Beiträge zur Algebra und Geometrie
2 (1974), 127—138

Einige Probleme der Erweiterungstheorie lokaler Ringe

LOTHAR BUDACH und HEINZ-JÖRG FITZNER

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

Einleitung

Wir gehen aus von einem Noetherschen Ring A und betrachten den Verband der Oberringe von A, die in dem vollen Quotientenring $Q(A)$ enthalten sind. Ist A nulldimensional (d. h. Artinsch), so ist die Struktur dieses Verbandes trivial. Der Verband besteht nur aus einem Element, dem Ring A, da $A = Q(A)$. Ist A ein eindimensionaler, ganz abgeschlossener Noetherscher Integritätsbereich, so entspricht dieser Verband gerade der Potenzmenge von Spec A. Jeder Oberring von A entsteht durch Quotientenbildung nach einem entsprechenden multiplikativ abgeschlossenen System von Idealen. Sofern A Hauptordnung in einem algebraischen Zahl- oder Funktionenkörper ist, kann man jeden Oberring durch Quotientenbildung nach einem multiplikativ abgeschlossenen System von Elementen erhalten (vgl. [7]).
Ist A ein eindimensionaler Noetherscher Integritätsbereich, so gibt es für den Verband der Oberringe zahlreiche Ergebnisse z. B. durch GRELL und BUDACH [1, 2, 6, 7].
Betrachtet man eindimensionale lokale Ringe, von denen nicht mehr vorausgesetzt wird, daß sie Integritätsbereiche sind, so zeigt sich, daß ihre Oberringe im allgemeinen nicht mehr Noethersch sind (Beispiel 2.1.). Jedoch kann man zeigen (2.8), daß alle Ideale, die wenigstens einen Nichtnullteiler haben, endlich erzeugbar sind. Aussagen über den Verband der Oberringe von ein-

dimensionalen Ringen ermöglichen es in gewissen Fällen auch, Aussagen über Oberringe von Noetherschen Integritätsbereichen der Dimension 2 zu gewinnen. Ein Beispiel dafür ist der Ring der globalen Schnitte der Strukturgarbe des punktierten Spektrums eines zweidimensionalen lokalen Integritätsbereiches A mit dem Maximalideal $\mathfrak{m}$. Dieser Ring besteht aus allen Elementen des Quotientenkörpers von A, die, mit einer gewissen Potenz von $\mathfrak{m}$ multipliziert, in A liegen. Er wurde von M. Nagata [13] als $\mathfrak{m}$-Transformierte $T_m(A)$ und von L. Budach [3] als $\mathfrak{m}$-Quotientenring $\langle\mathfrak{m}^{-1}\rangle A$ bezeichnet. Es gilt

$$\langle\mathfrak{m}\rangle^{-1} A = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}} A_{\mathfrak{p}},$$

wobei $\mathfrak{P}$ die Menge der minimalen Primideale von A ist. W. Hainzer, J. Ohm und R. L. Pendleton [10] haben gezeigt, daß die fast-ganze Abschließung von $\langle\mathfrak{m}\rangle^{-1} A$ mit der ganzen Abschließung von $\langle\mathfrak{m}\rangle^{-1} A$ übereinstimmt. Das gibt einen Hinweis darauf, daß $\langle\mathfrak{m}^{-1}\rangle A$ möglicherweise Noethersch ist. Diese Vermutung wurde im November 1968 in einem Brief von J. Ohm an L. Budach ausgesprochen. Die Autoren dieser Arbeit haben in einem Reprint 1969 [5] gezeigt, daß $\langle\mathfrak{m}\rangle^{-1} A$ 2-Noethersch ist, d. h., daß für jede Teilerkette

$$\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{b}_2 \subset \cdots$$

von Idealen aus $B := \langle\mathfrak{m}\rangle^{-1} A$ gilt: Es gibt ein n_0, so daß $\mathfrak{b}_{n+1}/\mathfrak{b}_n$ für alle $n > n_0$ Noetherscher B-Modul ist. Daraus folgt insbesondere schon, daß alle Maximalideale eine endliche Basis haben. T. Zink konnte in seiner Diplomarbeit [13] dann unter Verwendung von Methoden der lokalen Kohomologie zeigen, daß die Vermutung von J. Ohm in der Tat richtig ist. Im dritten Abschnitt der vorliegenden Arbeit wird ein vereinfachter Beweis dieser Tatsache gegeben.

In vielen Fällen ist $\langle\mathfrak{m}\rangle^{-1} A = A$. Im 4. Abschnitt werden Kriterien dafür angegeben.

Wir danken Herrn T. Zink für wesentliche Anregungen, ohne die der Abschluß des 3. Abschnitts nicht möglich gewesen wäre.

1. Terminologie und benötigte Sätze

1.1. Terminologie

Unter einem Oberring B von A verstehen wir immer einen Oberring von A, der in $Q(A)$ enthalten ist. Ein lokaler Ring (semilokaler Ring) ist immer ein Noetherscher Ring mit genau einem Maximalideal (nur endlich vielen Maximalidealen). Einen Ring mit genau einem Maximalideal (nur endlich vielen Maximalidealen), der nicht notwendig Noethersch ist, bezeichnen wir als quasilokal (quasisemilokal).

Ein Modul M heißt

a) O-Noethersch, wenn $M = O$ ist,

b) $(m + 1)$-Noethersch, wenn für jede Kette $M_1 \subseteqq M_2 \subseteqq \cdots$ von Untermoduln eine natürliche Zahl n_0 existiert, für die M_{n+1}/M_n m-Noethersch für alle $n > n_0$ ist,

c) m-Noethersch für eine Limeszahl m, wenn M n-Noethersch für ein $n < m$ ist,

d) ∞-Noethersch, wenn M m-Noethersch für irgendeine Ordinalzahl m ist.

Im besonderen sind die 1-Noetherschen Moduln gerade die Noetherschen Moduln.

Ein Grellscher Ring ist ein eindimensionaler Noetherscher Integritätsbereich.

Das Zeichen $:=$ wird in Definitionsgleichungen verwendet, z. B.

$$Q(A) := \left\{\frac{a}{s};\ a \in A,\ s \text{ Nichtnullteiler in } A\right\}.$$

Als Spezialfall des Satzes von Krull-Akizuki ergibt sich:

1.2. Satz. *Ist A Grellsch und B Oberring von A, so ist B Grellsch.*

Weiterhin benötigen wir die folgenden Sätze.

1.3. Satz. *Ist A lokaler Grellscher Ring, so ist $Q(A)$ ein 2-Noetherscher A-Modul* ([5], Korollar 4.7., Seite 151).

1.4. Satz. *Die m-Noetherschen Moduln bilden eine dichte Unterkategorie der Kategorie aller Moduln.*

1.5. Satz. *Jeder ∞-Noethersche Vektorraum V ist Noethersch* ([11]).

Beweis. Sei V nicht Noethersch, aber ∞-Noethersch. Dann gibt es unendlich viele linear unabhängige Vektoren v_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots$ Die lineare Hülle L der v_{ij} ist nach 1.4 ebenfalls ∞-Noethersch. Da L nicht Noethersch ist, gibt es ein $n > 0$, so daß $m = n + 1$ die kleinste Zahl ist, für die L m-Noethersch ist. Es sei L_i' die lineare Hülle der v_{ij}, $j = 1, 2, \ldots$ L_i' ist isomorph zu L. Mit $L_i := \sum_{j \leqq i} L_j'$ existiert eine Kette $L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset \cdots$ von Untervektorräumen von L. Daher gibt es ein n_0, so daß L_{r+1}/L_r für alle $r \geqq n_0$ n-Noethersch ist. L_{r+1}/L_r ist aber für alle r isomorph zu L'_{r+1}, also auch isomorph zu L. Daher ist auch L n-Noethersch, was aber ein Widerspruch zur Wahl von m ist.

1.6. Satz. *Ist M ein n-Noetherscher Modul, dann ist $S^{-1}M$ für jedes multiplikativ abgeschlossene System S von A ein n-Noetherscher A_S-Modul.*

Beweis. Wir werden den Satz durch Induktionsschluß beweisen. Für $n = 1$ ist die Aussage wohlbekannt. Offensichtlich können wir uns noch auf den Fall beschränken, daß $n \neq \infty$ und keine Limeszahl ist. Sei dann $M_1 \subseteqq M_2 \subseteqq \cdots$ eine aufsteigende Kette von A_S-Untermoduln in $S^{-1}M$. Ist $i: M \to S^{-1}M$

die kanonische Abbildung von M in $S^{-1}M$, so wird durch i eine aufsteigende Kette von A-Untermoduln $i^{-1}(M_1) \subseteqq i^{-1}(M_2) \subseteqq \cdots$ in M induziert. Nach Voraussetzung gibt es daher eine natürliche Zahl n_0, so daß $i^{-1}(M_{q+1})/i^{-1}(M_q)$ für alle $q \geqq n_0$ $(n - 1)$-Noethersch ist. Nach Induktionsvoraussetzung für $n - 1$ ist in Folge der Isomorphien

$$(i^{-1}(M_{q+1})/i^{-1}(M_q))_S \simeq (i^{-1}(M_{q+1}))_S/(i^{-1}(M_q))_S \simeq M_{q+1}/M_q$$

M_{q+1}/M_q $(n - 1)$-Noethersch für $q \geqq n_0$, w. z. b. w.

1.7. Satz. *Ist $(A; \mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r)$ ein semilokaler Ring und S_i das Komplement von $\mathfrak{m}_i$ in A, so ist ein A-Modul M genau dann n-Noethersch, wenn $S_i^{-1} M$ für alle $i = 1, \ldots, r$ ein n-Noetherscher $S_i^{-1} A$-Modul ist.*

Beweis. Wir werden den Satz wieder durch Induktionsschluß beweisen. Für $n = 0, 1$ ist die Aussage bekannt, und wir können uns auf den Fall beschränken, daß $n \neq \infty$ und keine Limeszahl ist. Sei die letztere Bedingung des Satzes erfüllt und $M_1 \subseteqq M_2 \subseteqq \cdots$ eine aufsteigende Kette von A-Untermoduln in M. Für jedes $i = 1, \ldots, r$ wird dann eine Kette $S_i^{-1}M_1, S_i^{-1}M_2, \ldots$ von $S_i^{-1} A$-Untermoduln in $S_i^{-1}M$ induziert. Es existiert dann nach Voraussetzung ein n_0, so daß für $q > n_0$ $S_i^{-1}M_{q+1}/S_i^{-1}M_q$ $(n - 1)$-Noethersch ist für alle i. Infolge der Isomorphie $S_i^{-1}M_{q+1}/S_i^{-1}M_q \simeq S_i^{-1}(M_{q+1}/M_q)$ und der Induktionsvoraussetzung für $n - 1$ ist M_{q+1}/M_q für $q > n_0$ $(n - 1)$-Noethersch, w. z. b. w. Da die andere Richtung durch 1.6 bewiesen ist, ist damit 1.7 verifiziert.

1.8. Satz. *Ein n-Noetherscher Modul M über einem halbeinfachen Artinschen Ring A ist ein Noetherscher Modul.*

Beweis. Da $A = (A; \mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r)$ ein halbeinfacher Artinscher Ring ist, d. h. $\bigcap_i \mathfrak{m}_i = (0)$, ist A direkte Summe von Körpern $A/\mathfrak{m}_1 + \cdots + A/\mathfrak{m}_r$. Andererseits ist wegen $\bigcap \mathfrak{m}_i = (0)$ $S_i^{-1} A \simeq A/\mathfrak{m}_i$, also nach 1.6 ist $S_i^{-1}M$ n-Noetherscher Vektorraum über $A/\mathfrak{m}_i$ und damit nach 1.5 Noethersch für alle i. Aus 1.7 folgt schließlich die Behauptung.

1.9. Satz. *Es seien $M_1, \ldots, M_n$ Untermoduln eines A-Moduls M derart, daß $M/M_1, \ldots, M/M_n$ m-Noethersche A-Moduln sind. Dann ist $M/M_1 \cap \cdots \cap M_n$ ebenfalls m-Noethersch.*

Beweis. Offensichtlich genügt es, den Satz für $n = 2$ zu beweisen. Dann ergibt sich die Behauptung aus 1.4, der Voraussetzung und der exakten Folge

$$\begin{array}{l} 0 \to M_1/M_1 \cap M_2 \to M/M_1 \cap M_2 \to M/M_1 \to 0. \\ \qquad\quad \wr\!\wr \\ \quad (M_1 + M_2)/M_2 \end{array}$$

2. Oberringe von eindimensionalen lokalen Ringen

Die Oberringe eines lokalen Ringes der Dimension 1 sind nicht notwendig Noethersch. Wir geben hierzu ein Beispiel.

2.1. Beispiel. C sei ein diskreter Bewertungsring vom Rang 1, p sei das erzeugende Element des Maximalideals dieses Ringes und R sein Quotientenkörper. $A := C[x]/(x^2)$ ist eindimensional, denn (x^2) und (x) haben das gleiche Radikal in A, und $C[x]/(x)$ ist isomorph zu C, also eindimensional. A ist als C-Modul isomorph zu der direkten Summe $C + x\,C$. Die Multiplikation ist durch

$$(c_1 + x\,c_2)\,(c_1' + x\,c_2') = c_1\,c_1' + x(c_2\,c_1' + c_1\,c_2')$$

definiert. Eine maximale Primidealkette in A ist $x\,C \subset p\,C + x\,C$. Der volle Quotientenring $Q(A)$ läßt sich als direkte Summe schreiben: $Q(A) = R + x\,R$. $B := C + x\,R$ ist eindimensionaler lokaler Oberring von A ($x\,R \subset p\,C + x\,R$ ist eine Primidealkette maximaler Länge). Nach dem Krullschen Durchschnittssatz müßte der Durchschnitt aller Potenzen des Ideals $p\,C + x\,R$ gleich dem Nullideal sein, wenn B Noethersch wäre. Dieser Durchschnitt ist aber gleich dem Ideal $x\,R$, d. h., B kann nicht Noethersch sein.

Während für eindimensionale Noethersche Integritätsbereiche die Oberringe Noethersch sind, zeigt das Beispiel 2.1., daß das für eindimensionale Noethersche Ringe mit Nullteilern nicht mehr richtig ist. Wir können aber im lokalen Fall den folgenden Satz zeigen.

2.2. Satz. *Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler eindimensionaler Ring, so ist der volle Quotientenring $Q(A)$ ein 2-Noetherscher A-Modul.*

Beweis. Besitzt das Nullideal von A $\mathfrak{m}$ als Primteiler, so ist $A = Q(A)$ und die Aussage damit trivial. Wir setzen daher im folgenden voraus, daß das Nullideal keinen eingebetteten Primteiler besitzt. Die Menge der minimalen Primideale von A ist endlich, da die minimalen Primideale die zum Nullideal gehörigen Primideale sind. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, daß A ein einziges minimales Primideal $\mathfrak{p}$ besitzt. $\mathfrak{p}\,Q(A) := P$ ist dann das Primideal des Artinschen Ringes $Q(A)$, und es gilt $P^s = (0)$ für eine natürliche Zahl s. P^v/P^{v+1} ist für alle natürlichen Zahlen v endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper $Q(A)/P$, da $Q(A)$ Artinsch ist. Es ist nach Satz 1.3. $Q(A)/P$ als $A/\mathfrak{p}$-Modul 2-Noethersch und damit auch als A-Modul 2-Noethersch. Nach 1.4. ist damit P^v/P^{v+1} 2-Noetherscher A-Modul. Da in der Kette

$$(0) = P^s \subset P^{s-1} \subset \cdots \subset P \subset Q(A)$$

alle Kompositionsfaktoren 2-Noethersche A-Moduln sind, folgt nach 1.4., daß $Q(A)$ 2-Noetherscher A-Modul ist.

Sei nun A ein eindimensionaler lokaler Ring, und seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die minimalen Primideale desselben. Sei $(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ die Primärzerlegung des Nullideals, $\mathfrak{p}_i$ das zu $\mathfrak{q}_i$ gehörige Primideal. Dann ist $Q(A)/Q(A)\ \mathfrak{q}_i \simeq Q(A/\mathfrak{q}_i)$ nach dem bereits bewiesenen ein 2-Noetherscher A-Modul, und daher ist nach 1.9. $Q(A)$ ein 2-Noetherscher A-Modul.

Aus 1.4. folgt direkt

2.3. Korollar. *Jeder Oberring B von A ist 2-Noetherscher A-Modul und daher auch als B-Modul 2-Noethersch.*

2.4. Satz. *Jeder Oberring B von A ist quasisemilokal.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die minimalen Primideale von A. $P_i := \mathfrak{p}_i Q(A)$ sind dann die Primideale von $Q(A)$. Setzt man $\mathfrak{p}_i' = P_i \cap B$, so sind im Durchschnitt $\cap\, \mathfrak{p}_i'$ nur nilpotente Elemente enthalten. Daher sind die Maximalideale von B Elemente von $\cup\, V(\mathfrak{p}_i')$. Für jedes i entspricht die Menge der Maximalideale aus $V(\mathfrak{p}_i')$ gerade der Menge der Maximalideale von $B/\mathfrak{p}_i'$. Dieser Ring ist aber als Oberring des primären Integritätsbereiches $A/\mathfrak{p}_i$ semilokal ([8]), womit die Behauptung bewiesen ist.

Besonderes Interesse verdient die Untersuchung der folgenden Frage: Welche Oberringe von A sind wieder Noethersch? Deshalb wollen wir uns jetzt mit der endlichen Erzeugbarkeit der Ideale eines Oberringes B von A beschäftigen.

2.5. Satz. *Jedes Ideal $\mathfrak{b}$ eines Oberringes B ist modulo $\mathfrak{m}\,\mathfrak{b}$ ein Noetherscher A-Modul.*

Beweis. Nach 2.3. ist B 2-Noetherscher A-Modul, nach 1.4. ist $\mathfrak{b}/\mathfrak{m}\,\mathfrak{b}$ 2-Noetherscher A-Modul und damit 2-Noetherscher $A/\mathfrak{m}$-Modul. Aus 1.5. folgt die Richtigkeit des Satzes.

Als einfache Folgerung ergibt sich nach 2.4.:

2.6. Satz. *Ist $\mathfrak{m}'$ das Jacobson-Radikal von B, so wird jedes Ideal $\mathfrak{b}$ aus B modulo $\mathfrak{m}'\,\mathfrak{b}$ endlich erzeugt.*

2.7. Satz. *Sind die endlich erzeugten Ideale von B topologisch abgeschlossen, so ist B Noethersch.*

Beweis. Nach 2.6. ist jedes Ideal $\mathfrak{b}$ bon B von der Form $\mathfrak{b} = \mathfrak{e} + \mathfrak{m}'\mathfrak{b}$, wobei $\mathfrak{e}$ ein endlich erzeugtes Ideal und $\mathfrak{m}'$ das Jacobson-Radikal von B ist. Dann ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{e} + \mathfrak{m}'\,\mathfrak{b} = \mathfrak{e} + \mathfrak{m}'^2\mathfrak{b} = \cdots = \mathfrak{e}$, da $\mathfrak{e}$ als topologisch abgeschlossen vorausgesetzt wurde.

2.8. Satz. *Jedes Ideal aus B, in dem wenigstens ein Nichtnullteiler enthalten ist, ist endlich erzeugbar.*

Beweis. Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die minimalen Primideale von A und sei $P_i = \mathfrak{p}_i Q(A)$, $\mathfrak{p}_i' = P_i \cap B$. Dann ist $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_1' \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n'$ das Nilradikal von B. $B/\mathfrak{p}_1'$ ist als Oberring von $A/\mathfrak{p}_i$ ein Noetherscher Ring (1.2.) und daher auch ein Noetherscher B-Modul. Aus 1.9. folgt daher, daß $B/\mathfrak{n}$ ein Noetherscher B-Modul ist. Sei nun $\mathfrak{b}$ ein Ideal aus B, in dem wenigstens ein Nichtnullteiler enthalten ist, d. h., für das $\mathfrak{b} \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i'$ gilt. Dann ist das Jacobson-Radikal $\mathfrak{m}'$ von B im Radikal von $\mathfrak{b}$ enthalten, und daher gilt $\mathfrak{m}'^r \subseteqq \mathfrak{b} + \mathfrak{n}$ für eine natürliche Zahl r. Sei $\mathfrak{n}^s = (0)$ (ein solches s gibt es, da $\mathfrak{n}^s \subseteqq (P_1 \ldots P_n)^s = (0)$ für genügend große s ist). Da $B/\mathfrak{n}$ Noethersch ist, ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{e} + \mathfrak{n}$ für ein endlich erzeugbares Ideal $\mathfrak{e}$ von B, und es gilt daher

$$\mathfrak{m}'^{rs} \subseteqq (\mathfrak{b} + \mathfrak{n})^s = (\mathfrak{e} + \mathfrak{n})^s = \mathfrak{e}^s + \mathfrak{e}^{s-1}\mathfrak{n} + \cdots + \mathfrak{e}\,\mathfrak{n}^{s-1} + \mathfrak{n}^s \subseteqq \mathfrak{e}.$$

Nach 2.6. gibt es aber endlich erzeugbare Ideale $\mathfrak{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r\,s)$ mit $\mathfrak{m}^i\,\mathfrak{b} = \mathfrak{e}_{i+1} + \mathfrak{m}^{i+1}\,\mathfrak{b}$. Demzufolge ist

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \cdots + \mathfrak{e}_{rs} + \mathfrak{m}^{rs}\,\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{e}_1 + \cdots + \mathfrak{e}_{rs} + \mathfrak{e} \subseteqq \mathfrak{b},$$

d. h., $\mathfrak{b} = \mathfrak{e}_1 + \cdots + \mathfrak{e}_{rs} + \mathfrak{e}$ ist ein endlich erzeugbares Ideal. Wie das Beispiel 2.1. zeigt, läßt sich dieser Satz nicht mehr verschärfen. In diesem Beispiel ist $\mathfrak{n} = x\,R$ das Nilradikal. Jedes Ideal $\mathfrak{b}$, das einen Nichtnullteiler enthält, d. h. ein Element $c + x\,r$, $c \in C$, $r \in R$ mit $c \neq 0$, enthält ganz $\mathfrak{n}$, da für $r' \in R$ gilt $x\,r' = x\,\frac{r'}{c}\,(c + x\,r)$. Demzufolge ist $\mathfrak{b} = p^s\,B = p^s\,C + \mathfrak{n}$ für eine gewisse natürliche Zahl s. Dagegen hat $\mathfrak{n}$ keine endliche Basis. Wäre nämlich $x\,r_1, \ldots, x\,r_i$ eine endliche Basis von $\mathfrak{n} = x\,R$, so wäre

$$x\,R = B\,x\,r_1 + \cdots + B\,x\,r_i = C\,x\,r_1 + \cdots + C\,x\,r_i$$

und daher $r_1, \ldots, r_i$ eine endliche Basis von R als C-Modul. Also wäre R ein Noetherscher C-Modul. Das steht aber im Widerspruch zu der Tatsache, daß $C \subset \frac{C}{p} \subset \frac{C}{p^2} \subset \cdots$ unendliche Teilerkette von R ist.

3. Der Ring der globalen Schnitte des punktierten Spektrums eines lokalen Integritätsbereiches $(A, \mathfrak{m})$ der Dimension 2

B sei im fogenden immer der Ring der globalen Schnitte der Strukturgarbe des punktierten Spektrums von A. Es ist bekannt, daß $B = \langle \mathfrak{m} \rangle^{-1} A$ ist ([3], 7.3.3.). Wir werden jetzt die Ergebnisse des zweiten Abschnittes auf B anwenden. Dazu benötigen wir den folgenden Satz.

3.1. **Satz.** *Ist a ein Element von A, so ist $\bar{A} := A/a\,B \cap A$ ein eindimensionaler lokaler Ring, dessen Maximalideal $\bar{\mathfrak{m}}$ wenigstens einen Nichtnullteiler besitzt. Mit $\bar{B} = B/a\,B$ gilt $\bar{A} \subseteqq \bar{B} \subseteqq Q(\bar{A})$.*

Beweis. Da $[\bar{A} : \bar{\mathfrak{m}}]_{\bar{B}} = \bar{B}$ ist, genügt es zu zeigen, daß $[A \cap a\,B : \bar{\mathfrak{m}}]_A = A \cap a\,B$, weil das bedeutet, daß $\mathfrak{m}$ nicht Primdivisor von $A \cap a\,B$ ist und damit jede Potenz von $\bar{\mathfrak{m}}$ in $\bar{B}$ reguläre Elemente enthält (hierbei sei $\bar{\mathfrak{m}}$ das Maximalideal von $\bar{A}$). Mit Hilfe der folgenden beiden Beziehungen

a) ist $a_1 \in A$, so folgt $\frac{a_1}{a}\,\mathfrak{m}^l \subseteqq B$ aus $a_1\,\mathfrak{m}^l \subseteqq a\,B$;

b) ist $k\,\mathfrak{m}^l \subseteqq B$ für $k \in Q\,(A)$, so ist k schon aus B, da $k\,\mathfrak{m}^l$ ein endlicher A-Untermodul des A-Moduls B ist,

können wir schließen:

$$[A \cap a\,B : \mathfrak{m}]_A = [a\,B : \mathfrak{m}]_B \cap A \overset{\text{a)}}{\subseteqq} [B : \mathfrak{m}]_{Q(A)}\,a \cap A \overset{\text{b)}}{=} B\,a \cap A,$$

w. z. b. w.

3.2. **Satz.** *B ist 2-Noethersch.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{b}_1 \subseteqq \mathfrak{b}_2 \subseteqq \mathfrak{b}_3 \subseteqq \cdots$ eine aufsteigende Idealfolge in B und $0 \neq a \in \mathfrak{b}_1 \cap A$. Nach 3.1. und 2.2. erhalten wir, daß $B/a\,B$ 2-Noethersch ist. Deshalb gibt es eine natürliche Zahl r, so daß für alle $j > r$

$$\mathfrak{b}_{j+1}/a\,B/\mathfrak{b}_j/a\,B \simeq \mathfrak{b}_{j+1}/\mathfrak{b}_j$$

Noethersch ist, w. z. b. w.

3.3. **Satz.** *Jedes Ideal $\mathfrak{b}$ aus B ist modulo $\mathfrak{m}\,\mathfrak{b}$ ein Noetherscher A-Modul.*

Beweis. Es sei $0 \neq a \in \mathfrak{m}\,\mathfrak{b} \cap A$. B/aB ist nach 3.1. Oberring des eindimensionalen lokalen Ringes $A/a\,B \cap A$. Bezeichnen wir die Restklassenbildung einheitlich mit $^-$, so ergibt sich nach 2.5., daß $\bar{\mathfrak{b}}/\bar{\mathfrak{m}}\,\bar{\mathfrak{b}} \simeq \mathfrak{b}/\mathfrak{m}\,\mathfrak{b}$ ein endlicher A-Modul ist.

3.4. **Satz.** *Die Maximalideale von B sind endlich erzeugt.*

Beweis. Sei $\mathfrak{m}'$ ein Maximalideal von B und $0 \neq a \in \mathfrak{m}' \cap A$. Wendet man 2.8. auf das Ideal $\mathfrak{m}'/a\,B$ aus $B/a\,B$ an, so erhält man die Behauptung.

3.5. Sei P ein beliebiges Primideal aus B. Ist $P \cap A = \mathfrak{m}$ das Maximalideal von A, so ist für ein $0 \neq a \in \mathfrak{m}$ $\bar{P} = P/a\,B$ Oberideal von $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/a\,A$ und daher maximal, d. h., P ist maximal und daher endlich erzeugbar.
Ist $P \cap A = \mathfrak{p}$ ein minimales Primideal aus A, so ist, wie man durch eine leichte Rechnung nachprüft, $P = \langle\mathfrak{m}\rangle^{-1}\,\mathfrak{p}$. Um zu zeigen, daß B Noethersch ist, genügt es daher zu zeigen, daß alle Primideale $P = \langle\mathfrak{m}\rangle^{-1}\,\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ minimal in A, in B endlich erzeugbar sind. Der Beweis dieser Tatsache wurde zuerst von T. ZINK [10] gegeben. Er verwendete dabei Methoden der lokalen Kohomologie. Wir geben im folgenden einen etwas vereinfachten Beweis dieser Tatsache.

3.6. Hilfssatz. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein Ideal aus* A *und ist* $M = A_{f_1} + A_{f_2}$, (f_1, f_2) *sei ein Parametersystem von* $\mathfrak{m}$, *so gilt*

$$\langle\mathfrak{m}\rangle^{-1}\,\mathfrak{a}/B\,\mathfrak{a} \simeq \mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{a}, M) \simeq \mathrm{Tor}_2^A(A/\mathfrak{a}, R^1\langle\mathfrak{m}\rangle^{-1}A).$$

Beweis. Nach [3], 2.1.12., gilt $B = \langle\mathfrak{m}\rangle^{-1}A = A_{f_1} \cup A_{f_2}$. Demzufolge gibt es eine exakte Folge

$$0 \to B \to A_{f_1} \oplus A_{f_2} \xrightarrow{\alpha} M \to 0$$

$(\alpha(A_1, a_2) = a_1 - a_2)$, die, mit $A/\mathfrak{a}$ tensoriert, die exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{a}, M) \to B/B\,\mathfrak{a} \xrightarrow{\beta} A_{f_1}/A_{f_1}\,\mathfrak{a} + A_{f_2}/A_{f_2}\,\mathfrak{a}$$

ergibt (A_{f_1} und A_{f_2} sind flache Moduln). Ker $\beta = A_{f_1}\,\mathfrak{a} \cap A_{f_2}\,\mathfrak{a}/B\,\mathfrak{a} \simeq m^{-1}\,\mathfrak{a}/B\,\mathfrak{a}$ wiederum nach [3], 2.1.12.
Damit ist die erste Isomorphie bewiesen.
Zur zweiten Isomorphie bemerken wir, daß nach [3], 7.4.3. b),

$$R^1\langle\mathfrak{m}\rangle^{-1}A \simeq A_{f_1f_2}/M$$

ist. Tensorieren wir die exakte Folge

$$0 \to M \to A_{f_1f_2} \to R^1\langle\mathfrak{m}\rangle^{-1}A \to 0$$

mit $A/\mathfrak{a}$ und beachten wir, daß $A_{f_1f_2}$ flach ist, so erhalten wir die zweite Isomorphie.

3.7. Sei I die injektive Hülle von $A/\mathfrak{m}$ und D der Funktor

$$D = \mathrm{Hom}_A(-, I).$$

D ist ein exakter Funktor der Kategorie der koendlichen A-Moduln in die Kategorie der Noetherschen $\hat{A}$-Moduln ($\hat{A}$ sei die Komplettierung von A). Aus der Isomorphie

$$\mathrm{Hom}\,(M, D\,N) \simeq D(M \otimes N)$$

ergibt sich die Isomorphie

$$\mathrm{Ext}_A^n(M, D\,N) \simeq D\,\mathrm{Tor}_n^A(M, N).$$

Da $\langle m\rangle^{-1}\,\mathfrak{p}/B\,\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ sei ein minimales Primideal von A) koendlich ist, ist

$$E = \mathrm{Ext}_A^2(A/\mathfrak{p}, D(R^1\langle\mathfrak{m}\rangle^{-1}A)) \simeq D(\mathrm{Tor}_2^A(A/\mathfrak{p}, R^1\langle\mathfrak{m}\rangle^{-1}A))$$

ein Noetherscher A-Modul und daher ein Noetherscher $A/\mathfrak{p}$ A-Modul. Um zu zeigen, daß $\langle\mathfrak{m}\rangle^{-1}\,\mathfrak{p}/B\,\mathfrak{p}$ Noethersch ist, muß man zeigen, daß E Artinsch ist, d. h., man muß zeigen, daß

$$E \otimes_A A_\mathfrak{p} = \mathrm{Ext}_A^2(A/\mathfrak{p}, D(R^1\langle\mathfrak{m}\rangle^{-1}A)) \oplus_A A_\mathfrak{p} = 0$$

ist.
Sei $\hat{A}$ homomorphes Bild eines regulären lokalen Ringes B der Dimension r (einen solchen Ring B gibt es nach den Cohenschen Struktursätzen über kom-

plette lokale Ringe stets). Sei P das Urbild von $\mathfrak{p}\hat{A}$ in B. Dann ist $\hat{A}_\mathfrak{p}$ homomorphes Bild des $(r-1)$-dimensionalen regulären lokalen Ringes $C = B_P$, $D = \hat{A}_p = \hat{A}_{\mathfrak{p}\hat{A}}$, $K = C/P\,C \simeq \hat{A}_\mathfrak{p}/p\,\hat{A}_\mathfrak{p}$. Nach [3], 7.3.9., sowie GROTHENDIECK und HARTSHORNE ([9], Seite 90, Lemma 6.5.) ist

$$R^1\langle\mathfrak{m}\rangle^{-1}A \simeq H^2_\mathfrak{m}(A)$$

und

$$D(R^1\langle\mathfrak{m}\rangle^{-1}A) \simeq D(H^2_\mathfrak{m}(A)) \simeq \operatorname{Ext}^{r-2}_B(\hat{A}, B),$$

und da E ein A-Modul ist, gilt

$$E \otimes_A A_\mathfrak{p} \simeq E \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_\mathfrak{p} \simeq \operatorname{Ext}^2_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\,A_\mathfrak{p}, \operatorname{Ext}^{r-2}_{B_P}(A_\mathfrak{p}, B_P))$$
$$\simeq \operatorname{Ext}^2_D(K, \operatorname{Ext}^{r-2}_C(D, C)).$$

Da D ein C-Cohen-Macaulay-Modul der Kodimension 1 ist, gilt

$$\operatorname{Ext}^q_C(D, C) = 0 \quad \text{für} \quad q \neq r-2$$

(C ist $(r-1)$-dimensionaler regulärer lokaler Ring).
Betrachten wir die Spektralsequenz ([6], Ch. XVI, § 5)

$$E_2^{pq} = \operatorname{Ext}^p_D(K, \operatorname{Ext}^q_C(D, C)) \Rightarrow \operatorname{Ext}^n_C(K, C)$$

und beachten wir, daß $\operatorname{Ext}^n_C(K, C) = 0$ für $n \neq r-1$, so ergibt sich

$$\operatorname{Ext}^2_D(K, \operatorname{Ext}^{r-2}_C(D, C)) = 0.$$

Wir haben also gezeigt, daß $\langle\mathfrak{m}\rangle^{-1}\mathfrak{p}/B\,\mathfrak{p}$ Noethersch ist und daß daher $\langle\mathfrak{m}\rangle^{-1}p$ endlich erzeugbar ist. Nach 3.5. sind also alle Primideale aus B endlich erzeugbar, und es gilt daher:

3.8. Satz. *Der Ring $B = \langle\mathfrak{m}\rangle^{-1}A$ der globalen Schnitte des punktierten Spektrums eines zweidimensionalen lokalen Integritätsbereiches ist ein Noetherscher Ring.*

3.9. Korollar ([10], 2.9.). *Die fast-ganze Abschließung von B stimmt mit der ganzen Abschließung von B überein.*

Wir wollen zum Abschluß der Arbeit noch einige Bedingungen für $B = A$ angeben, d. h. Charakterisierungen für lokale Ringe, bei denen sich jeder Schnitt der Strukturgarbe über dem punktierten Spektrum von A zu einem Schnitt auf ganz Spec A fortsetzen läßt. Ringe, die dieser Eigenschaft genügen, nennen wir in Erweiterung der Definition von KRULL $\langle\mathfrak{m}\rangle$-einbettungsfrei.

4. Kriterien für die $\langle\mathfrak{m}\rangle$-Einbettungsfreiheit von lokalen Integritätsbereichen

4.1. Hilfssatz. *Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale eines Integritätsbereiches A und $0 \neq a \in A$. Dann gilt*

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\,a \cap A = \mathfrak{a}\,a : b$$

$$\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} := [\mathfrak{a} : \mathfrak{b}]_{Q(A)},\ \mathfrak{a} : \mathfrak{b} = [\mathfrak{a} : \mathfrak{b}]_A\right).$$

Ist $a \in \mathfrak{b}$, so gilt ferner

$$\mathfrak{a}\,a : \mathfrak{b} = A\,a \quad \textit{genau dann, wenn} \quad \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = A.$$

Beweis. $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} a \cap A = \frac{\mathfrak{a}a}{\mathfrak{b}} \cap A = \mathfrak{a}\,a : \mathfrak{b}$. Ist $a \in \mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{a}\,a : \mathfrak{b} = A\,a$ genau dann, wenn

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} a \cap A = A\,a, \quad \text{d.h.} \quad \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \cap \frac{A}{a} = \frac{A\,a}{a} = A.$$

4.2. Hilfssatz. *Ist A ein lokaler Integritätsbereich, dessen Maximalideal $\mathfrak{m}$ nicht Hauptideal ist, so gilt*

$$\mathfrak{m}^{-1} := \frac{A}{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}^0 := \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}}$$

und $A\,a : \mathfrak{m} = \mathfrak{m}\,a : \mathfrak{m}$ für alle $a \in A$.

Beweis. Wegen $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^{-1} \subseteq A$ ist entweder $\mathfrak{m}^{-1} = \mathfrak{m}^0$, wenn $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m}$ ist, oder $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} = A$, d. h., $\mathfrak{m}$ ist umkehrbar und damit projektiv. Da jeder projektive Modul über einem lokalen Ring frei ist, ist $\mathfrak{m}$ frei und daher Hauptideal. Die zweite Gleichheit folgt aus 4.1.

4.3. Satz. *Ein lokaler Integritätsbereich A, dessen Maximalideal $\mathfrak{m}$ von einer Höhe größer als 1 ist, ist genau dann $\mathfrak{m}$-einbettungsfrei, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

a) $\mathfrak{m}^{-1} = \frac{A}{\mathfrak{m}} = A$,

b) $\mathfrak{m}^0 = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}} = A$,

c) $A\,a : \mathfrak{m} = A\,a$ *für alle a aus A,*

d) $\mathfrak{m}\,a : \mathfrak{m} = A\,a$ *für alle a aus A,*

e) $A\,a : \mathfrak{m} = A\,a$ *für alle a aus A,*

f) $\mathfrak{m}\,a : \mathfrak{m} = A\,a$ *für ein a aus A,*

g) $C^*_{(\mathfrak{m})}A = A$,

h) $C_{(\mathfrak{m})}\infty\, A = A$.

Beweis. Wegen $\mathfrak{m}^{-1} \subseteq \langle\mathfrak{m}\rangle^{-1}A$ folgt aus der $\langle\mathfrak{m}\rangle$-Einbettungsfreiheit a). Ist $\langle\mathfrak{m}\rangle^{-1}A \neq A$, so gibt es ein $k \in Q(A)\backslash A$ und eine natürliche Zahl r, so daß $k\,\mathfrak{m}^{r-1} \nsubseteq A$ und $k\,\mathfrak{m}^r \subseteq A$. Ist $m \in \mathfrak{m}^{r-1}$ derart, daß $k\,m \notin A$, so ist wegen $k\,m\,\mathfrak{m} \subseteq A$ $\mathfrak{m}^{-1} \neq A$ nachgewiesen. Also ist a) äquivalent zur Einbettungsfreiheit von A. Nach 4.1. und 4.2. sind die Bedingungen a) bis f) alle zueinander äquivalent.

Wegen $C_{(\mathfrak{m})}\infty\, A \subseteq C^*_{\langle\mathfrak{m}\rangle} A \subseteq \mathfrak{m}^{-1}A$ folgt aus der $\langle\mathfrak{m}\rangle$-Einbettungsfreiheit g) und h). Ist g) oder h) erfüllt, so ist nach Definition der auftretenden Funktoren $\mathfrak{m}^0 = A$, und wir können nach b) schließen.

4.4. Korollar (NAGATA). *In einem lokalen Integritätsbereich* $(A, \mathfrak{m})$ *ist* $\mathfrak{m}$ *zugehöriger Primteiler für alle Hauptideale genau dann, wenn* $\mathfrak{m}$ *zugehöriger Primdivisor für ein Hauptideal ist.*

LITERATUR

[1] BUDACH, L.: Aufbau der ganzen Abschließung einartiger Noetherscher Integritätsbereiche I, II. Math. Nachr. *25* (1963), 5—17, 129—149.

[2] BUDACH, L.: Erweiterungstheorie der Grellschen Präschemata. Math. Nachr. *25* (1963), 339—380.

[3] BUDACH, L.: Quotientenfunktoren und Erweiterungstheorie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

[4] BUDACH, L., und H.-J. FITZNER: Einige Probleme der Erweiterungstheorie von eindimensionalen Ringen und über den Ring der globalen Schnitte des punktierten Spektrums eines lokalen Integritätsbereiches der Dimension 2. Forschungsbericht 1969.

[5] BUDACH, L., und K. HASSE: Noethersche Integritätsbereiche mit offenem normalen Ort. Math. Nachr. *39* (1968), 135—160.

[6] CARTAN H., und S. EILENBERG: Homological algebra, Princeton University Press, Princeton 1956.

[7] GRELL, H.: Allgemeine und Elementquotientenringe in endlichen algebraischen Zahlkörpern. Sammelband zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers, Akademie-Verlag, Berlin 1959.

[8] GRELL, H.: Grundlagen zur Strukturtheorie der Integritätsbereiche mit eingeschränkter Minimalbedingung. Festschrift Humboldt-Universität 2, Berlin 1960, S. 15–36.

[9] GROTHENDIECK, A.: Local Cohomology, Lecture notes in Mathematics 41, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1967.

[10] HEINZER, W., J. OHM und R. L. PENDLETON: On integral domains of the form $\bigcap D_P$, P minimal, Z. reine und angew. Math. *241* (1970), 147–159.

[11] HOLZAPFEL, R. P.: Eine allgemeine Primärzerlegungstheorie. Math. Nachr. *41* (1969), 227—245.

[12] KRULL, W.: Einbettungsfreie fast-Noethersche Ringe und ihre Oberringe. Math. Nachr. *21* (1960), 319—338.

[13] NAGATA, M.: A treatise on the 14th problem of Hilbert. Mem. Sci. Kyoto *30* (1956), 57—70.

[14] ZINK, T.: Endlichkeitsbedingungen für einige Quotientenringe, Diplomarbeit, Berlin 1971.

Manuskripteingang: 23. 11. 1971

VERFASSER:

LOTHAR BUDACH, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin

HEINZ-JÖRG FITZNER, Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik der Akademie der Wissenschaften der DDR