Beiträge zur Algebra und Geometrie
2 (1974), 87—101

Zur Kohomologie von projektiven Hyperflächen

PETER BRÜCKMANN

Herrn Prof. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

In der vorliegenden Arbeit werden mit rein algebraischen Mitteln die Kohomologiegruppen von glatten, projektiven Hyperflächen $X \subset P_k^{d+1}$ $(d = \dim X)$ mit Koeffizienten in den kohärenten, algebraischen Garben $\Omega^r(p) = \mathcal{L}(p\,E) \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \Omega^r$ bestimmt (siehe (1)). Wir verwenden die induktive Methode (vgl. [3]), d. h., wir untersuchen exakte Sequenzen von kohärenten, algebraischen Garben. Es wird gezeigt, daß bei fixiertem Grundkörper k die Dimension

$$\dim_k H^q(X, \Omega^r(p)) \quad (p, q, r \in Z; \ q, r \geqq 0)$$

nur abhängt von $\dim X, \deg X, p, q, r$. Vor allem aber wird die Abhängigkeit dieser Dimensionen vom Grundkörper k selbst geklärt (siehe Sätze 2 und 3). Insbesondere wird gezeigt, daß $h^{q,r} = \dim_k H^q(X, \Omega^r)$ und damit die verallgemeinerten Bettischen Zahlen $B_s = \sum\limits_{q+r=s} h^{q,r}$ (vgl. z. B. [2], Teil II, § 2, No. 41) unabhängig von k sind.

Es sei noch bemerkt, daß wir mit der Berechnung von $\dim_k H^0(X, \Omega^r(p))$ eine Vielzahl birationaler Invarianter der glatten, projektiven Hyperfläche X bestimmt haben. Wie man leicht zeigen kann, ist nämlich

$$\dim_k H^0(X, (\Omega^d)^f \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \Omega^r)$$

birationale Invariante von X (vgl. [1], Teil III, § 4, No. 1) und

$$(\Omega^d)^f \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \Omega^r \cong \mathcal{L}(f \cdot K) \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \Omega^r \cong \mathcal{O}(f \cdot (\deg X - d - 2)) \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \Omega^r$$
$$= \Omega^r\,(f \cdot (\deg X - d - 2)),$$

wobei $K = (\deg X - d - 2) \cdot E$ der kanonische Divisor der glatten Hyperfläche X ist (vgl. [1], Teil III, § 4, No. 3). Im Fall Char $k = 0$ ist (in der Terminologie von [7]) $(\Omega^d)^f \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \Omega^r = \Omega_T^{r+d\cdot f}$ eine Garbe von Keimen von Tensor-Differentialformen vom Grad $r + d \cdot f$ mit gewissen Symmetrieeigenschaften. Diese Symmetrie ist gegeben durch das Diagramm T, das aus einem Rechteck mit d Zeilen und f Spalten und einer weiteren Spalte mit r Maschen besteht, beziehungsweise durch den zugehörigen Jungschen Symmetrisator c_T (vgl. [7], Theorem 4).

Bezeichnungen. Es sei $X \subseteqq P^n$ eine glatte, projektive Mannigfaltigkeit, $\mathcal{O}$ die Garbe ihrer lokalen Ringe, E der Divisor des hyperebenen Schnittes auf X. Wir setzen

$$\mathcal{L}(p\,E) \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathfrak{F} = \mathfrak{F}(p) \tag{1}$$

für $\forall\, p \in Z$ und für jede algebraische Garbe $\mathfrak{F}$ auf X. Der Funktor $\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}(p)$ ist exakt, und die Garben $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}(p)$ sind lokal isomorph für $\forall\, p \in Z$ (vgl. [2], Teil III, § 2, No. 54, und [3], § 6). Es sei schließlich Ω^r die Garbe der Keime der (schiefsymmetrischen) Differentialformen vom Grad r auf X.

§ 1. Der projektive Raum P_k^n

Zunächst bestimmen wir die Kohomologiegruppen von P_k^n mit Koeffizienten in der Garbe $\Omega_{pn}^r(p)$. Es wird sich erweisen, daß ihre Dimensionen unabhängig sind von k. (Im komplexen Fall $k = C$ lassen sich diese Dimensionen mit Hilfe des Satzes von R. BOTT berechnen; vgl. [5].)

Nach allgemeinen Sätzen, die z. B. in [2] oder auch in [3] bewiesen sind, ist

A. $H^q(P^n, \Omega^r(p)) = 0$ für $q \in \{1, \ldots, n\}$ und für genügend großes $p \in Z$.

B. $H^q(P^n, \Omega^r(-p)) = 0$ für $q \in \{0, \ldots, n-1\}$ und für genügend großes $p \in Z$.

Es sei jetzt $P^{n-1} \subset P^n$ die Hyperebene mit der Gleichung $x_n = 0$. Folgende Sequenzen sind exakt:

$$0 \to \Omega_{pn}^r(-1) \xrightarrow{\alpha} \Omega_{pn}^r \xrightarrow{\beta} \mathfrak{A}^r \to 0, \tag{2}$$

$$0 \to \Omega_{pn-1}^{r-1}(-1) \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{A}^r \xrightarrow{\delta} \Omega_{pn-1}^r \to 0, \tag{3}$$

$$0 \to \mathcal{O}_{pn}(-1) \to \mathcal{O}_{pn} \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}_{pn-1} \to 0 \tag{4}$$

(vgl. [7], Lemma 10 und 15).

Dabei ist $\mathfrak{A}^r = \mathcal{O}_{pn-1} \underset{\mathcal{O}_{pn}}{\otimes} \Omega_{pn}^r$ und $\delta \circ \beta = \varphi^* : \Omega_{pn}^r \to \Omega_{pn-1}^r$ die Beschränkung der Differentialformen auf $P^{n-1} \subset P^n$.

Lemma 1.

$$\mathfrak{A}^r \cong \Omega^{r-1}_{P^{n-1}}(-1) \oplus \Omega^r_{P^{n-1}} \text{ (vgl. (3))}. \tag{5}$$

Beweis. Es genügt, eine solche Untergarbe $\mathfrak{B}^r$ von $\mathfrak{A}^r$ zu finden, daß $\delta: \mathfrak{B}^r \to \Omega^r_{P^{n-1}}$ isomorph ist.

Wir definieren zunächst ein entsprechendes Garbendatum: Sei $U_i \subset P^n$ die affine offene Untermenge $x_i \neq 0$ ($i \in \{0, \ldots, n-1\}$) und $V \subseteqq P^{n-1} \cap U_i$ eine offene Untermenge von P^{n-1} (bezüglich der Zariskischen Topologie). Mit $B^r_i(V)$ bezeichnen wir denjenigen Untermodul des $\Gamma(V, \mathcal{O}_{P^{n-1}})$-Moduls $\Gamma(V, \mathfrak{A}^r)$, der erzeugt wird von den Schnitten $\beta\left(d\frac{x_{i_1}}{x_i} \wedge \cdots \wedge d\frac{x_{i_r}}{x_i}\right) \in \Gamma(V, \mathfrak{A}^r)$ mit $0 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq n-1$, $i_\nu \neq i$.

Wenn $V \subseteqq U_i \cap U_j \cap P^{n-1}$, so ist ebenso $B^r_j(V)$ definiert.

Aber aus $d\frac{x_l}{x_j} = \frac{x_i}{x_j} \cdot d\frac{x_l}{x_i} - \frac{x_i \cdot x_l}{x_j^2} \cdot d\frac{x_j}{x_i}$ für $\forall\, l \in \{0, \ldots, n-1\}$ folgt sofort $B^r_i(V) = B^r_j(V)$. Weil der Homomorphismus δ: $B^r_i(V) \to \Gamma(V, \Omega^r_{P^{n-1}})$ isomorph ist, erfüllt die durch die $B^r_i(V)$ definierte Garbe $\mathfrak{B}^r$ unsere Forderung, und Lemma 1 ist bewiesen.

Lemma 2.

Sei $\zeta(n, p) = \binom{p+n}{n}$ *für* $\forall\, p, n \in Z$, $n \geqq 1$. *Dann ist*

$$\left.\begin{aligned} \dim H^0(P^n, \mathcal{O}(p)) &= \zeta(n, p), \\ \dim H^q(P^n, \mathcal{O}(p)) &= 0 \ \textit{für}\ q \in \{1, \ldots, n-1\}, \\ \dim H^n(P^n, \mathcal{O}(p)) &= \zeta(n, -p-n-1), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \dim H^0(P^n, \Omega^n(p)) &= \zeta(n, p-n-1), \\ \dim H^q(P^n, \Omega^n(p)) &= 0 \ \textit{für}\ q \in \{1, \ldots, n-1), \\ \dim H^n(P^n, \Omega^n(p)) &= \zeta(n, -p). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Beweis. (6) ist gut bekannt und folgt leicht aus (4). (7) folgt aus (6) wegen

$$\Omega^n_{P^n} = \mathcal{O}_{P^n}(-n-1).$$

Satz 1. *Sei*

$$\psi(n, r, p) = \binom{p-1}{r} \cdot \binom{p+n-r}{n-r} \quad \textit{und} \quad 1 \leqq r \leqq n-1. \tag{8}$$

Dann ist

$$\dim H^0(P^n, \Omega^r(p)) = \psi(n, r, p), \tag{9}$$

$$\dim H^q(P^n, \Omega^r(p)) = \delta_{q,r} \cdot \delta_{p,0} \ \textit{für}\ q \in \{1, \ldots, n-1\},$$

$$\dim H^n(P^n, \Omega^r(p)) = \psi(n, n-r, -p). \tag{10}$$

Folgerungen.

1. $\chi(P^n, \Omega^r(p)) = \frac{1}{n!} \cdot \binom{n}{r} \cdot (p-r) \cdots (p-1) \cdot (p+1) \cdots (p+n-r)$.

(Diese Formel erhält man einfacher über den Satz von RIEMANN-ROCH.)

2. *Wenn* $0 < r \leqq n$, *so ist* $H^0(P^n, \Omega^r(p)) = 0 \Leftrightarrow p \leqq r$.
3. *Wenn* $-n + r \leqq p < 0$ *oder* $0 < p \leqq r$, *so ist* $H^q(P^n, \Omega^r(p)) = 0$ *für* $\forall\, q \in \{0, \ldots, n\}$; vgl. [5].
4. *Für feste* n, r, p *kann höchstens eine der Gruppen* $H^q(P^n, \Omega^r(p))$, $q \in \{0, \ldots, n\}$, *von Null verschieden sein.*

Beweis von Satz 1. Nach dem Serreschen Dualitätssatz ist

$$\dim H^q(P^n, \Omega^r(p)) = \dim H^{n-q}(P^n, \Omega^{n-r}(-p)). \tag{11}$$

Lemma 3. *Es sei* $n \geqq 2$, $P^{n-1} \subset P^n$ *die Hyperebene* $x_n = 0$ *und*

$$\varphi^*: H^0(P^n, \Omega^r_{pn}(p)) \to H^0(P^{n-1}, \Omega^r_{pn-1}(p))$$

die Beschränkung. Dann ist

$$H^0(P^n, \Omega^r_{pn}(p)) \cong \operatorname{Ker} \varphi^* \oplus H^0(P^{n-1}, \Omega^r_{pn-1}(p))$$

für $\forall\, p \in Z$ *und für* $\forall\, r \geqq 0$.

Beweis. Sei $P \in P^n \setminus P^{n-1}$ ein beliebiger Punkt, und sei $U = P^n \setminus \{P\}$. Sei $\pi_P : U \to P^{n-1}$ die Projektion aus P und

$$\pi_P^* : H^0(P^{n-1}, \Omega^r_{pn-1}(p)) \to \Gamma(U, \Omega^r_{pn}(p))$$

die entsprechende Einbettung der globalen Schnitte von $\Omega^r_{pn-1}(p)$. Es ist $\varphi^* \circ \pi_P^* = 1$. Außerdem ist

$$\Gamma(U, \Omega^r_{pn}(p)) \cong \Gamma(P^n, \Omega^r_{pn}(p)) = H^0(P^n, \Omega^r_{pn}(p)),$$

weil der Divisor eines beliebigen Schnittes aus $\Gamma(U, \Omega^r_{pn}(p))$ bereits effektiv ist. Damit ist Lemma 3 bewiesen.

Es ist leicht zu zeigen, daß $\operatorname{Ker} \varphi^*$ genau aus den Differentialformen besteht, die die Darstellung

$$\omega = x_n^{r+1} \cdot \sum_{0 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq n-1} Q_{i_1,\ldots,i_r} \cdot d\,\frac{x_{i_1}}{x_n} \wedge \cdots \wedge d\,\frac{x_{i_r}}{x_n}$$

gestatten, wobei

$$Q_{i_1,\ldots,i_r} = Q_{i_1,\ldots,i_r}(x_0, \ldots, x_n) \in k[x_0, \ldots, x_n]$$

Formen vom Grad $p - r - 1$ sind. Deshalb ist

$$\dim_k \operatorname{Ker} \varphi^* = \binom{n}{r} \cdot \binom{n+p-r-1}{n}. \tag{12}$$

Wir beweisen jetzt (9) durch Induktion nach $n - r$:
Für $n = r$ ist

$$\dim H^0(P^r, \Omega^r(p)) = \zeta(r, p - r - 1) = \binom{p-1}{r} = \psi(r, r, p).$$

Es sei nach Induktionsvoraussetzung

$$\dim H^0(P^{n-1}, \Omega^r_{pn-1}(p)) = \psi(n - 1, r, p).$$

Dann folgt aus Lemma 3 und aus (12):

$$\dim H^0(P^n, \Omega^r_{pn}(p)) = \psi(n - 1, r, p) + \binom{n}{r} \cdot \binom{n + p - r - 1}{n} = \psi(n, r, p),$$

wie leicht zu zeigen ist. Damit ist (9) bewiesen.
Nach (11) folgt hieraus (10).

Es sei nach Induktionsvoraussetzung Satz 1 richtig für $n - 1$ statt n. Dann folgt nach Lemma 1:

$$\dim H^0(P^{n-1}, \mathfrak{A}^r(p)) = \psi(n - 1, r - 1, p - 1) + \delta_{r,1} \cdot \delta_{p,1} + \psi(n - 1, r, p),$$
$$\dim H^q(P^{n-1}, \mathfrak{A}^r(p)) = \delta_{q,r} \cdot \delta_{p,0} + \delta_{q+1,r} \cdot \delta_{p,1} \qquad (13)$$

für $q \in \{1, \ldots, n - 2\}$.
Weil (9) bereits bewiesen ist, folgt weiter

$$\dim H^0(P^n, \Omega^r_{pn}(p - 1)) + \dim H^0(P^{n-1}, \mathfrak{A}^r_{pn-1}(p)) - \dim H^0(P^n, \Omega^r_{pn}(p))$$
$$= \psi(n, r, p - 1) + \psi(n - 1, r - 1, p - 1) + \delta_{r,1} \cdot \delta_{p,1} + \psi(n - 1, r, p) - \psi(n, r, p)$$
$$= \delta_{r,1} \cdot \delta_{p,1}.$$

Hiermit und mittels (2) berechnen wir zunächst $\dim H^1(P^n, \Omega^r_{pn}(p))$:

a) Wenn $r > 1$, so folgt aus A und der exakten Sequenz

$$0 \to H^1(P^n, \Omega^r_{pn}(p - 1)) \to H^1(P^n, \Omega^r_{pn}(p)) \quad \text{für} \quad \forall\, p \in Z,$$

$$H^1(P^n, \Omega^r_{pn}(p)) = 0 \quad \text{für} \quad \forall\, p \in Z.$$

b) Wenn $r = 1$, so ist dieselbe Sequenz exakt für $p \neq 1$. Nach A folgt

$$H^1(P^n, \Omega^1_{pn}(p)) = 0 \quad \text{für} \quad \forall\, p > 0. \qquad (14)$$

α) Wenn $r = 1$ und $n \geqq 3$, so ist die Sequenz

$$H^1(P^n, \Omega^1(p - 1)) \to H^1(P^n, \Omega^1(p)) \to H^1(P^{n-1}, \mathfrak{A}^1(p))$$

exakt und $\dim H^1(P^{n-1}, \mathfrak{A}^1(p)) = \delta_{p,0}$ (siehe (13)). Nach B folgt

$$H^1(P^n, \Omega^1(p)) = 0 \quad \text{für} \quad \forall\, p < 0.$$

β) Wenn $r = 1$ und $n = 2$, so folgt aus (14) und (11)

$$H^1(P^2, \Omega^1_{p2}(p)) = 0 \quad \text{für} \quad \forall\, p < 0.$$

Damit ist gezeigt $H^1(P^n, \Omega^1_{pn}(p)) = 0$ für $p \neq 0$ $(n \geqq 2)$.
Nach (9) ist die Sequenz

$$0 \to H^0(P^{n-1}, \mathfrak{A}^1(1)) \to H^1(P^n, \Omega^1_{pn}) \to 0$$

exakt. Folglich ist

$$\dim H^1(P^n, \Omega^r_{pn}(p)) = \delta_{r,1} \cdot \delta_{p,0} \quad \text{für} \quad n \geqq 2.$$

Nach (11) folgt

$$\dim H^{n-1}(P^n, \Omega^r_{pn}(p)) = \delta_{r,n-1} \cdot \delta_{p,0} \quad \text{für} \quad n \geqq 2.$$

Es sei jetzt $q \in \{2, \ldots, n-2\}$, $r \in \{1, \ldots, n-1\}$. Dann folgt aus (13), A, B und aus der exakten Sequenz

$$H^{q-1}(P^{n-1}, \mathfrak{A}^r(p)) \xrightarrow{d} H^q(P^n, \Omega^r_{pn}(p-1)) \xrightarrow{\alpha}$$
$$\xrightarrow{\alpha} H^q(P^n, \Omega^r_{pn}(p)) \xrightarrow{\beta} H^q(P^{n-1}, \mathfrak{A}^r(p))$$

leicht $H^q(P^n, \Omega^r_{pn}(p)) = 0$ für $\forall\, p \in Z$, wenn nur $q \neq r$ oder $p \neq 0$.

Damit ist die Sequenz

$$0 \to H^{q-1}(P^{n-1}, \mathfrak{A}^q(1)) \to H^q(P^n, \Omega^q_{pn}) \to 0$$

exakt für $q \in \{2, \ldots, n-2\}$. Wegen (13) ergibt sich also $\dim H^q(P^n, \Omega^q_{pn}) = 1$, und Satz 1 ist bewiesen.

Im besonderen behaupten Satz 1 und Lemma 2

$$\dim H^r(P^n, \Omega^r_{pn}) = 1 \quad \text{für} \quad \forall\, r \in \{0, \ldots, n\}.$$

Wir geben jetzt einen erzeugenden Kozyklus an:

Lemma 4. *Es sei $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in \{0,\ldots,n\}}$ die Überdeckung von P^n durch die affinen Untermengen $U_i = \{x \in P^n \mid x_i \neq 0\}$. Dann ist die Kokette $\omega^{(r)} \in C^r(\mathfrak{U}, \Omega^r_{pn})$ mit*

$$\omega^{(r)}_{i_0,\ldots,i_r} = \frac{x_{i_0}}{x_{i_r}} \cdot d\frac{x_{i_1}}{x_{i_0}} \wedge d\frac{x_{i_2}}{x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge d\frac{x_{i_r}}{x_{i_{r-1}}}$$

Kozyklus und nicht kohomolog zu Null.

Beweis. Es sei $0 < r \leqq n$. Nach (2) und Satz 1 ist die Sequenz

$$0 \xrightarrow{\beta} H^{r-1}(P^{n-1}, \mathfrak{A}^r(1)) \xrightarrow{d} H^r(P^n, \Omega^r_{pn}) \xrightarrow{\alpha} 0$$

exakt. Außerdem folgt aus (3), (5) und Satz 1, daß der Homomorphismus

$$\gamma: H^{r-1}(P^{n-1}, \Omega^{r-1}_{pn-1}) \to H^{r-1}(P^{n-1}, \mathfrak{A}^r(1))$$

isomorph ist. Folglich ist der Homomorphismus

$$d \circ \gamma : H^{r-1}(P^{n-1}, \Omega^{r-1}_{P^{n-1}}) \to H^r(P^n, \Omega^r_{P^n})$$

isomorph.
Mit Hilfe dieses Isomorphismus und durch Induktion nach r werden die Kozyklen $\omega^{(r)}$ definiert. Wenn nämlich $P^{n-1} \subset P^n$ die Hyperebene mit der Gleichung $x_n = 0$ ist, wird

$$(d \circ \gamma)(\omega^{(r-1)}) = (-1)^r \cdot \omega^{(r)},$$

wie leicht gezeigt werden kann.

§ 2. Hyperflächen

Es sei in diesem Paragraphen $X \subset P^n_k$ glatte projektive Hyperfläche vom Grade $\deg X = m$ und der Dimension $\dim X = d = n - 1$. Wie bereits bemerkt, ist $K = (m - d - 2) \cdot E$ der kanonische Divisor von X.
Nach [7], Lemma 10 und 15, sind folgende Sequenzen exakt:

$$0 \to \mathcal{O}_{P^n}(-m) \to \mathcal{O}_{P^n} \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}_X \to 0, \tag{15}$$

$$0 \to \Omega^r_{P^n}(-m) \xrightarrow{\alpha} \Omega^r_{P^n} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{A}^r \to 0, \tag{16}$$

$$0 \to \Omega^{r-1}_X(-m) \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{A}^r \xrightarrow{\delta} \Omega^r_X \to 0. \tag{17}$$

Dabei ist $\mathfrak{A}^r = \mathcal{O}_X \underset{\mathcal{O}_{P^n}}{\otimes} \Omega^r_{P^n}$ und

$$\delta \circ \beta = \varphi^* : \Omega^r_{P^n} \to \Omega^r_X$$

die Beschränkung der Differentialformen von P^n auf X.

Lemma 5. *Wir setzen*

$$\chi(d, m, p) = \binom{p + d + 1}{d + 1} - \binom{p + d + 1 - m}{d + 1} \text{ und } \deg K = m - d - 2. \tag{18}$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \dim H^0(X, \mathcal{O}(p)) &= \chi(d, m, p), \\ \dim H^q(X, \mathcal{O}(p)) &= 0 \text{ für } q \in \{1, \ldots, d-1\}, \\ \dim H^d(X, \mathcal{O}(p)) &= \chi(d, m, \deg K - p), \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} \dim H^0(X, \Omega^d(p)) &= \chi(d, m, \deg K + p), \\ \dim H^q(X, \Omega^d(p)) &= 0 \text{ für } q \in \{1, \ldots, d-1\}, \\ \dim H^d(X, \Omega^d(p)) &= \chi(d, m, -p). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Beweis. Die Behauptungen von Lemma 5 sind gut bekannt, aber auch leicht zu zeigen. (19) folgt aus (15) und (6). (20) folgt aus (19), weil

$$\Omega^d_X \cong \mathcal{L}(K) \cong \mathcal{O}_X(\deg K)$$

ist.

Mit Hilfe von (16) und Satz 1 berechnen wir jetzt die Kohomologiegruppen von X mit Koeffizienten in den Garben $\mathfrak{A}^r(p)$. Es erweist sich, daß ihre Dimensionen unabhängig sind vom Grundkörper k.

Lemma 6. *Für* $1 \leqq r \leqq d$ *ist*

$$\dim H^0(X, \mathfrak{A}^r(p)) = \psi(n, r, p) - \psi(n, r, p-m) + \delta_{r,1} \cdot \delta_{p,m}, \tag{21}$$

$$\dim H^q(X, \mathfrak{A}^r(p)) = \delta_{q,r} \cdot \delta_{p,0} + \delta_{q+1,r} \cdot \delta_{p,m}; \quad q \in \{1, \ldots, d-1\}. \tag{22}$$

Etwas genauer: Die Homomorphismen

$$\beta\colon H^q(P^n, \Omega^q_{pn}) \xrightarrow{\sim} H^q(X, \mathfrak{A}^q) \tag{23}$$

und

$$d\colon H^q(X, \mathfrak{A}^{q+1}(m)) \xrightarrow{\sim} H^{q+1}(P^n, \Omega^{q+1}_{pn}) \tag{24}$$

sind Isomorphismen für $q \in \{1, \ldots, d-1\}$.

$$\dim H^d(X, \mathfrak{A}^r(p)) = \psi(n, n-r, m-p) - \psi(n, n-r, -p) + \delta_{n-1,r} \cdot \delta_{p,0}. \tag{25}$$

Beweis. Wir untersuchen den Homomorphismus

$$\alpha\colon H^q(P^n, \Omega^r_{pn}(p-m)) \to H^q(P^n, \Omega^r_{pn}(p)) \quad \text{für} \quad q \in \{1, \ldots, d\}.$$

Nach Satz 1 und Lemma 2 ist entweder $H^q(P^n, \Omega^r_{pn}(p-m)) = 0$ oder $H^q(P^n, \Omega^r_{pn}(p)) = 0$, d. h. $\operatorname{Im} \alpha = 0$.

Deshalb sind folgende Sequenzen exakt (siehe (16)):

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(P^n, \Omega^r_{pn}(p-m)) \xrightarrow{\alpha} H^0(P^n, \Omega^r_{pn}(p)) \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\beta} H^0(X, \mathfrak{A}^r(p)) \xrightarrow{d} H^1(P^n, \Omega^r_{pn}(p-m)) \xrightarrow{\alpha} 0, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} 0 \to H^q(P^n, \Omega^r_{pn}(p)) \xrightarrow{\beta} H^q(X, \mathfrak{A}^r(p)) \xrightarrow{d} \\ \xrightarrow{d} H^{q+1}(P^n, \Omega^r_{pn}(p-m)) \xrightarrow{\alpha} 0 \end{aligned} \tag{27}$$

für $q \in \{1, \ldots, d-1\}$,

$$\begin{aligned} 0 \to H^d(P^n, \Omega^r_{pn}(p)) \xrightarrow{\beta} H^d(X, \mathfrak{A}^r(p)) \xrightarrow{d} \\ \xrightarrow{d} H^n(P^n, \Omega^r_{pn}(p-m)) \xrightarrow{\alpha} H^n(P^n, \Omega^r_{pn}(p)) \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Aus (26) folgt (21). Aus (27) folgen (22), (23) und (24). (25) ergibt sich aus (28).

Bevor wir die Kohomologiegruppen von X mit Koeffizienten in $\Omega_X^r(p)$ berechnen, geben wir die zahlentheoretischen Funktionen an, die wir dabei verwenden wollen.

Sei $d, m, r, p \in Z$; $d, m > 0$; $0 \leqq r \leqq d$.

Wir setzen

$$\varphi(d, m, r, p) = \binom{p-1}{r} \cdot \binom{p+d+1-r}{d+1-r} + \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu \cdot \binom{d+2}{r+1-\nu} \cdot \binom{p+d-\nu(m-1)-r}{d+1},$$

$$\sigma(d, m, p) = \sum_{\mu=0}^{d+2} (-1)^\mu \cdot \binom{d+2}{\mu} \cdot \binom{-p-(\mu-1)\cdot(m-1)}{d+1}, \tag{29}$$

$$\varepsilon(d, m, r, p) = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } d \text{ gerade,} \\ \delta_{p, \left(r - \frac{d+1}{2}\right) m} & \text{, wenn } d \text{ ungerade und } 2r < d, \\ \delta_{p, \left(r - \frac{d-1}{2}\right) m} & \text{, wenn } d \text{ ungerade und } 2r > d. \end{cases}$$

Dann kann leicht gezeigt werden:

$$\chi(d, m, p) = \varphi(d, m, 0, p) + \delta_{p,0} \text{ (siehe (18))}, \tag{30}$$

$$\varphi(d, m, r, p) = \psi(d+1, r, p) - \psi(d+1, r, p-m) - \varphi(d, m, r-1, p-m) \text{ (siehe (9))}, \tag{31}$$

$$\varphi(d, 1, r, p) = \psi(d, r, p), \tag{32}$$

$$\sigma(d, m, p) = \chi(d, m, m-d-2-p) - \varphi(d, m, d, -p), \tag{33}$$

$$\sigma(d, 1, p) = 0, \tag{34}$$

$$\sigma(d, m, p) = 0, \text{ wenn } p \geqq m-d-1 \text{ oder } p \leqq -(d+1)\cdot(m-1), \tag{35}$$

$$\varepsilon(d, m, d-r, -p) = \varepsilon(d, m, r, p), \tag{36}$$

$$\varepsilon(d, m, r, p) = \varepsilon(d, m, r-1, p-m) + \delta_{d, 2r-1} \cdot (\delta_{p,m} - \delta_{p,0}). \tag{37}$$

Satz 2. *Sei* Char k *kein Teiler von* $m = \deg X$ *und* $1 \leqq r \leqq d-1$. *Dann ist*

$$\dim H^0(X, \Omega^r(p)) = \varphi(d, m, r, p), \tag{38}$$

$$\dim H^q(X, \Omega^r(p)) = \delta_{q,r} \cdot \delta_{p,0} \textit{ für } q \in \{1, \ldots, d-1\},\ q+r \neq d, \tag{39}$$

$$\dim H^{d-r}(X, \Omega^r(p)) = \sigma(d, m, p-r\cdot m) + \delta_{d,2r} \cdot \delta_{p,0} \tag{40}$$

$$= \sigma(d, m, -p-(d-r)\cdot m) + \delta_{d,2r} \cdot \delta_{p,0} \tag{41}$$

(siehe (35)),

$$\dim H^d(X, \Omega^r(p)) = \varphi(d, m, d-r, -p). \tag{42}$$

Satz 3. *Sei* Char k *Teiler von* $m = \deg X$ *und* $1 \leqq r \leqq d-1$. *Dann ist*

$$\dim H^0(X, \Omega^r(p)) = \begin{cases} \varphi(d, m, r, p), & \textit{wenn } r \textit{ ungerade}, \\ \varphi(d, m, r, p) + \delta_{p, \frac{r}{2}\cdot m}, & \textit{wenn } r \textit{ gerade}. \end{cases} \tag{43}$$

Für $1 \leqq q \leqq d-1$ *und* $q + r \neq d$ *wird*

$$\dim H^q(X, \Omega^r(p)) = \begin{cases} \delta_{p, \left[\frac{r-q+1}{2}\right]\cdot m}, & \textit{wenn } 1 \leqq q \leqq \min(r, d-r-1), \\ \delta_{-p, \left[\frac{q-r+1}{2}\right]\cdot m}, & \textit{wenn } \max(r, d-r+1) \leqq q \leqq d-1, \\ 0 & \textit{in allen anderen Fällen}. \end{cases} \tag{44}$$

Im besonderen ist

$$\dim H^r(X, \Omega^r(p)) = \delta_{p,0}, \quad \textit{wenn nur } d \neq 2r, \tag{45}$$

$$\dim H^q(X, \Omega^r) = \delta_{q,r}, \quad \textit{wenn nur } d \neq q + r. \tag{46}$$

Weiter ist

$$\dim H^{d-r}(X, \Omega^r(p)) = \sigma(d, m, p - r\cdot m) + \delta_{d,2r}\cdot\delta_{p,0} + \varepsilon(d, m, r, p) \tag{47}$$

$$= \sigma(d, m, -p-(d-r)m) + \delta_{d,2r}\cdot\delta_{p,0} + \varepsilon(d, m, r, p) \tag{48}$$

(siehe (35)),

$$\dim H^d(X, \Omega^r(p)) = \begin{cases} \varphi(d, m, d-r, -p), & \textit{wenn } d-r \textit{ ungerade}, \\ \varphi(d, m, d-r, -p) + \delta_{-p, \frac{d-r}{2}\cdot m}, & \textit{wenn } d-r \textit{ gerade}. \end{cases} \tag{49}$$

Bemerkungen.

1. Mit $\left[\frac{a}{b}\right]$ wurde die größte der ganzen rationalen Zahlen $c \leqq \frac{a}{b}$ bezeichnet ($a, b \in Z$; $b \neq 0$; siehe (44)).
2. Wenn $m = \deg X = 1$, so ist $X = P^{n-1}$, und Satz 1 folgt aus Satz 2 (vgl. (32) und (34)).
3. Nach dem Serreschen Dualitätssatz ist

$$\dim H^q(X, \Omega^r(p)) = \dim H^{d-q}(X, \Omega^{d-r}(-p)). \tag{50}$$

Folgerungen aus den Sätzen 2 und 3:

1. $H^0(X, \Omega^r) = 0$ *für* $r \in \{1, \ldots, d-1\}$. Das ist der Satz von NAKAI (siehe [6]).

2. $h^{q,r} = \dim H^q(X, \Omega^r)$ *ist unabhängig von* k $(q, r \in \{0, \ldots, d\})$; $h^{q,r} = \delta_{q,r}$, *wenn* $q + r \neq d$ $(q, r \in \{0, \ldots, d\})$;

$$h^{d-r,r} = \sum_{\mu=0}^{r} (-1)^{\mu} \cdot \binom{d+2}{\mu} \cdot \binom{(r+1-\mu)\cdot(\deg X - 1) + r}{d+1} + \delta_{2r,d}$$

$$(r \in \{0, \ldots, d\}),$$

$$h^{q,r} = h^{r,q}, \quad h^{d-q,d-r} = h^{q,r} \quad \textit{für} \quad q, r \in \{0, \ldots, d\}.$$

Diese Formeln wurden im komplexen Fall $k = C$ von F. HIRZEBRUCH bewiesen (siehe [4]).

3. $\dim H^q(X, \Omega^1(p))$ *und* $\dim H^q(X, \Omega^{d-1}(p))$ *sind unabhängig von* k, *wenn* d *gerade ist.*

4. $\dim H^q(X, \Omega^r(p))$ *ist unabhängig von* k *für beliebige* $q, r, p \in Z$, *wenn* X *glatte ebene Kurve oder glatte Fläche im* P_k^3 *ist.*

5. $\dim H^q(X, \Omega^r(p))$ *ist unabhängig von* k, *wenn nur* m *kein Teiler von* p *ist.*

Beweis der Sätze 2 und 3. 1. Zunächst berechnen wir mittels (17) und Lemma 6 $\dim H^q(X, \Omega^r(p))$ mit $q + r < d$ durch Induktion nach r. (Für $r = 0$ siehe Lemma 5.)
Dann ist nach Induktionsvoraussetzung (vgl. (39) und (44)) im Fall, daß Char k den Grad von X, $\deg X = m$, nicht teilt (kurz: Char $k \nmid m$),

$$\dim H^q(X, \Omega^\varrho(p)) = \delta_{q,\varrho} \cdot \delta_{p,0} \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varrho < r;\ q > 0;\ q + \varrho < d \qquad (51)$$

und im Fall, daß Char k den Grad von X teilt (kurz: Char $k \mid m$),

$$H^q(X, \Omega^\varrho(p)) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varrho < r;\quad \varrho < q;\quad q + \varrho < d. \qquad (52)$$

Lemma 7. *Es sei* $0 \leqq \varrho < r$; $0 < q$; $q + \varrho < d$. *Dann gilt für den Homomorphismus*

$$\gamma\colon H^q(X, \Omega^\varrho(p - m)) \to H^q(X, \mathfrak{A}^{\varrho+1}(p))$$

für $\forall\, p \in Z$

$$\operatorname{Ker} \gamma = 0, \quad \textit{wenn} \quad \text{Char}\, k \nmid m, \qquad (53)$$

$$\operatorname{Im} \gamma = 0, \quad \textit{wenn} \quad \text{Char}\, k \mid m. \qquad (54)$$

Beweis. Es sei zunächst Char $k \nmid m$. Wegen (51) ist (53) richtig, wenn nur $q \neq \varrho$ oder $q \neq m$.
Es sei jetzt Char $k \mid m$. Nach Lemma 6 ist

$$\dim H^q(X, \mathfrak{A}^{\varrho+1}(p)) = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} q \neq \varrho, & \varrho + 1, \\ q = \varrho + 1, & p \neq 0, \\ q = \varrho, & p \neq m, \end{cases}$$

Weiter ist für $q = \varrho + 1$, $p = 0$

$$H^{\varrho+1}(X, \Omega^\varrho(-m)) = 0$$

(siehe (52)). D. h., (54) ist richtig, wenn $q \neq \varrho$ oder $p \neq m$. Wir untersuchen jetzt den Homomorphismus (für $q = \varrho$ und $p = m$)

$$\gamma\colon H^\varrho(X, \Omega^\varrho) \to H^\varrho(X, \mathfrak{A}^{\varrho+1}(m)),$$

wobei $0 < 2\varrho < d$.

Unter den Homomorphismen

$$H^\varrho(P^n, \Omega^\varrho_{P^n}) \xrightarrow{\beta} H^\varrho(X, \mathfrak{A}^\varrho) \xrightarrow{\delta} H^\varrho(X, \Omega^\varrho_X) \xrightarrow{\gamma}$$
$$\xrightarrow{\gamma} H^\varrho(X, \mathfrak{A}^{\varrho+1}(m)) \xrightarrow{d} H^{\varrho+1}(P^n, \Omega^{\varrho+1}_{P^n})$$

sind β und d nach Lemma 6 Isomorphismen. Aus der exakten Sequenz

$$H^\varrho(X, \Omega^{\varrho-1}_X(-m)) \longrightarrow H^\varrho(X, \mathfrak{A}^\varrho) \xrightarrow{\delta} H^\varrho(X, \Omega^\varrho_X) \xrightarrow{d}$$
$$\xrightarrow{d} H^{\varrho+1}(X, \Omega^{\varrho-1}_X(-m))$$

und aus (51) und (52) folgt außerdem, daß auch δ Isomorphismus ist (in beiden Fällen: Char k teilt m oder teilt m nicht). Die erzeugenden Kozyklen von $H^\varrho(P^n, \Omega^\varrho_{P^n})$ und $H^{\varrho+1}(P^n, \Omega^{\varrho+1}_{P^n})$ sind uns nach Lemma 4 bekannt, und es ist leicht zu zeigen

$$(d \circ \gamma \circ \delta \circ \beta)(\omega^{(\varrho)}) = (-1)^{\varrho+1} \cdot m \cdot \omega^{\varrho+1}.$$

Damit ist Lemma 7 bewiesen.

Wir berechnen jetzt $\dim H^q(X, \Omega^r(p))$ für $q < d - r$. Es sei zunächst Char $k \nmid m$. Nach Lemma 7 ist für $0 \leq q < d - r$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow H^q(X, \Omega^{r-1}(p-m)) \xrightarrow{\gamma} H^q(X, \mathfrak{A}^r(p)) \xrightarrow{\delta}$$
$$\xrightarrow{\delta} H^q(X, \Omega^r(p)) \longrightarrow 0$$

exakt. Also ist

$$\begin{aligned}\dim H^0(X, \Omega^r(p)) &= \psi(n, r, p) - \psi(n, r, p-m) + \delta_{r,1} \cdot \delta_{p,m} \\ &\quad - \varphi(d, m, r-1, p-m) - \delta_{r,1} \cdot \delta_{p,m} \\ &= \varphi(d, m, r, p)\end{aligned}$$

(siehe (53), (21), (38), (19), (30)),

$$\begin{aligned}\dim H^q(X, \Omega^r(p)) &= \delta_{q,r} \cdot \delta_{p,0} + \delta_{q+1,r} \cdot \delta_{p,m} - \delta_{q,r-1} \cdot \delta_{p,m} \\ &= \delta_{q,r} \cdot \delta_{p,0}\end{aligned}$$

für $0 < q < d - r$ (siehe (22), (39)) in Übereinstimmung mit Satz 2.

Es sei jetzt Char $k \mid m$. Nach Lemma 7 ist für $0 < q < d - r$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow H^q(X, \mathfrak{A}^r(p)) \longrightarrow H^q(X, \Omega^r(p)) \xrightarrow{d}$$
$$\xrightarrow{d} H^{q+1}(X, \Omega^{r-1}(p-m)) \xrightarrow{\gamma} 0$$

exakt. Wenn $q \neq r$ und $r - 1$ ist, folgt

$$\dim H^q(X, \Omega^r(p)) = \dim H^{q+1}(X, \Omega^{r-1}(p-m))$$
$$= \begin{cases} \delta_{p-m, \left[\frac{r-q-1}{2}\right]\cdot m} = \delta_{p, \left[\frac{r-q+1}{2}\right]\cdot m} & \text{für } q \leqq r-2, \\ 0 & \text{für } q > r. \end{cases}$$

Außerdem ist für $q = r - 1$

$$\dim H^q(X, \Omega^{q+1}(p)) = \delta_{p,m}(2q + 1 < d)$$

und für $q = r$

$$\dim H^q(X, \Omega^q(p)) = \delta_{p,0}(2q < d)$$

in Übereinstimmung mit (44).
Schließlich ist bei Char $k \mid m$ nach Lemma 7 die Sequenz

$$0 \longrightarrow H^0(X, \Omega^{r-1}(p-m)) \longrightarrow H^0(X, \mathfrak{A}^r(p)) \xrightarrow{\delta}$$
$$\xrightarrow{\delta} H^0(X, \Omega^r(p)) \longrightarrow H^1(X, \Omega^{r-1}(p-m)) \xrightarrow{\gamma} 0$$

exakt für $\forall\, r \in \{1, \ldots, d-1\}$. Daraus folgt (43), wie leicht zu zeigen ist. Damit haben wir $\dim H^q(X, \Omega^r(p))$ für $q + r < d$ berechnet.

2. Nach dem Dualitätsgesetz (50) ergeben sich die Dimensionen

$$\dim H^q(X, \Omega^r(p)) \quad \text{mit} \quad q + r > d.$$

(39), (42), (44), (45), (46) und (49) sind leicht zu prüfen.

3. Schließlich berechnen wir noch $\dim H^{d-r}(X, \Omega^r(p))$ für $r \in \{1, \ldots, d-1\}$ durch Induktion nach r.
Zunächst für $r = 1$: Folgende Sequenz ist nach (17) und (19) exakt:

$$0 \longrightarrow H^{d-1}(X, \mathfrak{A}^1(p)) \longrightarrow H^{d-1}(X, \Omega^1(p)) \xrightarrow{d}$$
$$\xrightarrow{d} H^d(X, \mathcal{O}_X(p-m)) \longrightarrow H^d(X, \mathfrak{A}^1(p)) \xrightarrow{\delta} H^d(X, \Omega^1(p)) \longrightarrow 0.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \dim H^{d-1}(X, \Omega^1(p)) &= \delta_{d,2} \cdot \delta_{p,0} + \chi(d, m, \deg K + m - p) \\ &\quad - \psi(n, n-1, m-p) + \psi(n, n-1, -p) \\ &\quad + \varphi(d, m, d-1, -p) = \delta_{d,2} \cdot \delta_{p,0} \\ &\quad + \chi(d, m, \deg K + m - p) - \varphi(d, m, d, m-p) \\ &= \delta_{d,2} \cdot \delta_{p,0} + \sigma(d, m, p-m), \end{aligned}$$

wenn Char $k \nmid m$ oder wenn d gerade ist. Außerdem folgt

$$\dim H^{d-1}(X, \Omega^1(p)) = \sigma(d, m, p - m) + \delta_{-p, \frac{d-1}{2} \cdot m},$$

wenn Char $k \mid m$ und d ungerade (siehe (42), (49), (31), (33) und Lemma 6).

Wir untersuchen jetzt den Homomorphismus

$$\delta \colon H^{d-r+1}(X, \mathfrak{A}^r(p)) \to H^{d-r+1}(X, \Omega^r(p))$$

für $r \in \{2, \ldots, d-1\}$. Da wir $\dim H^q(X, \Omega^r(p))$ mit $q + r > d$ bereits kennen, ist leicht zu zeigen, daß

$$\operatorname{Coker} \delta = 0, \text{ wenn Char } k \nmid m,$$
$$\operatorname{Im} \delta = 0, \text{ wenn Char } k \mid m.$$

Deswegen und nach Lemma 7 sind für $r \in \{2, \ldots, d-1\}$ folgende Sequenzen exakt:

Im Fall Char $k \nmid m$:

$$0 \longrightarrow H^{d-r}(X, \Omega^{r-1}(p-m)) \xrightarrow{\gamma} H^{d-r}(X, \mathfrak{A}^r(p)) \xrightarrow{\delta}$$
$$\xrightarrow{\delta} H^{d-r}(X, \Omega^r(p)) \longrightarrow H^{d-r+1}(X, \Omega^{r-1}(p-m)) \xrightarrow{\gamma}$$
$$\xrightarrow{\gamma} H^{d-r+1}(X, \mathfrak{A}^r(p)) \xrightarrow{\delta} H^{d-r+1}(X, \Omega^r(p)) \longrightarrow 0.$$

Im Fall Char $k \mid m$:

$$0 \longrightarrow H^{d-r}(X, \mathfrak{A}^r(p)) \longrightarrow H^{d-r}(X, \Omega^r(p)) \xrightarrow{d}$$
$$\xrightarrow{d} H^{d-r+1}(X, \Omega^{r-1}(p-m)) \longrightarrow H^{d-r+1}(X, \mathfrak{A}^r(p)) \xrightarrow{\delta} 0.$$

Die Induktion nach r ergibt also im Fall Char $k \nmid m$:

$$\begin{aligned}
\dim H^{d-r}(X, \Omega^r(p)) &= \sigma(d, m, p - m - (r-1) \cdot m) + \delta_{d, 2(r-1)} \cdot \delta_{p,m} \\
&\quad + \delta_{d,2r} \cdot \delta_{p,0} + \delta_{d,2r-1} \cdot \delta_{p,m} - \delta_{d,2r-1} \cdot \delta_{p,m} \\
&\quad - \delta_{d,2r-1} \cdot \delta_{p,0} - \delta_{d,2r-2} \cdot \delta_{p,m} + \delta_{d,2r-1} \cdot \delta_{p,0} \\
&= \sigma(d, m, p - r\,m) + \delta_{d,2r} \cdot \delta_{p,0}
\end{aligned}$$

(siehe (39), (40) und Lemma 6).

Und im Fall Char $k \mid m$:

$$\begin{aligned}
\dim H^{d-r}(X, \Omega^r(p)) &= \sigma(d, m, p - m - (r-1)\,m) + \delta_{d,2(r-1)} \cdot \delta_{p,m} \\
&\quad + \varepsilon(d, m, r-1, p-m) + \delta_{d,2r} \cdot \delta_{p,0} + \delta_{d,2r-1} \cdot \delta_{p,m} \\
&\quad - \delta_{d,2r-1} \cdot \delta_{p,0} - \delta_{d,2r-2} \cdot \delta_{p,m} \\
&= \sigma(d, m, p - r \cdot m) + \delta_{d,2r} \cdot \delta_{p,0} + \varepsilon(d, m, r, p)
\end{aligned}$$

(siehe (47), (37) und Lemma 6).

Damit sind (40) und (47) bewiesen. Schließlich erhält man noch aus dem Dualitätssatz (50) den zweiten Ausdruck für $\dim H^{d-r}(X, \Omega^r(p))$; siehe (41) und (48).

Insbesondere ergibt sich die Funktionalgleichung

$$\sigma(d, m, p) = \sigma(d, m, -p - d \cdot m),$$

die man natürlich auch direkt aus der Definition (29) der Funktion $\sigma(d, m, p)$ herleiten kann (siehe auch (36)). Damit sind die Sätze 2 und 3 bewiesen.

LITERATUR

[1] SCHAFAREWITSCH, I. R.: Die Grundlagen der algebraischen Geometrie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972 (Übersetzung aus dem Russischen).

[2] SERRE, J.-P.: Faisceaux algébriques coherents. Ann. Math. *61* (1955), 197–278.

[3] ZARISKI, O.: Algebraic sheaf theory. Bull. Amer. Math. Soc. *62* (1956), 117–141.

[4] HIRZEBRUCH, F.: Der Satz von Riemann-Roch in Faisceau-theoretischer Formulierung. Einige Anwendungen und offene Fragen. Intern. Congr. Math. Amsterdam 1954, p. 457–473.

[5] BOTT, R.: Homogeneous vector bundles. Ann. Math. *66* (1957), 203–248.

[6] NAKAI, Y.: Some results in the theory of the differential forms of the first kind on algebraic varieties II. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto A *31*, No. 2 (1958), 87–93.

[7] Брюкман, П. (BRÜCKMANN, P.): Тензорные дифференциальные формы на алгебраических многообразиях. Известия Акад. Наук СССР, сер. матем., *35* (1971), 1007–1035.

Manuskripteingang: 30. 9. 1971

VERFASSER:
PETER BRÜCKMANN, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg