiter bekannt [6], daß die nichtaugmentierten Homologiegruppen eines n-dimensionalen projektiven Raumes R

$$\boldsymbol{H}_r(R) = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \text{für } r < 0 \text{ oder } r \text{ ungerade oder } r > 2n, \\ \boldsymbol{Z} & \text{für } r \text{ gerade und } 0 \leqq r \leqq 2n \end{cases} \tag{2.4}$$

sind, Als Repräsentanten der Erzeugendenklasse von $\boldsymbol{H}_{2r'}(R)$ $(0 \leqq r' \leqq n)$ kann man einen linearen Unterraum r'-ter Dimension wählen.

Nach Satz (5.1) aus [1] gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sind } S_2 - K' \text{ und } (T_1 \times C_1) - K \text{ homöomorph, so sind die} \\ \text{Homologiegruppen } \boldsymbol{H}_r(S_2, K') \text{ und } \boldsymbol{H}_r(T_1 \times C_1, K) \text{ isomorph.} \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

Schließlich gilt:

$$\text{Zwei Geraden auf } S_2 \text{ durch } P_0 \text{ sind homolog.} \tag{2.6}$$

Das folgt daraus, daß C_1 topologisch zusammenhängend ist und diese Geraden eineindeutig den Punkten von C_1 entsprechen.

3. Bestimmung der Homologiegruppen

Es sollen die Homologiegruppen $\boldsymbol{H}_r(S_2)$ bestimmt werden, wenn die Gruppen $\boldsymbol{H}_r(C_1)$ gegeben sind. Es ist [3, 1]

$$\boldsymbol{H}_r(C_0) = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \text{für } r \neq 0, \\ \overset{s}{\bigoplus} \boldsymbol{Z} & \text{für } r = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{H}_r(C_1) = \begin{cases} \overset{d}{\bigoplus} \boldsymbol{Z} & \text{für } r = 2, \\ \overset{e}{\bigoplus} \boldsymbol{Z} & \text{für } r = 1, \\ \boldsymbol{Z} & \text{für } r = 0, \\ \boldsymbol{0} & \text{für } r \neq 0, 1, 2, \end{cases} \tag{3.2}$$

wobei d die Anzahl der algebraischen Bestandteile der topologisch zusammenhängenden Kurve C_1 bedeutet und e nach [1], 7., zu bestimmen ist.

Zur Berechnung von $\boldsymbol{H}_r$ (S_2) soll die exakte Sequenz

$$\rightarrow \boldsymbol{H}_r(K') \xrightarrow{i_*} \boldsymbol{H}_r(S_2) \rightarrow \boldsymbol{H}_r(S_2, K') \rightarrow \boldsymbol{H}_{r-1}(K') \rightarrow \tag{3.3}$$

herangezogen werden. Dazu muß $\boldsymbol{H}_r(S_2, K')$ bekannt sein. Da $S_2 - K'$ und $(T_1 \times C_1) - K$ homöomorph sind (vgl. Abschnitt 1), gilt nach (2.5)

$$\boldsymbol{H}_r(S_2, K') \cong \boldsymbol{H}_r(T_1 \times C_1, K). \tag{3.4}$$

Die Gruppen $\boldsymbol{H}_r(T_1 \times C_1, K)$ werden mit Hilfe der exakten Tripelsequenz (2.3)

$$\begin{aligned} &\to \boldsymbol{H}_r(K, T_0 \times C_1) \to \boldsymbol{H}_r(T_1 \times C_1, T_0 \times C_1) \to \\ &\to \boldsymbol{H}_r(T_1 \times C_1, K) \to \boldsymbol{H}_{r-1}(K, T_0 \times C_1) \to \end{aligned} \tag{3.5}$$

bestimmt.

Aus dem Ausschneidungssatz (2.2) folgt mit $R = K = (T_0 \times C_1) \cup (T_1 \times C_0)$, $A = T_0 \times C_1$ und $U = T_0 \times (C_1 - C_0)$

$$\boldsymbol{H}_r(K, T_0 \times C_1) \cong \boldsymbol{H}_r(T_1 \times C_0, T_0 \times C_0). \tag{3.6}$$

Unter Beachtung von (2.4) ergeben sich aus der Künnethschen Formel [5]:

$$\boldsymbol{H}_r(T_i \times C_k) = \bigoplus_{q+p=r} \boldsymbol{H}_q(T_i) \otimes \boldsymbol{H}_p(C_k) = \begin{cases} \boldsymbol{H}_r(C_k) & \text{für } i = 0, \\ \boldsymbol{H}_r(C_k) \oplus \boldsymbol{H}_{r-2}(C_k) & \text{für } i = 1 \end{cases}$$

$(k = 0, 1)$.

Zur Berechnung von $\boldsymbol{H}_r(T_1 \times C_k, T_0 \times C_k)$ für $k = 0, 1$ verwenden wir die exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \to \boldsymbol{H}_r(T_0 \times C_k) & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{H}_r(T_1 \times C_k) & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{H}_r(T_1 \times C_k, T_0 \times C_k) & \xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{H}_{r-1}(T_0 \times C_k) \xrightarrow{i_*} \\ \| & & \| & & & & \| \\ \to \boldsymbol{H}_r(C_k) & \to & \boldsymbol{H}_r(C_k) \oplus \boldsymbol{H}_{r-2}(C_k) & & & & \boldsymbol{H}_{r-1}(C_k). \end{array} \tag{3.7}$$

Die jeweilige Klasse $[T_0]$ ist erzeugende Klasse von $\boldsymbol{H}_0(T_i)$ für $i = 0, 1$. Bei i_* wird die erzeugende Klasse $[T_0, c] \in \boldsymbol{H}_r(T_0 \times C_k)$ (c ist Zyklus aus einer erzeugenden Klasse von C_k) auf die entsprechende auch erzeugende Klasse $[T_0, c] \in \boldsymbol{H}_r(T_1 \times C_k)$ abgebildet. Also ist i_* ein Monomorphismus. Daraus und aus der Exaktheit der Sequenz (3.7) erfährt man, daß

$$\boldsymbol{H}_r(T_1 \times C_k, T_0 \times C_k) = \boldsymbol{H}_{r-2}(C_k).$$

Wir setzen dieses Ergebnis unter Beachtung von (3.6) in die Sequenz (3.5) ein:

$$\begin{array}{ccccc} \to \boldsymbol{H}_r(K, T_0 \times C_1) & \xrightarrow{I_*} & \boldsymbol{H}_r(T_1 \times C_1, T_0 \times C_1) & \to & \boldsymbol{H}_r(T_1 \times C_1, K) \to \\ \| & & \| & & \\ \boldsymbol{H}_r(T_1 \times C_0, T_0 \times C_0) & & \| & & \\ \| & & \| & & \\ \boldsymbol{H}_{r-2}(C_0) & \to & \boldsymbol{H}_{r-2}(C_1). & & \end{array} \tag{3.8}$$

Nach (3.1) und (3.2) sind also in dieser Sequenz folgende Gruppen bekannt:

r	$\boldsymbol{H}_r(K, T_0 \times C_1)$	$\boldsymbol{H}_r(T_1 \times C_1, T_0 \times C_1)$	$\boldsymbol{H}_r(T_1 \times C_1, K)$
4	0	$\overset{d}{\oplus} \boldsymbol{Z}$	
3	0	$\overset{e}{\oplus} \boldsymbol{Z}$	
2	$\overset{s}{\oplus} \boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}$	
1	0	0	
0	0	0	

(3.9)

Aus der Exaktheit von (3.8) folgt zunächst

$$\boldsymbol{H}_r(T_1 \times C_1, K) = \boldsymbol{0} \text{ für } r \neq 2, 3, 4 \text{ und } \boldsymbol{H}_4(T_1 \times C_1, K) = \overset{d}{\oplus} \boldsymbol{Z}.$$

Es ist $\boldsymbol{H}_2(T_1 \times C_1, K) = \boldsymbol{0}$, weil bei der I_* entsprechenden Abbildung $\boldsymbol{H}_0(C_0) \to \boldsymbol{H}_0(C_1)$ jede erzeugende Klasse $[c_0^j]$ (c_0^j sei einer der s Punkte von C_0) auf die erzeugende Klasse $[c_0^0]$ von $\boldsymbol{H}_0(C_1)$ (c_0^0 sei ein Punkt von C_1) abgebildet wird. Dazu beachte man, daß i_* in (3.7) für jedes r ein Monomorphismus ist. Weiter sind die in (3.9) angegebenen Gruppen frei. Damit erhält man (siehe auch [1], Satz 6.22)

$$\boldsymbol{H}_3(T_1 \times C_1, K) = \overset{e+s-1}{\oplus} \boldsymbol{Z}.$$

Mit der Isomorphie (3.4.) ergibt sich also

$$\boldsymbol{H}_r(S_2, K') = \begin{cases} \overset{d}{\oplus} \boldsymbol{Z} & \text{für } r = 4, \\ \overset{e+s-1}{\oplus} \boldsymbol{Z} & \text{für } r = 3, \\ \boldsymbol{0} & \text{für } r \neq 3, 4. \end{cases}$$

K' besteht aus s Geraden, die sich alle in der Spitze P_0 schneiden. Es ist daher ([1], 7.)

$$\boldsymbol{H}_r(K') = \begin{cases} \overset{s}{\oplus} \boldsymbol{Z} & \text{für } r = 2 \\ \boldsymbol{Z} & \text{für } r = 0 \\ \boldsymbol{0} & \text{für } r \neq 0, 2. \end{cases}$$

In der Sequenz (3.3) sind also folgende Gruppen bekannt:

r	$\boldsymbol{H}_r(K')$	$\boldsymbol{H}_r(S_2)$	$\boldsymbol{H}_r(S_2, K')$
4	$\boldsymbol{0}$		$\overset{d}{\oplus} \boldsymbol{Z}$
3	$\boldsymbol{0}$		$\overset{e+s-1}{\oplus} \boldsymbol{Z}$
2	$\overset{s}{\oplus} \boldsymbol{Z}$		$\boldsymbol{0}$
1	$\boldsymbol{0}$		$\boldsymbol{0}$
0	$\boldsymbol{Z}$		$\boldsymbol{0}$

(3.10)

Aus der Exaktheit von (3.3) folgt zunächst

$$\boldsymbol{H}_r(S_2) = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \text{für } r \neq 0, 2, 3, 4, \\ \boldsymbol{Z} & \text{für } r = 0, \\ \overset{d}{\oplus} \boldsymbol{Z} & \text{für } r = 4. \end{cases}$$

Jede erzeugende Klasse von $\boldsymbol{H}_2(K')$ wird durch eine der s Geraden von K' repräsentiert. Diese werden bei i'_* auf eine einzige von einer Geraden G repräsentierte Klasse $[G]$ von $\boldsymbol{H}_2(S_2)$ abgebildet; vgl. (2.6).

Die von $[G]$ erzeugte zyklische Gruppe ist frei, weil bei der Einbettung von S_2 in den Raum X_n die Gerade G die einzige erzeugende Klasse von $\boldsymbol{H}_2(X_n)$ repräsentiert; vgl. (2.4). Also ist

$$\boldsymbol{H}_2(S_2) = \boldsymbol{Z}.$$

Man ergänze (3.10) durch die bisher erhaltenen Ergebnisse. Dann sind alle darin vorkommenden Gruppen frei. Damit erhält man schließlich (siehe auch [1], Satz 6.22)

$$\boldsymbol{H}_3(S_2) = \overset{e}{\oplus} \boldsymbol{Z}.$$

Vergleicht man die Ergebnisse mit den Homologiegruppen von P_0 und C_1, so ist offenbar

$$\boldsymbol{H}_r(S_2) \cong \boldsymbol{H}_r(P_0) \oplus \boldsymbol{H}_{r-2}(C_1).$$

LITERATUR

[1] DRECHSLER, K.: Homologiegruppen rationaler Varietäten. Math. Nachr. *46* (1970), 107—136.

[2] EILENBERG, E. S., and N. STEENROD: Foundations of algebraic topology. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1952.

[3] HOCKING, J. G., and G. S. YOUNG: Topology. Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Mass., 1961.

[4] KELLER, O.-H.: Bestimmung von Homologiebasen durch Projektionen. Math. Nachr. *45* (1970), 295—306.

[5] LEFSCHETZ, S.: Algebraic Topology. Amer. Math. Soc., New York 1942.

[6] VAN DER WAERDEN, B. L.: Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie. Math. Ann. *102* (1929), 337—362.

[7] VAN DER WAERDEN, B. L.: Einführung in die algebraische Geometrie. Springer, Berlin 1939.

Manuskripteingang: 9. 12. 1971

VERFASSER:
KONRAD DRECHSLER und ULRICH STERZ, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg