Beiträge zur Algebra und Geometrie
2 (1974), 103—118

Cohen-Macaulay-Punkte auf lokal geringten Räumen und Anwendungen in der Schnittheorie[1])

MANFRED HERRMANN und WOLFGANG VOGEL

In diesem Bericht geben wir Übertragungsprinzipien für Cohen-Macaulay-Punkte auf lokal geringten Räumen an. Dazu werden Relationen (H) für die Koeffizienten geeigneter Hilbert-Samuel-Funktionen herangezogen [10]. Diese Betrachtungen erfolgen in gewisser Analogie zu Untersuchungen von HIRONAKA [12], Kap. II, für reguläres Verhalten auf algebraischen Schemata, wobei an die Stelle der „normalen Flachheit" bei HIRONAKA unsere (H)-Bedingung tritt. Dementsprechend weisen wir abschließend darauf hin, wie man die (H-)Bedingung auf Grund des HIRONAKA-Isomorphismus ([7], Nr. 32) aus geeigneten Flachheitsforderungen herleiten kann [11]. Dies liefert ein Hauptergebnis 9.3., wonach im wesentlichen die normale Flachheit gewährleistet, daß die Ergebnisse von [12], Kap. II, auch für Cohen-Macaulay-Punkte bewiesen werden können.
Diese Untersuchungen sind insofern für die Multiplizitätstheorie von Bedeutung, als sie u. a. ein kohomologisches „Maß" für die Abweichung der „statischen" Multiplizität der Idealtheorie von GRÖBNER [3] und der „dynamischen" Multiplizität im Sinne von SERRE [21] ergeben. Insbesondere werden hier Ergebnisse zum Multiplizitätsvergleich aus [9], [10] und [18] unter einheitlichen Gesichtspunkten betrachtet.

1. Den Ausgangspunkt dieser Überlegungen bildeten zunächst Fragestellungen zur Gültigkeit des Bézoutschen Satzes. Der klassische Satz von BÉZOUT

---

[1]) Diese Note beruht auf einem Seminarbericht der Verfasser, der im Frühjahr 1970 in einem Forschungsseminar der Universitäten Berlin-Halle gehalten wurde.

besagt, daß sich zwei ebene Kurven m-ter und q-ter Ordnung in höchstens $m\,q$ verschiedenen Punkten schneiden, sofern sie nicht unendlich viele gemeinsame Punkte haben. Beim eigentlichen Schnitt zweier beliebiger Mannigfaltigkeiten M, N (algebraische Mengen), die durch zwei homogene Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ aus dem Polynomring $R =: K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ über einem beliebigen Körper K gegeben sind, liegt dementsprechend folgender Sachverhalt vor: Die Lösungsanzahl wird als $\sum \nu_i \cdot h_0(\mathfrak{p}_i)$ angesetzt, wobei $h_0(\mathfrak{p}_i)$ die Ordnung einer Schnittkomponente $C_i \subset M \cap N$ (definiert durch $\mathfrak{p}_i$) bezeichnet und ν_i eine wohldefinierte Schnittmultiplizität von C_i in $M \cap N$ ist, so daß

$$\sum \nu_i \cdot h_0(\mathfrak{p}_i) = h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b}).$$

Beim idealtheoretischen Aufbau der algebraischen Geometrie verwendet man als Schnittmultiplizität die Ideallänge μ_i ([3]), für die diese Gleichheit im allgemeinen nicht erfüllt ist; unter gewissen Voraussetzungen gilt nämlich:

$$\sum \mu_i \cdot h_0(\mathfrak{p}_i) = h_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \geqq h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b}) = \sum \nu_i \cdot h_0(\mathfrak{p}_i).$$

Im idealtheoretischen Rahmen besagt daher der Bézoutsche Satz, daß $h_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b})$ ist. In einem ersten Hilfssatz wollen wir zeigen, daß dieser Satz genau dann gilt, wenn $\mu_i = \nu_i$ in jeder Schnittkomponente $C_i \subset M \cap N$ ist.

In vorangegangenen Publikationen hatte sich das Interesse darauf gerichtet, ein Korrekturglied K mit $h_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = h_0(\mathfrak{a})\, h_0(\mathfrak{b}) + K$ anzugeben; siehe [19, 23]. In [2] wurde eine homologische Auswertung dieser Untersuchungen mit Methoden von [21] in folgender Weise gegeben:
Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beliebige homogene Ideale in R. Das Summenideal $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ habe folgende Primärzerlegung

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s \cap \mathfrak{r}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$

wobei $\mathfrak{q}_v$ $\mathfrak{p}_v$-primär für $v = 1, \ldots, s$ ist und die $\mathfrak{q}_v$ die höchstdimensionalen zu $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ gehörigen Primärkomponenten sind; $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ bedeute den Durchschnitt der übrigen Komponenten. A_v sei der reguläre lokale Ring $R_{\mathfrak{p}_v}$; wir setzen $\mathfrak{a}_v = : A_v\, \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_0 =: A_v \cdot \mathfrak{b}$ für $v = 1, \ldots, s$. „$l(\cdots)$" ist die Länge von $(\cdots)$. $\chi^A(M, N)$ bezeichne die Schnittmultiplizität im Sinne von SERRE [21], Kap. V, für Moduln M und N vom endlichen Typ über einem regulären lokalen Ring A. In unserer Situation liegt für A_v der charakteristikgleiche Fall vor.

Nach [2], Satz 1, haben wir:

1.1. Wenn $\dim A_v = \dim \mathfrak{a}_v + \dim \mathfrak{b}_v$ für alle v[1]), dann gilt:

$$K = \sum_{v=1}^{s} \{\sum_{i \geqq 1} (-1)^{i-1}\, l\,(\mathrm{Tor}_i^{A_v}(A_v/\mathfrak{a}_v, A_v/\mathfrak{b}_v))\} \cdot h_0(\mathfrak{p}_v).$$

---

[1]) Man sagt dann nach [24], daß sich $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ *lokal eigentlich* schneiden. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ pseudogemischt [3], so ist diese Eigenschaft äquivalent mit der Bedingung, daß sich $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ *eigentlich* schneiden, das bedeutet: $\dim(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \dim \mathfrak{a} - \mathrm{rg}\, \mathfrak{b}$.

Darauf beruht die folgende Aussage:

1.2. Hilfssatz. *Wenn* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *sich lokal eigentlich schneiden, gilt*

$$\chi^{A_v}(A_v/\mathfrak{a}_v, A_v/\mathfrak{b}_v) = l(A_v/(\mathfrak{a}_v, \mathfrak{b}_v))$$

für alle v *genau dann, wenn* $h_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b})$ *ist.*

Beweis. Für alle $v = 1, \ldots, s$ gilt nach [21], C. V. – 20:

$$\begin{aligned} \nu_v =: \chi^{A_v}(A_v/\mathfrak{a}_v, A_v/\mathfrak{b}_v) &= \sum_{i \geqq 0} (-1)^i \, l(\mathrm{Tor}_i^{A_v}(A_v/\mathfrak{a}_v, A_v/\mathfrak{b}_v)) \\ &= l(A_v/(\mathfrak{a}_v, \mathfrak{b}_v)) - \chi_1^{A_v} \end{aligned}$$

mit

$$\chi_1^{A_v} = \sum_{i \geqq 1} (-1)^{i-1} \, l(\mathrm{Tor}_i^{A_v}(A_v/\mathfrak{a}_v, A_v/\mathfrak{b}_v)) \geqq 0;$$

$l(A_v/(\mathfrak{a}_v, \mathfrak{b}_v))$ ist die Multiplizität μ_v von $\mathfrak{q}_v$ im Sinne von Gröbner [3]. Damit ist $\mu_v = \nu_v$ genau dann, wenn $\chi_1^{A_v} = 0 \Leftrightarrow K = 0$ nach 1.1.; was gleichbedeutend mit der Gültigkeit des Bézoutschen Satzes ist.

1.3. Bemerkung. Nach Auslander und Buchsbaum ist $\chi_1^{A_v} = 0 \Leftrightarrow A_v/\mathfrak{a}_v$ und $A_v/\mathfrak{b}_v$ Cohen-Macaulay-Moduln sind (vgl. Abschnitt 3).

Dies liefert den Satz 2 aus [2]:

1.4. $h_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow A_v/\mathfrak{a}_v$ und $A_v/\mathfrak{b}_v$ Cohen-Macaulay-Moduln für alle $v = 1, \ldots, s$ sind (vgl. 3.2.). Demnach können die Cohen-Macaulay-Eigenschaften der Schnittkomponenten als geeignetes Zwischenglied angesehen werden, über das der Bézoutsche Satz und der Multiplizitätsvergleich im einzelnen (in jeder Komponente) zusammenhängen.

1.5. Auf Grund dieses Zusammenhanges ergibt sich sofort, daß beim Schnitt zweier (absoluter) k-Varietäten V, W die Multiplizitäten im Sinne von Gröbner und Weil [27] nur in solchen eigentlichen Komponenten voneinander abweichen können, die auf V oder W singulär sind. Andererseits kann der Bézoutsche Satz auch im Fall singulärer Schnittkomponenten gelten: Eine solche Situation liegt z. B. vor, wenn sich zwei ebene Kurven in singulären Punkten schneiden. In solchen singulären Schnittpunkten P muß die Multiplizität des lokalen Ringes von V bzw. W in P nach 1.2. und 1.4. notwendig größer als eins sein (vgl. 3.4.). Allein aus der Existenz von Cohen-Macaulay-Punkten[1]) auf V oder W ist daher über die Kompliziertheit irgendwelcher singulärer Punkte auf V oder W und damit über die „Schichtung" der Singularitäten im Sinne von Zariski (z. B. [29]) keine Aussage zu erwarten. Entsprechendes gilt hinsichtlich der Beschaffenheit von Untervarietäten C in sich und die Art ihrer Einbettung in V oder W.

---

[1]) Siehe Definition 4.3.

Um über die (idealtheoretische) Gültigkeit des Bézoutschen Satzes bzw. um zum Vergleich der verschiedenen Multiplizitäten Aussagen zu machen, werden wir im Hinblick auf 1.2., 1.4. und 1.5. im folgenden die Feinstruktur der Schnittkomponenten $C_v \subset V \cap W$ zunächst in den Hintergrund treten lassen. Für diese Untersuchungen ist ein Grundprinzip der Multiplizitätstheorie von VAN DER WAERDEN [25, 26] und WEIL [27] von Interesse: Hier kann unter geeigneten „glättenden" Bedingungen von der Multiplizität einer Schnittkomponente oder einiger Schnittkomponenten $C \subset V \cap W$ auf die Multiplizitäten der anderen Komponenten geschlossen werden. Diese glättenden Bedingungen betreffen einmal die Struktur der Komponente C in sich und zum anderen ihre Einbettungseigenschaften in V und W. In der Weilschen Auffassung läßt sich jedes Schnittproblem auf ein „geglättetes" Problem zurückführen, aus dem dann das ursprüngliche durch einen Spezialisierungsprozeß zurückgewonnen werden kann. Da nun die Cohen-Macaulay-Eigenschaft im allgemeinen nicht spezialisierungsinvariant ist, wie wir im folgenden genauer ausführen werden, wird man in diesem Rahmen mit 1.2. und 1.4. eine Erklärung aus mehr geometrischer Sicht für die Abweichung der Multiplizitäten von GRÖBNER und WEIL bzw. SERRE geben können. Nach der von GRÖBNER vorgeschlagenen Terminologie ([5], Vorwort und [4]) liefert dies eine Deutung der Abweichung von „statischer" und „dynamischer" Multiplizität (vgl. auch KELLER [13]). In Analogie zu dem obigen Prinzip suchen wir zunächst nach Bedingungen, die die Struktur von V und W längs einer Schnittkomponente $C \subset V \cap W$ glätten und die (bei Berücksichtigung geeigneter Einbettungseigenschaften von C in V und W) das Verhalten der anderen Schnittkomponenten bzgl. der beiden Multiplizitätsdefinitionen festlegen.

2. ZARISKI benutzte für den Auflösungsprozeß von Singularitäten einer analytischen oder algebraischen Fläche in einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit als glättende Bedingung für eine Varietät V längs einer Untervarietät $C \subset V$ die sogenannte Äquimultiplizität von V längs C. Für die Auflösung von Singularitäten in beliebigen Dimensionen führte HIRONAKA [12] die stärkere Glättungsbedingung V normal flach längs C ein. Der folgende erste Vergleichssatz zeigt, daß diese Begriffsbildung auch für unsere Betrachtungsweise geeignet ist. Nach [12], S. 135, geben wir folgende Definition.

2.1. Definition. Sei $V = (\boldsymbol{V}, O_V)$ ein lokal geringter Raum und $C = (\boldsymbol{C}, O_C)$ ein lokal geringter Unterraum mit der definierenden Idealgarbe J auf V. Es sei $\mathrm{gr}_C^p(V) = J^p/J^{p+1} \mid C$ für $p \geqq 0$. V heißt normal flach längs C in einem Punkt $x \in \boldsymbol{C}$ ($V \underset{x}{\mathrm{nf}} C$), wenn für alle $p \geqq 0$ der Halm

$$\mathrm{gr}_C^p(V)_x \text{ ein freier } O_{C,x}\text{-Modul ist.}$$

V heißt normal flach längs C ($V \,\mathrm{nf}\, C$), wenn V normal flach längs C in jedem Punkt von $\boldsymbol{C}$ ist.

Sind die Halme $O_{V,x}$ noethersche Ringe, so ist die normale Flachheit von V längs C äquivalent mit: $\mathrm{gr}_C(V) = \sum_{p\geq 0} \mathrm{gr}_C^p(V)$ ist O_C-flach. Angewandt auf k-Varietäten $V \subset C$ mit den definierenden Idealen $\mathfrak{p}_V \subset \mathfrak{p}_C$ bedeutet $V \underset{x}{\mathrm{nf}}\, C$, daß J_x^p/J_x^{p+1} ein flacher $O_{C,x}$-Modul ist, wobei $J_x = (\mathfrak{p}_C/\mathfrak{p}_V) \cdot O_{V,x}$.

2.2. Satz (1. Vergleichssatz). *Seien V und W homogene (absolute) k-Varietäten mit den zugehörigen Primidealen $\mathfrak{p}_V$ und $\mathfrak{p}_W$ über einem algebraisch abgeschlossenen Oberkörper von k, die sich eigentlich schneiden, d. h.*

$$\dim(\mathfrak{p}_V, \mathfrak{p}_W) = \dim \mathfrak{p}_V - \operatorname{rang} \mathfrak{p}_W.$$

Seien C_1 und C_2 nicht-singuläre Schnittkomponenten von $V \cap W$ [1]*), die mindestens einen einfachen Punkt auf V bzw. W enthalten. Gilt V nf C_1 und W nf C_2, dann stimmen die Schnittmultiplizitäten von* Gröbner *und* Weil *in jeder Komponente von $V \cap W$ überein.*

Beweis. Nach [12], Kap. II, Kor. 4, gilt auf Grund der Flachheitsforderung, daß alle Punkte von C_1 (von C_2) einfache Punkte von V (von W) sind. Da $V \cap W$ nur homogene Komponenten besitzt, liegt der durch das Ideal $\mathfrak{p} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ definierte Punkt P auf allen Schnittkomponenten C_v, $v = 1, \ldots, s$. Damit sind die lokalen Ringe von V und W bezüglich P regulär. Weil jede Lokalisierung eines regulären Ringes wieder regulär ist ([21], S. IV–41), ist C_v einfach auf V und W für alle $v = 1, \ldots, s$. Nach 1.2. und 1.4. folgt die Behauptung, q. e. d. (Siehe auch [9].)

2.3. Bemerkungen. Die Forderung der normalen Flachheit ist für diesen Sachverhalt eine sehr starke Bedingung. Der Beweis des Satzes 2.2. zeigt nämlich, daß es nur darauf ankommt, daß die lokalen Ringe von V und W bezüglich C_v Cohen-Macaulay-Ringe sind. Hinreichend für die Gültigkeit des Bézoutschen Satzes ist die Kenntnis der lokalen Strukturen von V und W in P (vgl. 3.2. und Beweis des 2. Vergleichssatzes 5.1.). Allerdings wird man für ein vorgelegtes Schnittproblem zunächst nur Informationen über die lokalen Ringe von V und W in allgemeinen Punkten gewisser Schnittkomponenten C_1 und C_2 zur Verfügung haben. Unsere Flachheitsforderungen benutzen gerade derartige Informationen für Strukturaussagen in speziellen Punkten, die aber, wie gesagt, für unsere Fragestellung zu stark sind. Für den idealtheoretischen Rahmen wollen wir daher die Forderung nach normaler Flachheit abändern, indem wir Folgerungen aus der normalen Flachheit und aus gewissen Einbettungseigenschaften für C_1, C_2 bezüglich V, W zu Forderungen an die Koeffizienten gewisser Hilbert-Samuel-Funktionen von V bzw. W in Punkten auf C_1 bzw. C_2 verallgemeinern ((H)-Bedingung). Hierzu stellen wir einige Begriffsbildungen voran.

---

[1]) Insbesondere kann $C_1 = C_2$ sein.

3. Seien A ein noetherscher semi-lokaler Ring und M ein A-Modul vom endlichen Typ. Eine Folge $a_1, \ldots, a_p$ von Elementen aus dem Jacobson-Radikal $\mathfrak{m}$ von A heißt M-Folge, wenn für alle $j = 1, \ldots, p$ das Element a_j kein Nullteiler in $M/(a_1, \ldots, a_{j-1})\, M$ ist, wobei (a_0) das Nullideal bedeutet. Kann diese M-Folge nicht durch weitere Elemente aus $\mathfrak{m}$ verlängert werden, dann sprechen wir von einer maximalen M-Folge. Da maximale M-Folgen die gleiche Anzahl p von Elementen besitzen, nennt man p die homologische Kodimension von M, $\operatorname{codh}_A M = p$. Bezeichnet $\operatorname{Ann}(M)$ den Annulator von M, dann ist die Dimension von M über A, $\dim_A M$, die idealtheoretische Dimension des Ringes $R/\operatorname{Ann}(M)$, und es gilt $\operatorname{codh}_A M \leqq \dim_A M$.

3.1. Definition. M heißt Cohen-Macaulay-Modul, wenn $M = (0)$ oder $\operatorname{codh}_A M = \dim_A M$.
A heißt Cohen-Macaulay-Ring, wenn A als A-Modul betrachtet ein Cohen-Macaulay-Modul ist (vgl. z. B. [21], Kap. IV).

3.2. Bemerkung. Wir werden im folgenden stets die Cohen-Macaulay-Eigenschaften von lokalen Ringen nachweisen, insbesondere von lokalen Ringen von Varietäten bezüglich Untervarietäten. In 1.4. spielen jedoch die A_v-Moduln $A_v/\mathfrak{a}_v$ und $A_v/\mathfrak{b}_v$ eine Rolle. Hinsichtlich der Cohen-Macaulay-Eigenschaft ist es nach [21], S. IV–18, Prop. 11, aber gleichwertig, $A_v/\mathfrak{a}_v$ und $A_v/\mathfrak{b}_v$ als A_v-Moduln oder als lokale Ringe zu betrachten.

Lokale Cohen-Macaulay-Ringe können dadurch charakterisiert werden, daß der Ungemischtheitssatz gilt (vgl. [15], S. 85). Damit erhält man den folgenden Hilfssatz

3.3. Hilfssatz [24]. *Seien* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *perfekte Ideale in* R *im Sinne von* GRÖBNER [3], S. 176, *mit* $\dim(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \dim \mathfrak{a} - \operatorname{rang} \mathfrak{b}$. *Dann gilt der Bézoutsche Satz* $h_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b})$.

Beweis. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ perfekt ist gleichbedeutend damit, daß in $R/\mathfrak{a}$ und $R/\mathfrak{b}$ der Ungemischtheitssatz gilt. Nach [21], Cor. 1, S. IV—24, sind daher mit der Bezeichnung von 1.4. $A_v/\mathfrak{a}_v$ und $A_v/\mathfrak{b}_v$ Cohen-Macaulay-Ringe, q. e. d.

3.4. Im folgenden soll kurz der Zusammenhang zwischen Cohen-Macaulay-Moduln und Multiplizitäten skizziert werden.
Seien A, $\mathfrak{m}$ und M wie in Abschnitt 3. Ein Ideal $\mathfrak{v} \subset A$ heißt Definitionsideal, wenn eine natürliche Zahl $\varrho \geqq 1$ existiert, so daß $\mathfrak{m}^\varrho \subseteqq \mathfrak{v} \subseteqq \mathfrak{m}$ ist. $l(\cdots)$ bezeichne stets die Länge des Moduls $(\cdots)$. $l(M/\mathfrak{v}^{n+1}M)$ ist für genügend große n ein Polynom in n vom Grad $\dim_A M = d$, das Hilbert-Samuel-Polynom:

$$l_A(M/\mathfrak{v}^{n+1} M) = e_0 \binom{n+d}{d} + e_1 \binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + e_d,$$

wobei die $e_i = e_i(\mathfrak{v}, M)$ ganze rationale Zahlen mit $e_0 > 0$ sind. $e_0(\mathfrak{v}, M)$ heißt die Multiplizität von $\mathfrak{v}$ bezüglich M. Für $\mathfrak{v} = \mathfrak{m}$ heißt e_0 auch die Multiplizität von A bezüglich M.

Wenn $A = M$ ein lokaler Ring ist, dann ist $\mathfrak{v}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal $\mathfrak{q}$, wobei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A ist. Wir bemerken an dieser Stelle, daß A genau dann ein regulärer (lokaler) Ring ist, wenn A ein Cohen-Macaulay-Ring ist und $e_0(\mathfrak{m}) = 1$ gilt (z. B. [15], Satz (40.6)).
Ist $\dim A = d$, so verstehen wir unter einem Parameterideal stets ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal $\mathfrak{q}$ mit d Basiselementen. Für Parameterideale $\mathfrak{q}$ gilt

$$e_0(\mathfrak{q}) \leqq l(A/\mathfrak{q}).$$

Besitzt der Residuenkörper $A/\mathfrak{m}$ unendlich viele Elemente, so existiert zu einem beliebigen $\mathfrak{m}$-primären Ideal $\mathfrak{q}'$ ein Parameterideal $\mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{q}'$ mit

$$e_0(\mathfrak{q}) = e_0(\mathfrak{q}').$$

3.5. Satz ([28], S. 400). *Für einen lokalen Ring* $(A, \mathfrak{m})$ *sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

1. *A ist ein Cohen-Macaulay-Ring.*
2. *Für alle Parameterideale $\mathfrak{q}$ gilt $e_0(\mathfrak{q}) = l(A/\mathfrak{q})$.*
3. *Für alle Parameterideale ist der graduierte Ring $G_\mathfrak{q}(A) = \sum_{n \geqq 0} \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$ isomorph zum Polynomring in* $\dim A$ *Variablen über $A/\mathfrak{q}$.*

4. Im folgenden geben wir die (H)-Bedingung an (vgl. die Bemerkungen 2.3.).
Sei W ein irreduzibles, abgeschlossenes Unterschema eines algebraischen Schemas V über einem Körper k; bezeichne O_x den lokalen Ring von $x \in W$ bezüglich V und O_W den lokalen Ring des allgemeinen Punktes $\bar{x} \in W$ bezüglich V. Wir betrachten für $n \geqq 0$ die Funktionen

$$H_x(n) = \sum_{i=0}^{n} l(\mathfrak{q}_x^i/\mathfrak{q}_x^{i+1}),$$

wobei $\mathfrak{q}_x$ ein $\mathfrak{m}_x$-primäres Ideal aus O_x bedeutet und $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal in O_x ist.[1])
Für $H_{\bar{x}}(n)$ schreiben wir $H_W(n)$.
(H) bedeute im folgenden stets die Bedingung:

4.1. $$H_x(n) = \sum_{p+q=n} H_W(p) \cdot \binom{q+r-1}{r-1},$$

wobei $n \geqq 0$ und $r = \dim O_{W,x}$ ist.

4.2. Definition. Wir sagen, (H) gilt für x, $\bar{x} \in W$, wenn in O_x und O_W Parameterideale $\mathfrak{q}_x$ bzw. $\mathfrak{q}_W$ existieren, so daß 4.1. für $\mathfrak{q}_x$ und $\mathfrak{q}_W$ erfüllt ist.

4.3. Definition ([7], No. 24, 5.7.1.). Ein Punkt $x \in W$ heißt Cohen-Macaulay-Punkt bezüglich V ($C\,M_V$-Punkt), wenn O_x ein Cohen-Macaulay-Ring ist.

---

[1]) Für diese Funktion $H_x(n)$ wurde in [10] $H(\mathfrak{q}_x, n)$ geschrieben, um die Abhängigkeit von $\mathfrak{q}_x$ zum Ausdruck zu bringen.

4.4. Satz [10]. *Es sei V ein algebraisches k-Schema und W ein irreduzibles, abgeschlossenes Unterschema von V. Wenn der allgemeine Punkt $\bar{x}$ von W ein $C\,M_V$-Punkt ist und* (H) *für $\bar{x}$ und einen weiteren Punkt $x \in W$ gilt, dann ist auch x ein $C\,M_V$-Punkt.*

4.5. Bemerkungen.

4.5.1. Satz 4.4. wird in 7.1. auf gewisse lokal geringte Räume übertragen. Im Hinblick auf den 2. Vergleichssatz (vgl. 5.1.) wurde Satz 4.4. zunächst nur für algebraische k-Schemata bewiesen.

4.5.2. HIRONAKAS Ergebnis für reguläre Punkte in [12], Kor. 4, S. 188, wird durch Satz 4.4. auf Cohen-Macaulay-Punkte übertragen, wobei unsere (H)-Bedingung für die Flachheitsforderung $V \underset{x}{\mathrm{nf}}\, W$ und eine Einbettungseigenschaft (W ist nicht-singulär) steht.

4.5.3. Eine Charakterisierung (auch unter kohomologischen Aspekten) der (H)-Bedingung wird in Abschnitt 8 gegeben. Die Aussage des Satzes 4.4. kann in 9.3. auch aus $V \underset{x}{\mathrm{nf}}\, W$ und zusätzlichen Voraussetzungen geschlossen werden.

4.5.4. Das folgende Beispiel bestätigt, daß die Cohen-Macaulay-Eigenschaft des allgemeinen Punktes $\bar{x}$ von W nicht „spezialisierungsinvariant" ist.

4.6. Lemma [10]. *Die Spitze des Kegels V im 4-dimensionalen projektiven Raum mit dem zugehörigen Primideal*

$$\mathfrak{p}_V = (x_1^2 x_3 - x_2^3,\ x_1 x_4 - x_2 x_3,\ x_1 x_3^2 - x_2^2 x_4,\ x_2 x_4^2 - x_3^3)$$

ist kein $C\,M_V$-Punkt.

Das Lemma zeigt, warum beim Schnitt von V mit einem speziellen linearen Raum durch die Spitze die idealtheoretische Multiplizität von der „Spezialisierungsmultiplizität" von WEIL abweicht. Demnach liefert die Spezialisierungsinvarianz der Cohen-Macaulay-Eigenschaft der allgemeinen Punkte auf den Komponenten eines Schnittproblems die Übereinstimmung beider Multiplizitäten. Dieser Aspekt wird im folgenden Satz berücksichtigt.

5.1. Satz (2. Vergleichssatz, [10]). *Seien V und W homogene k-Varietäten wie im Satz 2.2. Die allgemeinen Punkte $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ der beiden Schnittkomponenten $C_1, C_2 \subset V \cap W$ seien $C\,M_V$-Punkte bzw. $C\,M_W$-Punkte. Mit x_0 bezeichnen wir den durch*

$$\mathfrak{p} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

definierten Punkt. Wenn (H) *sowohl für $x_0, \bar{x}_1 \in C_1$ als auch für $x_0, \bar{x}_2 \in C_2$ gilt, dann stimmen die Schnittmultiplizitäten von* GRÖBNER *und* WEIL *in jeder Komponente von $V \cap W$ überein.*

Beweis. Nach Satz 4.4. sind die lokalen Ringe von V und W in x_0 Cohen-Macaulay-Ringe. Lokalisiert man diese Ringe nach den definierenden Primidealen der Schnittkomponenten, so erhält man nach 1.4. die Gültigkeit des Bézoutschen Satzes und somit nach 1.2. die Behauptung, q. e. d.

5.2. Folgerung. Unter den Voraussetzungen des Satzes 5.1. sind die zugehörigen Primideale $\mathfrak{p}_V$ und $\mathfrak{p}_W$ von V bzw. W perfekte Ideale.

Beweis. Nach dem Beweis des Satzes 5.1. sind die lokalen Ringe $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_V \cdot R_\mathfrak{p}$ und $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_W \cdot R_\mathfrak{p}$ Cohen-Macaulay-Ringe, d. h. nach [2], Hilfssatz 1, sind

$$\mathrm{dh}\, \mathfrak{p}_V \cdot R_\mathfrak{p} = \mathrm{rang}\, \mathfrak{p}_V \cdot R_\mathfrak{p} - 1$$

und

$$\mathrm{dh}\, \mathfrak{p}_W\, R_\mathfrak{p} = \mathrm{rang}\, \mathfrak{p}_W\, R_\mathfrak{p} - 1.$$

Hieraus folgt nach [17] und [16], S. 81–82, oder [24], Hilfssatz 1, die Behauptung, q. e. d.

5.3. Bemerkung. (H) als glättende Bedingung für V und W längs C_1 bzw. C_2 hat also – analog zur Weilschen Betrachtungsweise – eine Beeinflussung der Gesamtstruktur von V und W zur Folge. Eine weitere Möglichkeit, die Struktur von V und W für Fragestellungen im Sinne unserer Vergleichssätze (unmittelbar) auszunutzen, zeigt der folgende Satz.

5.4. Satz [18]. *Seien V und W projektive Varietäten im Sinne von* [20], *deren Komponenten alle von der Dimension d bzw. δ sind. Der Schnitt $V \cap W$ sei eigentlich. Sind die Kohomologiegruppen*

$$H^p(V, O_V(-n)) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq p \lneqq d$$

und

$$H^p(W, O_W(-n)) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq p \lneqq \delta$$

bei genügend großem n, dann bleibt die Aussage des zweiten Vergleichssatzes erhalten.

5.5. Bemerkung. Die Voraussetzungen in Satz 5.1. und Satz 5.4. sind so angelegt, daß jeweils die Halme in allen Punkten von V, W Cohen-Macaulay-Ringe sind. Für unsere Fragestellung wird aber nur die kolale Perfektheit in den Schnittkomponenten (im Sinne von 1.4.) benötigt. Demgemäß formulieren wir den folgenden Satz:

5.6. Satz [18]. *Seien V und W wie in Satz* 5.1. *oder Satz* 5.4. (*aber nicht notwendig ungemischt*). *Die höchstdimensionalen Schnittkomponenten seien $C_1, \ldots, C_s \subset V \cap W$. Die allgemeinen Punkte der Komponenten werden mit $\bar{x}_i \in C_i$ bezeichnet. Wir setzen voraus, daß ein $\bar{x}_i$ ein $C\,M_V$-Punkt ist, etwa für $i = 1$. Wenn nun für jedes $i = 1, \ldots, s-1$ ein Punkt $x_i \in C_i \cap C_{i+1}$ existiert,* *so daß* (H) *für* x_i *und* $\bar{x}_i$ *gilt, und wenn Entsprechendes für* W *erfüllt ist, dann gilt die Aussage des zweiten Vergleichssatzes.*

6. Für Präschemata V ist für alle $x \in V$

$$S_x =: \{y \in V \mid y \text{ Generalisierung von } x\} = \operatorname{Spec} O_x, \text{ [14]}.$$

Diese affine Eigenschaft unterscheidet Präschemata von den meisten lokal geringten Räumen. Im Hinblick auf die $C\,M_V$-Eigenschaft von x und seinen Generalisierungen scheint uns die (H)-Bedingung ein affines Verhalten für eine gewisse Klasse lokal geringter Räume zu beschreiben; siehe Abschnitt 7. Wir schicken einige Bemerkungen voraus: Im folgenden seien $V = (\boldsymbol{V}, O_V)$ und $W = (\boldsymbol{W}, O_W)$ lokal geringte Räume mit $\boldsymbol{W} \subseteqq \boldsymbol{V}$, deren Halme noethersche Ringe sind. Ferner sei $\boldsymbol{W}$ ein abgeschlossener, irreduzibler Unterraum von $\boldsymbol{V}$, der genau einen allgemeinen Punkt $\bar{x}$ besitzt ([7], No. 4).

6.1. Definition. Seien V und W lokal geringte Räume im obigen Sinne. V heißt katenär längs W in einem Punkt $x \in W$, wenn

$$\dim O_{V,x} = \dim O_{W,x} + \dim O_{V,\bar{x}}.$$

V heißt katenär längs W, wenn V katenär längs W in jedem Punkt von W ist. Für Schemata (wo $\dim O_{V,\bar{x}} = \operatorname{codim}(W, V)$) steht diese Begriffsbildung in engem Zusammenhang mit einem entsprechenden Begriff in [7], No. 20:

6.2. Lemma. *Ist* V *ein affines Schema mit noetherschem Ring* A, *dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(1) A *ist katenär und* $A_{\mathfrak{p}}$ *ist equidimensional für alle* $\mathfrak{p} \subset A$.
(2) V *ist katenär, längs* W *für alle* $W \subset V$.

Beweis. Aus (1) folgt nach [7], No. 20, 14.2. und 14.3., für zwei Primideale $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p} \subset A$:

$$\begin{aligned}\operatorname{codim}(V(\mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}}), \operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}}) = {} & \operatorname{codim}(V(\mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}}), V(\mathfrak{q} \cdot A_{\mathfrak{p}})) \\ & + \operatorname{codim}(V(\mathfrak{q} \cdot A_{\mathfrak{p}}), \operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}}),\end{aligned}$$

wobei $V(\cdots)$ die durch $(\cdots)$ definierte abgeschlossene Menge in $\operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}}$ bedeutet. Nach [7], No. 20, 16.1.3.2., erhält man damit

$$\dim A_{\mathfrak{p}} = \dim A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q} \cdot A_{\mathfrak{p}} + \dim A_{\mathfrak{q}}.$$

Dies bedeutet (2).
Man rechnet nach, daß aus (2) die Equidimensionalität von $A_{\mathfrak{p}}$ folgt. Da A noethersch ist, sind alle auftretenden Kodimensionen in $\operatorname{Spec} A$ endlich, woraus sich nach [7], No. 20, 14.3.2., die katenäre Eigenschaft für A ergibt, q. e. d.

7. Satz [10]. *Seien V und W lokal geringte Räume wie oben. Sei $x \in W$ ein $C\,M_V$-Punkt, in dem V längs W katenär ist. Wenn* (H) *für x und den allgemeinen Punkt $\bar{x} \in W$ gilt, dann ist auch $\bar{x}$ ein $C\,M_V$-Punkt.*

7.1. Korollar. Seien V und W wie im Satz 7. Sei $\bar{x} \in W$ ein $C\,M_V$-Punkt. Gilt (H) für x und $\bar{x}$, dann ist x ein $C\,M_V$-Punkt.

7.1.2. Bemerkung. Die Dimensionsbetrachtungen in den Beweisen von Satz 4.4. und Satz 7. zeigen, daß die Forderungen (H) und $\bar{x}$ ein $C\,M_V$-Punkt nur für solche Punkte $x \in W$ sinnvoll sind, in denen V längs W katenär ist.

7.2. Eine Analyse des Beweises von Satz 7. zeigt, daß man mit Hilfe einer modifizierten (H)-Bedingung (wo $\bar{x}$ durch einen speziellen Punkt $x' \neq x$ ersetzt ist) aus der Existenz eines $C\,M_V$-Punktes x nicht schließen kann, daß x' ein $C\,M_V$-Punkt ist. Um die Cohen-Macaulay-Eigenschaft für x' in diesem Rahmen zu erhalten, kann man wie folgt über die Cohen-Macaulay-Eigenschaft des allgemeinen Punktes $\bar{x} \in W$ schließen:

7.2.1. Korollar. Seien V und W wie im Satz 7. Sei V katenär längs W in x und x'. Wenn x ein $C\,M_V$-Punkt ist und (H) sowohl für x und $\bar{x}$ als auch für x' und $\bar{x}$ gilt, dann ist x' ein $C\,M_V$-Punkt.

Beweis. Satz 7. und Korollar 7.1.

7.3. Bemerkung. Für derartige Übertragungen von Cohen-Macaulay-Eigenschaften auf lokal geringten Räumen kann man versuchen, flache Morphismen zwischen $\operatorname{Spec} O_{V,\bar{x}}$ und $\operatorname{Spec} O_{V,x}$ heranzuziehen. Solche flachen Morphismen ψ erzwingen zusammen mit der Cohen-Macaulay-Eigenschaft einer geeigneten Lokalisierung von $O_{V,x}$ und der Faser von ψ die Cohen-Macaulay-Eigenschaft von $O_{V,\bar{x}}$. Besitzt das maximale Ideal von $O_{V,x}$ bei ψ ein Urbild $\mathfrak{p}_{\bar{x}}$, so daß die Lokalisierung von $O_{V,\bar{x}}$ nach $\mathfrak{p}_{\bar{x}}$ ein Cohen-Macaulay-Ring ist, dann liefert die Flachheit von ψ die Cohen-Macaulay-Eigenschaft von $O_{V,x}$ und der Faser ψ (vgl. [7], No. 24, 6.3.5.). In unserem Rahmen ist aber für Multiplizitätsbetrachtungen jeweils die Cohen-Macaulay-Struktur des ganzen Ringes von Interesse. Dementsprechend ist die (H)-Bedingung angesetzt.
Im Fall von (lokal noetherschen) Präschemata $V \supset W$ sind solche Morphismen ψ stets flach ([7], No. 24, 2.1.); sie liefern jedoch keine Informationen.

8. Charakterisierung der (H)-Bedingung (vgl. [10]).
Ist V ein algebraisches Schema und W ein nicht-singuläres, irreduzibles und abgeschlossenes Unterschema von V, dann liefert die normale Flachheit von V längs W die Äquimultiplizität von V in allen Punkten von W (vgl. [12], Cor. 3, S. 187). Analog hierzu beweisen wir den folgenden

8.1. Satz. *Seien V und W lokal geringte Räume wie im Ssatz 7. Ist* (H) *für einen Punkt $x \in \boldsymbol{W}$ und den allgemeinen Punkt $\bar{x} \in \boldsymbol{W}$ erfüllt, dann gilt*

$$e_0(\mathfrak{q}_x) = e_0(\mathfrak{q}_W).$$

Beweis. Für genügend großes n betrachten wir das Polynom

$$H_W^0(n) = e_0(\mathfrak{q}_W) \cdot \binom{n+s}{s} + \cdots + e_s\,(\mathfrak{q}_W),$$

mit $s = \dim O_{V,\bar{x}}$.
Ferner sei für genügend großes $n\, H_x^0(n)$ das durch die (H)-Bedingung gegebene Polynom

$$H_x^0(n) = \sum_{p+q=n} H_W(p) \cdot \binom{q+r-1}{r-1}.$$

Die Differenz

$$H_x^0(n) - \sum_{p+q=n} H_W^0(p) \cdot \binom{q+r-1}{r-1} =: P_{r-1}$$

ist ein Polynom vom Grad $\leqq r-1$. Unter Benutzung von

$$\sum_{p+q=n} \binom{p+s}{s} \cdot \binom{q+r-1}{r-1} = \binom{n+s+r}{s+r}$$

erhalten wir daher

$$H_x^0(n) = e_0(\mathfrak{q}_W) \cdot \binom{n+s+r}{s+r} + \cdots + e_s(\mathfrak{q}_W) \binom{n+r}{r} + P_{r-1},$$

d. h. $e_0(\mathfrak{q}_x) = e_0(\mathfrak{q}_W)$, q. e. d.
Diese „schwache Äquimultiplizität" liefert zusammen mit Korollar 7.1. eine Charakterisierung der (H)-Bedingung.

8.2. Korollar. Seien V und W wie in Satz 8.1. Sei V katenär längs W in $x \in \boldsymbol{W}$. Ist der allgemeine Punkt $\bar{x} \in W$ ein CM_V-Punkt, dann haben wir: (H) gilt für x und $\bar{x}$ genau dann, wenn x ein CM_V-Punkt ist und $e_0(\mathfrak{q}_x) = e_0(\mathfrak{q}_W)$.

Korollar 8.2. liefert eine idealtheoretische Charakterisierung von (H). In dem folgenden Abschnitt geben wir eine kohomologische Beschreibung von (H).

8.3. Seien $V_x =:$ Spec O_x und $W_x =:$ Spec $O_x/\mathfrak{q}_x$. Mit $H_{\dot{W}_x}\,(V_x, \tilde{O}_x)$ bezeichnen wir die zur Antifiltrierung der abgeschlossenen Mengen von W_x gehörige Kohomologie ([6], 3.2.). Außerdem betrachten wir den Koszulkomplex von O_x bezüglich $\mathfrak{q}_x$ und die zugehörige Homologie $H.\,(\mathfrak{q}_x, O_x)$ sowie Kohomologie $H^\cdot\,(\mathfrak{q}_x, O_x)$. Für das Parameterideal $\mathfrak{q}_x = (f_1, \ldots, f_d)$ bezeichnen wir die Familie $(f_1^n, \ldots, f_d^n) =: q_x^n$. Dann gilt nach [8], Th. 2.3.:

$$H^i_{W_x}(V_x, \tilde{O}_x) \cong \varinjlim_n H^i(q_x^n, O_x).$$

Da $H^{d-1}(\mathfrak{q}_x, O_x) = 0$ mit $d = \dim O_x$ nach [21], S. IV—21, die Cohen-Macaulay-Struktur von O_x charakterisiert, ist zu erwarten, daß die (H)-Bedingung durch das Verschwinden lokaler Kohomologiegruppen beschrieben werden kann.

8.4. Korollar. Unter den Voraussetzungen des Korollars 8.2. haben wir: (H) gilt für x und $\bar{x}$ genau dann, wenn $H^i_{W_x}(V_x, \tilde{O}_x) = 0$ für $i \leqq d - 1$ und

$$e_0(\mathfrak{q}_x) = e_0(\mathfrak{q}_W).$$

Beweis [10]. Die Kohomologiegarbe $H^i_{W_x}(\tilde{O}_x)$ ist die zum O_x-Modul $H^i_{W_x}(V_x, \tilde{O}_x)$ assoziierte Garbe (vgl. [8], Prop. 2.2.). Das Verschwinden dieser Garben charakterisiert nach [8], Th. 3.8., die kohomologische Dimension von $\tilde{O}_x$ bezüglich W_x. In unserem Fall ist $W_x = \{\mathfrak{m}_x\}$; damit gilt $\operatorname{codh}_{W_x} \tilde{O}_x = \operatorname{codh} O_x$ und nach [8], Prop. 2.2.

$$H^i_{\{\mathfrak{m}_x\}}(V_x, \tilde{O}_x)^{\sim} \cong H^i_{\{\mathfrak{m}_x\}}(\tilde{O}_x).$$

Nach [8, Cor. 3.10. ((i), (iv))] folgt die Behauptung, q. e. d.

8.5. Bemerkung. Satz 5.1. (2. Vergleichssatz) und Korollar 8.4. zeigen, daß das Verschwinden von lokalen Kohomologiegruppen — abgesehen von einer schwachen Äquimultiplizität — als Obstruktionsmaß für die Gleichheit der Multiplizitäten von Gröbner und Weil angesehen werden kann. Allerdings hängt es von den zugrunde gelegten Primäridealen ab.

9. Bemerkungen zur Anwendung des Hironake-Isomorphismus auf Untersuchungen von Cohen-Macaulay-Punkten.

Der Hironaka-Isomorphismus (siehe [12], S. 184 und 9.1.) ist ein wesentliches technisches Hilfsmittel der Auflösungstheorie von Singularitäten [12]. Grothendieck hat nun in [7], No. 32, diesen Isomorphismus verallgemeinert. Wir weisen in diesem Abschnitt darauf hin, daß diese von Hironaka benutzte Technik auch für unsere Problematik über Cohen-Macaulay-Punkte herangezogen werden kann. Insbesondere läßt sich unsere (H)-Bedingung unter einigen zusätzlichen Voraussetzungen aus dem Grothendieck-Hironaka-Isomorphismus herleiten. Diese Voraussetzungen ergeben sich für die analogen Betrachtungen über reguläre Punkte bereits aus gewissen Flachheitsforderungen Der in der Auflösungstheorie von Hironaka verwandte Isomorphismus reicht für unsere Untersuchungen nicht aus.

9.1. Satz. (Grothendieck-Hironaka-Isomorphismus) ([7], No. 32, (19.7.1)). *Sei A ein Ring mit einem Ideal $\mathfrak{K}$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ eine $A/\mathfrak{K}$-reguläre Folge von Elementen aus A. Ferner sei $\mathfrak{J} = f_1 A + \cdots + f_n A$ und $\mathfrak{L} = \mathfrak{J} + \mathfrak{K}$. M bezeichne einen A-Modul. Ist die Graduierung $\operatorname{gr}_{\mathfrak{K}}(M)$ ein flacher $A/\mathfrak{K}$-Modul,* *dann ist* $\mathrm{gr}_{\mathfrak{L}}^{\cdot}(M)$ *ein flacher* $A/\mathfrak{L}$*-Modul, und es existiert ein (kanonisch definierter) Isomorphismus*

$$\psi\colon\ ((\mathrm{gr}_{\mathfrak{L}}^{\cdot}(M))\otimes_A A/\mathfrak{L})\,[T_1,\ldots,T_n] \to \mathrm{gr}_{\mathfrak{L}}^{\cdot}(M).$$

Im folgenden geben wir den Isomorphismus so an, wie wir ihn für unsere Untersuchungen benötigen.

9.2. Korollar. Sei O ein lokaler (noetherscher) Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in O und $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal mit $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$, so daß $\bar{\mathfrak{q}} =: \mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ in $O/\mathfrak{p} =: \tilde{O}$ ein Parameterideal ergibt. Wenn $\tilde{O}$ ein Cohen-Macaulay-Ring und $\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}^{\cdot}(O)$ ein flacher $\tilde{O}$-Modul ist, dann existieren Isomorphismen

$$\psi_i\colon \sum_{p+q=i} \mathrm{gr}_{\bar{\mathfrak{q}}}^{0}(\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}^{p}(O)) \otimes_{O/\mathfrak{q}} \mathrm{gr}_{\bar{\mathfrak{q}}}^{q}(\tilde{O}) \to \mathrm{gr}_{\mathfrak{q}}^{i}(O).$$

Beweis. Wir wählen zunächst Elemente $f_1,\ldots,f_r \in \mathfrak{q}$, so daß ihre Restklassen modulo $\mathfrak{p}$ eine Minimalbasis von $\bar{\mathfrak{q}} \subset \tilde{O}$ bilden. Da $\tilde{O}$ ein Cohen-Macaulay-Ring und $\bar{\mathfrak{q}} = (\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_r)$ ein Parameterideal ist, bilden $f_1,\ldots,f_r$ eine $\tilde{O}$-reguläre Folge. Ferner gilt $\mathfrak{q} = f_1\cdot O + \cdots + f_r\cdot O + \mathfrak{p}$. Nach 9.1. besteht ein Isomorphismus

$$\psi\colon ((\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}^{\cdot}(O)) \otimes_0 O/\mathfrak{q})\,[T_1,\ldots,T_r] \to \mathrm{gr}_{\bar{\mathfrak{q}}}^{\cdot}(O).$$

Nach [1], II, § 3, 7, Cor. 2 von Prop. 6, ist die linke Seite isomorph zu

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}^{\cdot}(O) \otimes_{O/\mathfrak{p}} (O/\mathfrak{q}\,[T_1,\ldots,T_r]) = \mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}^{\cdot}(O) \otimes_{O/\mathfrak{p}} \mathrm{gr}_{\bar{\mathfrak{q}}}^{\cdot}(\tilde{O}).$$

da $\tilde{O}$ ein Cohen-Macaulay-Ring ist.
Nach [1], III, § 1, S. 8, läßt sich nunmehr ψ in der folgenden Form schreiben:

$$\psi\colon \mathrm{gr}_{\bar{\mathfrak{q}}}^{0}(\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}}^{\cdot}(O)) \otimes_{O/\mathfrak{q}} \mathrm{gr}_{\bar{\mathfrak{q}}}^{\cdot}(\tilde{O}) \to \mathrm{gr}_{\mathfrak{q}}^{\cdot}(O),\ \text{q. e. d.}$$

Abschließend stellen wir ein Hauptergebnis mit einigen Bemerkungen zur Diskussion, das darüber Auskunft gibt, wie man aus der normalen Flachheit unter zusätzlichen Voraussetzungen die Spezialisierungsinvarianz von Cohen-Macaulay-Punkten erhalten kann. Für die Beweise verweisen wir auf die Note [11], die demnächst erscheinen wird.

9.3. Satz. *Seien V, W lokal geringste Räume wie in Satz 7. Mit $\mathfrak{p}$ bezeichnen wir eine definierende Idealgarbe von W. Seien $\bar{x} \in W$ der allgemeine Punkt und $x \in W$ ein beliebiger Punkt. Es gelten die folgenden Bedingungen:*

(1) *$\bar{x}$ ist ein CM_V-Punkt.*
(2) *$\tilde{O} =: O_x/\mathfrak{p}_x$ ist ein Cohen-Macaulay-Ring.*
(3) $l(O_x/\mathfrak{q}_x)\cdot l_{O_x/\mathfrak{p}_x}(\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}_x}^{p}(O_x)/\bar{\mathfrak{m}}_x\,\mathrm{gr}_{\mathfrak{p}_x}^{p}(O_x)) = l_{O_{\bar{x}}/\mathfrak{q}_{\bar{x}}}(\mathrm{gr}_{\mathfrak{q}_{\bar{x}}}^{p}(O_{\bar{x}}))$, *wobei* $\mathfrak{q}_x \supset \mathfrak{p}_x$ *und* $\mathfrak{q}_{\bar{x}}$ *Parameterideale in* $O_x, O_{\bar{x}}$ *sind,* $\bar{\mathfrak{m}}_x = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{p}_x$.

Wenn V normal flach längs W in x ist, dann ist x ein CM_V-Punkt.

9.4. Bemerkungen

1. Zum Beweis dieses Satzes wollen wir an dieser Stelle erwähnen, daß man aus den Voraussetzungen (2), (3) und der normalen Flachheit mit Hilfe des Korollars 9.2. die (H)-Bedingung herleiten kann. Aus den früheren Betrachtungen folgt dann die Behauptung.

2. Die Längenbedingung in Voraussetzung (3) ergibt in dem von HIRONAKA betrachteten Fall für reguläre Punkte (d. h. $\mathfrak{q}_x = \mathfrak{m}_x$ und $\mathfrak{q}_{\bar{x}} = \mathfrak{m}_{\bar{x}}$) die Dimensionsbedingung ([12], S. 186)

$$\dim_{O_{\bar{x}}/\mathfrak{m}_{\bar{x}}} (\mathrm{gr}^p_{\mathfrak{m}_{\bar{x}}}(O_{\bar{x}})) = \dim_{O_x/\mathfrak{m}_x} (\mathrm{gr}^0_{\overline{\mathfrak{m}}_x}(\mathrm{gr}^p_{\mathfrak{p}_x}(O_x))),$$

die dann bereits aus der normalen Flachheit folgt.
Da für die Betrachtung von Cohen-Macaulay-Punkten die jeweiligen graduierten Moduln keine Vektorräume sind, macht sich eine derartige Voraussetzung (3) über das Verhalten von Längen erforderlich.

LITERATUR

[1] BOURBAKI, N.: Algèbre, chap. II, III, 3e éd., Hermann, Paris 1962.
[2] BUDACH, L., und W. VOGEL: Cohen-Macaulay-Moduln und der Bézoutsche Satz. Monatsh. Math. *73* (1969), 97–111.
[3] GRÖBNER, W.: Moderne algebraische Geometrie. – Die idealtheoretischen Grundlagen. Springer-Verlag, Wien-Innsbruck 1949.
[4] GRÖBNER, W.: Über einige moderne Aspekte der algebraischen Geometrie. Mitteilungen der MGdDDR (im Druck).
[5] GRÖBNER, W.: Algebraische Geometrie I. Bibliographisches Institut, Mannheim 1968.
[6] GROTHENDIECK, A.: Sur quelques points d'algèbre homologique. Tôhoku J. Math. *9* (1957), 119–221.
[7] GROTHENDIECK, A.: Eléments de géométrie algébrique. I. H. E. S., Publ. Math., Paris No. 4 (1960), No. 20 (1964), No. 24 (1965), No. 32 (1967).
[8] GROTHENDIECK, A.: Local Cohomology. Lect. Notes Math. No. 41, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1967.
[9] HERRMANN, M., und W. VOGEL: Bemerkungen zur Multiplizitätstheorie von Gröbner und Serre. J. reine und angew. Math. *241* (1970), 42–46.
[10] HERRMANN, M., und W. VOGEL: Über Cohen-Macaulay-Punkte. J. Algebra *24* (1973), 396–404.
[11] HERRMANN, M., und W. VOGEL: Normale Flachheit und Cohen-Macauley-Punkte. Math. Nachr. (im Druck).
[12] HIRONAKA, H.: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I. Ann. Math. *79* (1964), 109–203.
[13] KELLER, O.-H.: Über eine Definition von S. Lefschetz in der topologischen Schnittheorie. Sitzungsbericht Sächs. Akad. Leipzig *108*, Heft 4, Berlin 1969.
[14] MUMFORD, D.: Lectures on curves on an algebraic surface. Ann. Math. Studies, Nr. 59, Princeton 1966.
[15] NAGATA, M.: Local rings. Intersc. Publ. Nr. 13, New York, 1962.

[16] NORTHCOTT, D. G.: Semi-regular rings and semi-regular ideals. Quart. J. Math. Oxford, Ser. (2) *9* (1960), 81–104.
[17] REES, D.: The grade of an ideal or module. Proc. Cambridge Philos. Soc. *53* (1957), 28–42.
[18] REITBERGER, H., und W. VOGEL: A comohology condition in idealtheoretical multiplicity theory. Rend. Mat., Ser. VI, (3) *5* (1972), 1–7.
[19] RENSCHUCH, B.: Verallgemeinerungen des Bézoutschen Satzes. Sitzungsber. Sächs. Akad. Leipzig *107*, Heft 4, Berlin 1966.
[20] SERRE, J.-P.: Faisceaux algébrique coherents. Ann. Math. *61* (1955), 197–278.
[21] SERRE, J.-P.: Algèbre locale-Multiplicités. Lect. Notes Math., No. 11, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1965.
[22] VOGEL, W.: Eine Bemerkung zur idealtheoretischen Multiplizitätstheorie. Math. Ann. *166* (1966), 64–75.
[23] VOGEL, W.: Idealtheoretische Schnittpunktsätze in homogenen Ringen über Ringen mit Vielfachkettensatz. Math. Nachr. *34* (1967), 277–295.
[24] VOGEL, W.: Schnitte von perfekten Mannigfaltigkeiten. In: Beiträge zur algebraischen Geometrie, Bd. I. Mannheim (im Druck).
[25] VAN DER WAERDEN, B. L.: Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie. Math. Ann. *97* (1927), 756–774.
[26] VAN DER WAERDEN, B. L.: Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie. Math. Ann. *102* (1929), 337—362.
[27] WEIL, A.: Foundations of algebraic geometry, 2. ed., Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 29, Providence 1962.
[28] ZARISKI, O., and P. SAMUEL: Commutative algebra, Vol. II, Princeton 1962.
[29] ZARISKI, O.: Equisingular points on algebraic varieties. Sem. dell'Inst. Naz. Alta Matem. 1962–1963. Ed. Cremonese, Romana 1965.

Manuskripteingang: 30. 9. 1971

VERFASSER:
MANFRED HERRMANN, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin

WOLFGANG VOGEL, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg