Beiträge zur Algebra und Geometrie
2 (1974), 83—86

Ein Subtraktionssatz der Polyederalgebra

Eike Hertel

Sei $\mathfrak{P}$ die Menge der eigentlichen Polyeder des n-dimensionalen euklidischen Raumes R_n, ergänzt durch das „leere Polyeder" $\emptyset$, d. h., jedes Polyeder $A \neq \emptyset$ aus $\mathfrak{P}$ läßt sich als Vereinigung endlich vieler konvexer Polyeder darstellen, von denen keines ganz in einer $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene des R_n liegt. Unter der (elementargeometrischen) Summe $C = A + B$ zweier Polyeder A und B aus $\mathfrak{P}$ soll das Polyeder C aus $\mathfrak{P}$ verstanden werden, das sich aus A und B durch die Vereinigung $C = A \cup B$ ergibt, wenn der Durchschnitt $A \cap B$ uneigentlich ist, d. h. $A \cap B$ bereits ganz in einer $(n - 1)$-dimensionalen Hyperebene liegt oder eventuell gleich $\emptyset$ ist. Die Operation $A + B = C$ soll auch als (elementargeometrische) Zerlegung von C in die Teilpolyeder A und B aufgefaßt werden. Schließlich sei eine beliebige Gruppe $\mathfrak{G}$ von Transformationen des R_n gegeben, die Polyeder aus $\mathfrak{P}$ wieder in Polyeder aus $\mathfrak{P}$ überführen. Zwei Polyeder A und B aus $\mathfrak{P}$ heißen dann G-gleich ($A \overset{G}{=} B$), wenn es eine Transformation g_0 aus $\mathfrak{G}$ gibt mit $g_0(A) = B$. Aus den Gruppeneigenschaften von $\mathfrak{G}$ resultiert sofort der

Satz 1. *Die Relation* $\overset{G}{=}$ *ist eine Äquivalenzrelation über* $\mathfrak{P}$.

Eine Abschwächung der G-Gleichheit stellt die G-Zerlegungsgleichheit dar. Zwei Polyeder A und B heißen G-zerlegungsgleich ($A \sim B$), wenn sie sich als endliche Summe paarweise G-gleicher Polyeder darstellen lassen:

$$A \sim B =_{\mathrm{df}} A = A_1 + A_2 + \cdots + A_m \;\&\; B = B_1 + B_2 + \cdots + B_m$$
$$\& \; A_i \overset{G}{=} B_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Aus Satz 1 folgt dann der

Satz 2. *Die Relation* $\sim$ *ist eine Äquivalenzrelation über* $\mathfrak{P}$.

Lediglich der Beweis der Trasitivität ist nicht trivial – mit der in diesem Zusammenhang unwesentlichen Beschränkung auf die Gruppe der Translationen wird er etwa in [1], S. 21, geführt.

Ebenfalls elementar ist der folgende Additionssatz:

Satz 3. $A_1 \sim B_1$ & $A_2 \sim B_2 \rightarrow A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2$.

Dabei müssen natürlich die rechts stehenden Additionen ausführbar sein. Im folgenden sollen alle auftretenden Additionen von Polyedern als ausführbar angesehen werden, was immer erreichbar ist durch eventuelle Ersetzung der beteiligten Polyeder durch G-gleiche Exemplare und wenn gefordert wird, daß $\mathfrak{G}$ zu je zwei Polyedern A und B wenigstens eine Transformation g enthält mit $g(A) \cap B = \emptyset$ (das ist z. B. gesichert, wenn $\mathfrak{G}$ die Gruppe der Translationen als Untergruppe enthält).

Wesentlich tiefer liegt nun der folgende Subtraktionssatz:

$$A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2 \;\&\; A_2 \sim B_2 \rightarrow A_1 \sim B_1. \tag{S}$$

Dieser Satz besagt, daß G-ergänzungsgleiche Polyeder auch G-zerlegungsgleich sind, er wurde erstmalig für den Fall einer die Translationen umfassenden beliebigen Bewegungsgruppe des R_n in [2] bewiesen.

Besondere Bedeutung hat die Aussage (S) für das Aufsuchen von Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit. Dieser m. W. bisher nicht genügend charakterisierte Zusammenhang zwischen dem Subtraktionssatz (S) und der Angabe von (hinreichenden) Bedingungen für die G-Zerlegungsgleichheit von Polyedern soll im folgenden dargestellt werden.
Dazu werden G-invariante und einfach additive Polyederabbildungen Φ in beliebige (additive) abelsche Gruppen $\mathfrak{H}$ betrachtet, also eindeutige Abbildungen von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{H}$ mit

$$\Phi(A) = \Phi(B) \text{ für } A \overset{G}{=} B$$

und

$$\Phi(A + B) = \Phi(A) + \Phi(B).$$

Berücksichtigung der Definition der G-Zerlegungsgleichheit liefert dann sofort den

Satz 4. $A \sim B \rightarrow \Phi(A) = \Phi(B)$ *für alle Polyederabbildungen* Φ *resp. alle* $\mathfrak{H}$.

Es lassen sich also mittels konkreter Polyederabbildungen notwendige Bedingungen für die G-Zerlegungsgleichheit von Polyedern gewinnen. Schwieriger ist jedoch im allgemeinen die Angabe von hinreichenden Bedingungen. In diesem Zusammenhang erhebt sich die Frage nach der Umkehrbarkeit von Satz 4., d. h. nach der Gültigkeit der Aussage

$$\Phi(A) = \Phi(B) \quad \text{für alle } \Phi \text{ resp. alle } \quad \mathfrak{H} \to A \sim B. \tag{HB}$$

Selbstverständlich hat diese Aussage zunächst nur formalen Charakter, und es ist gerade Gegenstand der Zerlegungstheorie bezüglich einer bestimmten Transformationsgruppe $\mathfrak{G}$, konkrete Gruppen $\mathfrak{H}$ und Abbildungen Φ zu finden, um effektive hinreichende Bedingungen zu gewinnen. Hier ist jedoch nur nach dem Zusammenhang zwischen (S) und (HB) gefragt, und dieser Zusammenhang kann jetzt formuliert werden in dem folgenden

Lemma. *Die Aussagen* (S) *und* (HB) *sind äquivalent.*

Beweis. 1. Zunächst soll gezeigt werden, daß (S) aus (HB) folgt. Dazu sei $A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2$ und $A_2 \sim B_2$. Daraus folgt nach Satz 4

$$\Phi(A_1 + A_2) = \Phi(B_1 + B_2) \quad \text{und} \quad \Phi(A_2) = \Phi(B_2)$$

bzw.

$$\Phi(A_1) + \Phi(A_2) = \Phi(B_1) + \Phi(B_2)$$

und

$$\Phi(A_2) = \Phi(B_2)$$

für alle Φ und $\mathfrak{H}$. Mit den Gruppeneigenschaften von $\mathfrak{H}$ folgt aus (1) und (2) sofort $\Phi(A_1) = \Phi(B_1)$ für alle Φ und $\mathfrak{H}$, nach (HB) also $A_1 \sim B_1$.

2. Zum Beweis der Umkehrung (aus (S) folgt (HB)) genügt die Angabe einer speziellen Abbildung Φ_0 in eine spezielle Gruppe $\mathfrak{H}_0$, so daß aus $\Phi_0(A) = \Phi_0(B)$ die Relation $A \sim B$ folgt. Dazu sei $\mathfrak{H}_0 =_{\text{df}} \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$. In $\mathfrak{H}_0$ wird eine Addition erklärt durch:

$$x, y, z \in \mathfrak{H}_0, \quad x = (A_1, B_1), \quad y = (A_2, B_2),$$
$$z = x + y =_{\text{df}} (A_1 + A_2, B_1 + B_2).$$

Ferner wird ein Gleichheitsbegriff in $\mathfrak{H}_0$ eingeführt:

$$x = y =_{\text{df}} A_1 + B_2 \sim A_2 + B_1,$$

wobei $x = (A_1, B_1)$ und $y = (A_2, B_2)$ ist. Der Nachweis, daß es sich bei dieser Gleichheit um eine Äquivalenzrelation über $\mathfrak{H}_0$ handelt, ist einfach zu erbringen. Beim Beweis der Transitivität wird wesentlich der Subtraktionssatz (S) benutzt: Sei $x_i = (A_i, B_i)$ mit $i = 1, 2, 3$ und $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, dann ist zunächst $A_1 + B_2 \sim A_2 + B_1$ und $A_2 + B_3 \sim A_3 + B_2$; aus Satz 3 folgt $A_1 + B_2 + A_2 + B_3 \sim A_3 + B_2 + A_2 + B_1$, woraus sich mit (S) die Beziehung $A_1 + B_3 \sim A_3 + B_1$, also $x_1 = x_3$ ergibt.

Mit der früheren Bemerkung über die Ausführbarkeit der elementargeometrischen Addition und dem in $\mathfrak{H}_0$ eingeführten Gleichheitsbegriff (der auch als Übergang zu Äquivalenzklassen aufgefaßt werden kann) ist die unbeschränkte Ausführbarkeit der Operation $+$ in $\mathfrak{H}_0$ garantiert. Selbstverständlich überträgt sich die Assoziativität und Kommutativität der elementargeometrischen Addition auf die Addition in $\mathfrak{H}_0$. Als Nullelement in $\mathfrak{H}_0$ kann $0 =_{\mathrm{df}} (A, A)$ mit beliebigem $A \in \mathfrak{P}$ (insbesondere $A = \emptyset$) eingeführt werden. Schließlich wird das zu $x = (A_1, B_1)$ entgegengesetzte Element $-x$ definiert durch $-x =_{\mathrm{df}} (B_1, A_1)$. Damit ist $\mathfrak{H}_0$ bezüglich der eingeführten Operation $+$ eine abelsche Gruppe. Für alle A aus $\mathfrak{P}$ wird nun die Polyederabbildung Φ_0 in $\mathfrak{H}_0$ erklärt durch $\Phi_0(A) =_{\mathrm{df}} (A, \emptyset)$. Die so definierte Abbildung Φ_0 ist G-invariant, denn aus $A \overset{G}{=} B$ folgt natürlich $A \sim B$ bzw. $A + \emptyset \sim B + \emptyset$, also $(A, \emptyset) = (B, \emptyset)$, d. h. $\Phi_0(A) = \Phi_0(B)$. Und schließlich ist Φ_0 einfach additiv, denn es ist

$$\Phi_0(A + B) = (A + B, \emptyset) = (A, \emptyset) + (B, \emptyset) = \Phi_0(A) + \Phi_0(B).$$

Nun kann (HB) bewiesen werden:

Es gelte für zwei beliebige Polyeder A und B die Beziehung $\Phi(A) = \Phi(B)$ für alle Φ bzw. $\mathfrak{H}$, also insbesondere auch $\Phi_0(A) = \Phi_0(B)$, d. h. $(A, \emptyset) = (B, \emptyset)$ bzw. $A + \emptyset \sim B + \emptyset$ und mithin $A \sim B$.

Damit ist das Lemma über die Äquivalenz von (S) und (HB) vollständig bewiesen. Diese Gleichwertigkeit des Subtraktionssatzes (S) mit der Möglichkeit der Angabe („formaler“) hinreichender Bedingungen für die G-Zerlegungsgleichheit von Polyedern verdeutlicht die besondere Stellung des Subtraktionssatzes innerhalb der Polyederalgebra.

LITERATUR

[1] HADWIGER, H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.

[2] HADWIGER, H.: Ergänzungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder. Math. Z. *55* (1952), 292–298.

Manuskripteingang: 21. 9. 1971

VERFASSER:
EIKE HERTEL, Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena