

Werk

Titel: Über den Verband aller Lineartopologien eines Noetherschen Ringes

Autor: BUDACH, L.

Jahr: 1974

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0002|log18

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Über den Verband aller Lineartopologien eines Noetherschen Ringes

LOTHAR BUDACH

Für die Erweiterungstheorie von Ringen ist von Bedeutung, die Struktur des Verbandes aller Lineartopologien eines Noetherschen kommutativen Ringes A mit Einselement zu übersehen. Einen gewissen Einblick in diese Struktur gab bereits mein auf dem Prager Kolloquium [2] mitgeteiltes Resultat. Inzwischen ist es gelungen, ein Ergebnis zu finden, das die oben aufgeworfene Frage abschließend beantwortet. In der vorliegenden Arbeit werden das Ergebnis und sein einfacher Beweis mitgeteilt. Alle Bezeichnungen werden wie in [1, 2] verwendet.

1. Seien G und H zwei Halbordnungen, λ und β zwei Ordnungshomomorphismen von G in H . λ heißt *feiner* als β , ($\lambda < \beta$) falls $\lambda(g) < \beta(g)$ für alle $g \in G$ ist. Bezüglich dieser Ordnungsrelation bildet die Menge aller Ordnungshomomorphismen eine Halbordnung.

2. Sei H eine Halbordnung. Jedem $h \in H$ sei eine Halbordnung X_h zugeordnet, und jedem Paar $[h, g]$, $h, g \in H$, $h < g$ sei ein Ordnungshomomorphismus $\lambda_{gh}: X_h \rightarrow X_g$ zugeordnet, so daß für $h < g < f$ gilt $\lambda_{fh} = \lambda_{fg} \circ \lambda_{gh}$. Eine derartige Zuordnung nennen wir ein *Ordnungsspektrum* über H .

Eine Halbordnung X zusammen mit Ordnungshomomorphismen $\lambda_h: X \rightarrow X_h$ heißt *Ordnungslimes* des Ordnungsspektrums $\{X_h\}, \{\lambda_{gh}\}$, wenn

- a) für $h < g$ stets $\lambda_g < \lambda_{gh} \circ \lambda_h$ ist und
- b) $[X, \{\lambda_h\}]$ Lösung des durch a) definierten Universalproblems ist, d. h. genauer: genügt $[X', \{\lambda_h\}]$ ebenfalls der Bedingung a), so gibt es genau einen

Ordnungshomomorphismus

$$\lambda: X' \rightarrow X \text{ mit } \lambda_g \circ \lambda = \lambda'_g \text{ für alle } g \in H.$$

X ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heißt der *Ordnungslimes des Ordnungsspektrums*: $X = \text{Olim } \{X_h; h \in H\}$. X besteht aus allen Funktionen $x: h \in H \mapsto x_h \in X_h$, für die $x_g < \lambda_{gh}(x_h)$ für $h < g$ ist; $\lambda_h(x) = x_h$.

3. Sei A im folgenden stets ein Noetherscher kommutativer Ring mit Einselement, $\text{Spec } A$ das Spektrum von A (die Halbordnung aller Primideale von A). Ist $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, so gibt es einen kanonischen Ringhomomorphismus $\varphi_{\mathfrak{p}}: A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$. Sind $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ zwei Primideale und $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, so gibt es einen kanonischen Ringhomomorphismus $\varphi_{\mathfrak{qp}}: A_{\mathfrak{q}} \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$, so daß $\varphi_{\mathfrak{qp}} \circ \varphi_{\mathfrak{q}} = \varphi_{\mathfrak{p}}$ und für $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{r}$

$$\varphi_{\mathfrak{qp}} \circ \varphi_{\mathfrak{rq}} = \varphi_{\mathfrak{rp}}$$

gilt. Ist F eine $A_{\mathfrak{p}}$ -Idealfilterbasis, so ist $\varphi_{\mathfrak{qp}}^{-1}(F) = \{\varphi_{\mathfrak{qp}}^{-1}(\mathfrak{f}); \mathfrak{f} \in F\}$ eine $A_{\mathfrak{q}}$ -Idealfilterbasis. Ist $F \in \text{Top}(A_{\mathfrak{p}} \parallel \langle \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \rangle)$, so setzen wir

$$\lambda_{\mathfrak{qp}}(F) \stackrel{\text{Def}}{=} \varphi_{\mathfrak{qp}}^{-1}(F) + \langle \mathfrak{m}_{\mathfrak{q}} \rangle.$$

$\lambda_{\mathfrak{qp}}(F)$ besteht also aus allen $\mathfrak{m}_{\mathfrak{q}}$ -primären Idealen die ein $\varphi_{\mathfrak{qp}}^{-1}(\mathfrak{f})$, $\mathfrak{f} \in F$ umfassen. Offensichtlich ist für $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{r}$

$$\lambda_{\mathfrak{rp}} < \lambda_{\mathfrak{rq}} \circ \lambda_{\mathfrak{qp}},$$

und infolgedessen bildet $[\{\text{Top}(A_{\mathfrak{p}} \parallel \langle \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \rangle), \{\lambda_{\mathfrak{qp}}\}]\}$ ein Ordnungsspektrum über $\text{Spec } A$.

Ist F eine A -Idealfilterbasis, so ist $A_{\mathfrak{p}} F$ für $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ eine $A_{\mathfrak{p}}$ -Idealfilterbasis und $\lambda_{\mathfrak{p}}(F) \stackrel{\text{Def}}{=} A_{\mathfrak{p}} F + \langle \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \rangle$ ein Element aus $\text{Top}(A_{\mathfrak{p}} \parallel \langle \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \rangle)$. $\lambda_{\mathfrak{p}}(F)$ besteht aus allen $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ -primären Idealen, die ein $A_{\mathfrak{p}} f$, $f \in F$ umfassen. Die Abbildung

$$\lambda_{\mathfrak{p}}: \text{Top } A \rightarrow \text{Top}(A_{\mathfrak{p}} \parallel \langle \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \rangle),$$

$$F \mapsto A_{\mathfrak{p}} F + \langle \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \rangle$$

ist offensichtlich ein Ordnungshomomorphismus, und es gilt

$$\lambda_{\mathfrak{p}} < \lambda_{\mathfrak{pq}} \circ \lambda_{\mathfrak{q}} \text{ für } \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}.$$

4. Hauptsatz. $[\text{Top } A, \{\lambda_{\mathfrak{p}}\}]$ ist der *Ordnungslimes des Ordnungsspektrums* $[\{\text{Top}(A_{\mathfrak{p}} \parallel \langle \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \rangle), \{\lambda_{\mathfrak{qp}}\}]\}$ über $\text{Spec } A$; d. h.

$$\text{Top } A = \text{Olim } \{\text{Top}(A_{\mathfrak{p}} \parallel \langle \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \rangle); \mathfrak{p} \in \text{Spec } A\}.$$

Da nach [2], Hauptsatz 8, $\text{Top}(A_{\mathfrak{p}} \parallel \langle \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \rangle)$ zum Verband aller Ideale der Kompletterung $\bar{A}_{\mathfrak{p}}$ von $A_{\mathfrak{p}}$ isomorph ist, gibt Satz 4. eine vollständige Charakterisierung von $\text{Top } A$.

Der Beweis wird in den Sätzen 5., 6. und 7. geführt.

5. Satz. Seien F und G zwei A -Idealfilter, so ist $F < G$ genau dann, wenn für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$

$$\lambda_{\mathfrak{p}}(F) < \lambda_{\mathfrak{p}}(G)$$

ist.

Beweis. Die Richtung $F < G \Rightarrow \lambda_{\mathfrak{p}}(F) < \lambda_{\mathfrak{p}}(G)$ ist offensichtlich. Sei umgekehrt für alle $\mathfrak{p}$ $\lambda_{\mathfrak{p}}(F) < \lambda_{\mathfrak{p}}(G)$, d. h. $\lambda_{\mathfrak{p}}(G) \subseteq \lambda_{\mathfrak{p}}(F)$. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal, $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{p}$ -primäres Ideal und $\mathfrak{q} \in G$, so ist $A_{\mathfrak{p}} \mathfrak{q} \in \lambda_{\mathfrak{p}}(G) \subseteq \lambda_{\mathfrak{p}}(F)$, und es gibt daher ein $\mathfrak{f}(\mathfrak{q}) \in F$ mit $A_{\mathfrak{p}} \mathfrak{f}(\mathfrak{q}) \subseteq A_{\mathfrak{p}} \mathfrak{q}$. Also ist $F \ni \mathfrak{f}(\mathfrak{q}) \subseteq \varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(A_{\mathfrak{p}} \mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$ und d. h. $\mathfrak{q} \in F$.

Sei nun $\mathfrak{g}$ ein beliebiges Ideal aus G , $\mathfrak{g} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_h$ eine Primäridealzerlegung, so sind nach dem soeben gezeigten alle $\mathfrak{q}_h \in F$ und daher auch $\mathfrak{g} \in F$ w. z. b. w.

6. Satz. Für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ sei ein $F_{\mathfrak{p}} \in \text{Top}(A_{\mathfrak{p}} \parallel \langle \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \rangle)$ gegeben, und für $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ sei $F_{\mathfrak{p}} < \lambda_{\mathfrak{q}\mathfrak{p}}(F_{\mathfrak{p}})$; dann gibt es ein A -Idealfilter F mit $\lambda_{\mathfrak{p}}(F) = F_{\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$.

Beweis. Sei $F'_{\mathfrak{p}} = \varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(F_{\mathfrak{p}})$ und $F = \inf_{\mathfrak{p}} F'_{\mathfrak{p}}$. Da jedes Ideal aus $A_{\mathfrak{p}}$ Erweiterungsideal seines Verengungsideals in A ist, gilt $F_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} F'_{\mathfrak{p}}$ und daher auch $\lambda_{\mathfrak{p}}(F'_{\mathfrak{p}}) = F_{\mathfrak{p}}$. Wegen $F < F'_{\mathfrak{p}}$ ist $\lambda_{\mathfrak{p}}(F) < \lambda_{\mathfrak{p}}(F'_{\mathfrak{p}}) = F_{\mathfrak{p}}$ nach Satz 5. Es bleibt also zu zeigen, daß $F_{\mathfrak{p}} < \lambda_{\mathfrak{p}}(F)$ ist. Sei dazu $\mathfrak{q} \in \lambda_{\mathfrak{p}}(F)$, d. h., $\mathfrak{q}$ sei ein $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ -primäres Ideal, in dem ein Ideal $A_{\mathfrak{p}} \mathfrak{f}$, $\mathfrak{f} \in F$, enthalten ist.

Wegen $\mathfrak{f} \in F$ gibt es Ideale $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_1} \in F_{\mathfrak{p}_1}, \dots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_n} \in F_{\mathfrak{p}_n}$ mit

$$\varphi_{\mathfrak{p}_1}^{-1}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_1}) \cap \dots \cap \varphi_{\mathfrak{p}_n}^{-1}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_n}) \subseteq \mathfrak{f} \subseteq \varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(A_{\mathfrak{p}} \mathfrak{f}) \subseteq \varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{q}) \stackrel{\text{Def}}{=} \mathfrak{q}'.$$

Sei o. B. d. A. $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_{m+1}, \dots, \mathfrak{p}_n \not\subseteq \mathfrak{p}$, so ist, da $\mathfrak{q}'$ $\mathfrak{p}$ -primär ist, $\varphi_{\mathfrak{p}_1}^{-1}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_1}) \cap \dots \cap \varphi_{\mathfrak{p}_m}^{-1}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_m}) \subseteq \mathfrak{q}'$ und daher $A_{\mathfrak{p}} \varphi_{\mathfrak{p}_1}^{-1}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_1}) \cap \dots \cap A_{\mathfrak{p}} \varphi_{\mathfrak{p}_m}^{-1}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_m}) \subseteq A_{\mathfrak{p}} \mathfrak{q}' = \mathfrak{q}$. Nun ist aber $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}$ für $i = 1, 2, \dots, m$ und daher

$$\mathfrak{b}_i \stackrel{\text{Def}}{=} \varphi_{\mathfrak{p}_i}^{-1}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}) = (\varphi_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}_i} \circ \varphi_{\mathfrak{p}})^{-1}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}) = \varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\varphi_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}_i}^{-1}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i})),$$

$$A_{\mathfrak{p}} \mathfrak{b}_i = A_{\mathfrak{p}} \varphi_{\mathfrak{p}_i}^{-1}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}) = \varphi_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}_i}^{-1}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}).$$

Da $F_{\mathfrak{p}} < \lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}_i}(F_{\mathfrak{p}_i})$ nach Voraussetzung gilt, ist für alle $i = 1, 2, \dots, m$ und alle $\mathfrak{q} = 1, 2, \dots$

$$A_{\mathfrak{p}} \mathfrak{b}_i + \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} \in F_{\mathfrak{p}}$$

und daher auch

$$(A_{\mathfrak{p}} \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}) \cap \dots \cap (A_{\mathfrak{p}} \mathfrak{b}_m + \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}) \in F_{\mathfrak{p}}.$$

Sei $\mathfrak{q}$ die nach Satz 7. existierende natürliche Zahl, für die

$$(A_{\mathfrak{p}} \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}) \cap \dots \cap (A_{\mathfrak{p}} \mathfrak{b}_m + \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}) \subseteq A_{\mathfrak{p}} (\mathfrak{b}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{b}_m) + \mathfrak{q} = \mathfrak{q}$$

ist, so folgt $\mathfrak{q} \in F_{\mathfrak{p}}$, d. h. $\lambda_{\mathfrak{p}}(F) \subseteq F_{\mathfrak{p}}$, w. z. b. w.

7. Hilfssatz. Sei L ein Noetherscher lokaler Ring, $\mathfrak{m}$ sein Maximalideal, $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{m}$ -primäres Ideal, und seien $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_m$ beliebige Ideale aus A . Dann gibt es eine natürliche Zahl ϱ mit

$$(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{m}^\varrho) \cap \dots \cap (\mathfrak{b}_m + \mathfrak{m}^\varrho) \subseteq \mathfrak{b}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{b}_m + \mathfrak{q}.$$

Beweis. Sei zunächst zusätzlich vorausgesetzt, daß $(A, \mathfrak{m})$ komplett sei. Ist $\mathfrak{b}^{(\varrho)} = (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{m}^\varrho) \cap \dots \cap (\mathfrak{b}_m + \mathfrak{m}^\varrho)$, so ist

$$\bigcap_{\varrho=1}^{\infty} \mathfrak{b}^{(\varrho)} = \left(\bigcap_{\varrho=1}^{\infty} \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{m}^\varrho \right) \cap \dots \cap \left(\bigcap_{\varrho=1}^{\infty} (\mathfrak{b}_m + \mathfrak{m}^\varrho) \right) = \mathfrak{b}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{b}_m,$$

und dahergibt es zu jedem $\mathfrak{m}$ -primären Ideal $\mathfrak{q}$ ein ϱ mit $\mathfrak{b}^{(\varrho)} \subseteq \mathfrak{b}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{b}_m + \mathfrak{q}$. Damit ist Satz 7. für komplette lokale Ringe bewiesen. Sei nun A beliebig gewählt, $\bar{A}$ die Kompletztierung, so gilt für genügend großes ϱ :

$$\begin{aligned} (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{m}^\varrho) \cap \dots \cap (\mathfrak{b}_m + \mathfrak{m}^\varrho) &\subseteq ((\bar{A}\mathfrak{b}_1 + (\bar{A}\mathfrak{m})^\varrho) \cap \dots \cap (\bar{A}\mathfrak{b}_m + (\bar{A}\mathfrak{m})^\varrho)) \cap A \\ &\subseteq (\bar{A}\mathfrak{b}_1 \cap \dots \cap \bar{A}\mathfrak{b}_m + \bar{A}\mathfrak{q}) \cap A = \bar{A}(\mathfrak{b}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{b}_m + \mathfrak{q}) \cap A \\ &= \mathfrak{b}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{b}_m + \mathfrak{q}. \end{aligned}$$

8. Nach 5. ist die in 3. definierte Abbildung

$$\lambda: \text{Top } A \rightarrow \text{Olim } \{ \text{Top } (A_{\mathfrak{p}} \parallel \langle \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \rangle); \mathfrak{p} \in \text{Spec } A \}$$

injektiv und nach 6. surjektiv. Wiederum nach 5. ist λ ein Ordnungshomomorphismus. Damit ist der Hauptsatz 4. bewiesen.

LITERATUR

- [1] BUDACH, L.: Quotientenfunktor und Erweiterungstheorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.
- [2] BUDACH, L.: Beziehungen zwischen gewissen Topologien in Noetherschen Ringen. Proc. Second Prague Topological Symp. 1966, Vol. 2, Prague 1967, p. 77–82.

Manuskripteingang: 23. 11. 1971

VERFASSER:

LOTHAR BUDACH, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin