Beiträge zur Algebra und Geometrie
2 (1974), 73—81

Verallgemeinerung eines Satzes von Kulikov

Reiner Fritzsche

Ein Satz von L. J. Kulikov [4] besagt, daß eine primäre abelsche Gruppe eine direkte Summe zyklischer Gruppen ist, wenn sie die Vereinigung einer abzählbaren Kette höhenbeschränkter Untergruppen ist. Ein verbandstheoretisches Analogon zu diesem Satz läßt sich für eine Klasse algebraischer modularer Verbände, die die Klasse der Untergruppenverbände der primären abelschen Gruppen umfaßt, beweisen. Die vorliegende Mitteilung schließt sich eng an [1] an, die übernommenen Begriffsbildungen, Bezeichnungsweisen und Ergebnisse sollen jedoch zunächst kurz wiedergegeben werden.

1. Es sei P ein algebraischer modularer Verband, $0 \in P$ sei das Nullelement, $1 \in P$ das Einselement von P. Ein Element $z \in P$ heiße genau dann ein ausgezeichnetes Element, wenn z kompakt ist und wenn $z/0$ (d. h. die Menge aller $x \in P$ mit $0 \leqq x \leqq z$) eine endliche Kette ist. Die Länge dieser Kette heiße die Ordnung des Elementes z und werde mit $O(z)$ bezeichnet. Ist Z die Menge der ausgezeichneten Elemente von P und $z \in Z$, so ist z' durch $z' \leqq z$ und $O(z') = O(z) - 1$ im Fall $z > 0$ bzw. $0' \stackrel{\text{def}}{=} 0$ eindeutig definiert. Für jedes beliebige Element $a \in P$ werde gesetzt

$$a' \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{z \leqq a} z' \quad (z \in Z),$$

$$a^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} (a^{(n-1)})' \quad (n \geqq 1),$$

$$a^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} a.$$

Die direkte Vereinigung von Elementen $b_\nu \in P$ ($\nu \in N$, N beliebige Indexmenge) werde stets mit $\sum\limits_{\nu \in N} b_\nu$ bezeichnet. Eine Untermenge $Q \subseteqq P$ heiße genau dann unabhängig, wenn die direkte Vereinigung der Elemente von Q existiert, und maximal unabhängig in der Untermenge R, wenn unter der Voraussetzung $Q \subseteqq R \subseteqq P$ außerdem für jedes Element $c \in R$ die Relation $c \cap (\sum\limits_{d \in Q} d) > 0$ besteht. Ferner heiße eine unabhängige Menge kompakter Elemente des Verbandes P genau dann eine Basis von P, wenn deren direkte Vereinigung das Einselement von P ist (siehe [3]). Bilden insbesondere ausgezeichnete Elemente von P eine Basis, so werde diese eine ausgezeichnete Basis genannt.

Besitzt P die Eigenschaften

$$\text{(I)}\ a \in P \Rightarrow a = \bigcup_{\nu \in N} z_\nu,\quad z_\nu \in Z,$$

$$\text{(II)}\ z \leqq \bigcup_{\nu \in N} b_\nu \Rightarrow z' \leqq \bigcup_{\nu \in N} b'_\nu \quad (z \in Z,\ b_\nu \in P),$$

wobei N jeweils eine geeignete Indexmenge bezeichnet, so folgt

$$a \in P \Rightarrow a' \leqq a, \tag{1}$$

$$a \leqq \bigcup_{\nu \in N} b_\nu\ (a, b_\nu \in P) \Rightarrow a' \leqq \bigcup_{\nu \in N} b'_\nu, \tag{2}$$

$$(\bigcup_{\nu \in N} a_\nu)^{(n)} = \bigcup_{\nu \in N} a_\nu^{(n)} \text{ für beliebige Elemente } a_\nu \in P\ (\nu \in N) \tag{3}$$

und alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$

(siehe [1], Hilfssätze 1, 2, 3). Ferner gilt der folgende Hilfssatz.

Hilfssatz 1. *Es sei*

$$z_0 \leqq w \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu$$

mit $z_\nu \in Z$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$, $O(z_\nu) \geqq k$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ *und* $O(z_0) = k - s$ $(1 \leqq s < k)$. *Dann existieren ein Element* $y_0 \in P$ *und eine ganze Zahl* j *mit* $0 \leqq j < k - s$, *so daß*

$$y_0 \leqq w,\quad z_0^{(j)} \leqq y_0^{(s+j)}$$

gilt.

Der Beweis hierfür befindet sich in [1] (Beweis der dort mit (A) bezeichneten Aussage).

2. Ist z ein ausgezeichnetes Element des algebraischen modularen Verbandes P und existiert eine größte nichtnegative ganze rationale Zahl m, so daß die Gleichung

$$x^{(m)} = z$$

mit $x \in Z$ lösbar ist, so heiße

$$H(z) \stackrel{\text{def}}{=} m$$

die Höhe des Elementes z. Falls für $z \neq 0$ eine solche Zahl nicht existiert, werde $H(z) = \infty$ gesetzt. Der zu beweisende Satz kann dann folgendermaßen formuliert werden.

Satz. *Ein algebraischer modularer Verband P mit den Eigenschaften* (I), (II) (*siehe oben*) *sowie*

$$\begin{aligned}
&\text{(III)}\ z_1 \leqq z_2 \cup a \ \textit{und}\ z_1 \nleqq z_2' \cup a \\
&\qquad \Rightarrow z_2 \leqq z_1 \cup a \ (z_1, z_2 \in Z, a \in P), \\
&\text{(IV')}\ a^{(n)} \leqq b^{(n)} \cup c \ \textit{und}\ a^{(n-1)} \nleqq b^{(n-1)} \cup c \\
&\qquad \Rightarrow \textit{es existiert ein Element}\ z \in Z \ \textit{mit} \\
&\qquad z \leqq a \cup b,\ z^{(n)} \leqq c,\ z^{(n-1)} \nleqq b^{(n-1)} \cup c, \\
&\qquad a^{(n)} \nleqq b^{(n)} \cup d \Rightarrow z^{(n)} \nleqq d \ (a, b, c, d \in P,\ n \geqq 1)
\end{aligned}$$

besitzt eine ausgezeichnete Basis, wenn

$$1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i$$

mit $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq \cdots$ *und* $z \leqq a_i \Rightarrow H(z) \leqq h_i < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *gilt.*

Daß diese Bedingung auch notwendig ist, wird in einer Mitteilung bewiesen, die demnächst in diesen Beiträgen erscheinen wird (Anm. bei der Korr.). Es sei noch bemerkt, daß die Eigenschaft (IV) in [1] ein Spezialfall von (IV') ist $(c = 0)$.

3. Zum Beweis des Satzes soll zunächst eine maximale unabhängige Menge ausgezeichneter Elemente von P konstruiert werden. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß für alle i Elemente $z \leqq a_i$ mit $H(z) = h_i$ existieren und daß $h_{i-1} < h_i$ gilt. Es sei W_{1, h_1} eine maximale unabhängige Menge von ausgezeichneten Elementen z mit $z \leqq a_1$, $H(z) = h_1$, die auf Grund der Definition der Unabhängigkeit sicher existiert (siehe [1]). Diese kann zu einer maximalen unabhängigen Menge $W_{1, h_1 - 1}$ von Elementen z mit $z \in Z$, $z \leqq a_1$, $H(z) \geqq h_1 - 1$ ergänzt werden. Die Fortsetzung dieses Verfahrens liefert nach insgesamt $r_1 \leqq h_1$ Schritten eine maximale unabhängige Menge $W_1 \stackrel{\text{def}}{=} W_{1, h_1 - r_1} \supseteqq W_{1, h_1 - r_1 + 1} \supseteqq \cdots \supseteqq W_{1, h_1}$ ausgezeichneter Elemente z mit $z \leqq a_1$. Ist die Menge W_{i-1} $(i > 1)$ definiert, so kann diese durch ausgezeichnete Elemente z mit $z \leqq a_i$, $H(z) = h_i$ zu einer maximalen unab-

hängigen Menge W_{i,h_i} ergänzt werden. Analog wie oben ergibt sich nach $r_i \leqq h_i$ Schritten eine maximale unabhängige Menge

$$W_i \overset{\text{def}}{=} W_{i,h_i-r_i} \supseteqq W_{i,h_i-r_i+1} \supseteqq \cdots \supseteqq W_{i,h_i} \supseteqq W_{i-1}$$

ausgezeichneter Elemente z mit $z \leqq a_i$. W_i ist damit für alle natürlichen Zahlen i definiert, und nach Konstruktion ist

$$W \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$$

eine maximale unabhängige Menge ausgezeichneter Elemente von P (welche sämtlich die Ordnung 1 besitzen).

4. Eine wichtige Eigenschaft der Menge W kommt in dem folgenden Hilfssatz zum Ausdruck.

Hilfssatz 2. *Gilt unter den Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes*

$$z \leqq \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \quad \textit{und} \quad z \nleqq \sum_{i=1}^{n-1} z_{\nu_i}$$

mit $z \in Z$, $O(z) = 1$, $z_\nu \in W$ *für* $\nu = 1, \ldots, n$, $1 \leqq \nu_i \leqq n$ *für* $i = 1, \ldots, n-1$, *so folgt*

$$H(z) \leqq H(z_\nu) \quad \textit{für} \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann

$$z_{\nu+1} \leqq a_\lambda \Rightarrow z_\nu \leqq a_\lambda \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, n-1$$

vorausgesetzt werden ($\lambda = 1, \ldots$). Es sei $\nu = n'$ ($1 \leqq n' \leqq n$) der größte Index, für welchen die Behauptung des Hilfssatzes nicht richtig ist. Dann gilt $H(z_{n'}) < h \overset{\text{def}}{=} H(z)$ und, falls $n' < n$, $H(z_\nu) \geqq h$ für $\nu = n'+1, \ldots, n$. Sind die Elemente $y \in Z$ und $y_\nu \in Z$ durch $y^{(h)} = z$, $y_\nu^{(h)} = z_\nu$ $(\nu = n'+1, \ldots, n)$ definiert, so gilt unter Berücksichtigung von (3)

$$y^{(h)} \leqq \sum_{\nu=1}^{n'} z_\nu \cup \sum_{\nu=n'+1}^{n} y_\nu^{(h)} = \sum_{\nu=1}^{n'} z_\nu \cup \left(\sum_{\nu=n'+1}^{n} y_\nu \right)^{(h)},$$

aber

$$y^{(h-1)} \nleqq \sum_{\nu=1}^{n'} z_\nu \cup \left(\sum_{\nu=n'+1}^{n} y_\nu \right)^{(h-1)}$$

(wegen (2), (3) und $O(z_\nu) = 1$ für $\nu = 1, \ldots, n$ würde sonst $z = y^{(h)} \leqq \sum_{\nu=n'+1}^{n} z_\nu$ folgen im Widerspruch zur Voraussetzung des Hilfssatzes). Außerdem gilt

$$y^{(h)} \nleqq \sum_{\nu=1}^{n'-1} z_\nu \cup \left(\sum_{\nu=n'+1}^{n} y_\nu \right)^{(h)}.$$

(Im Fall $n' = n$ ist der letzte Bestandteil jeweils 0 zu setzen.) Auf Grund der Eigenschaft (IV′) des Verbandes P existiert daher ein Element $z_* \in Z$ mit den Eigenschaften

$$z_* \leqq y \cup \sum_{\nu=n'+1}^{n} y_\nu,$$
$$z_0 \overset{\text{def}}{=} z_*^{(h)} \leqq \sum_{\nu=1}^{n'} z_\nu, \quad z_0 \nleqq \sum_{\nu=1}^{n'-1} z_\nu, \tag{4}$$

woraus $H(z_0) \geqq h$ sowie $O(z_0) = 1$ und damit die Existenz der direkten Vereinigung der Elemente $z_0, z_1, \ldots, z_{n'-1}$ folgt. Wegen (III) gilt ferner

$$z_{n'} \leqq \sum_{\nu=0}^{n'-1} z_\nu.$$

Wäre $z_0 \leqq \sum_{i=1}^{m} z_{\mu_i}$ mit $z_{\mu_i} \in W$, $\mu_i \neq n'$ für $i = 1, \ldots, m$, so ergäbe sich hieraus

$$z_{n'} \leqq \sum_{i=1}^{m} z_{\mu_i} \cup \sum_{\nu=1}^{n'-1} z_\nu, \quad \mu_i \neq n' \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m$$

im Widerspruch zur Unabhängigkeit von W. Demnach ist

$$z_0 \cap \sum_{\varkappa=1}^{k} z_\varkappa = 0$$

für beliebige (paarweise verschiedene) Elemente $z_\varkappa \in W$ mit $z_\varkappa \neq z_{n'}$ für $\varkappa = 1, \ldots, k$ und alle natürlichen Zahlen k, was wegen $H(z_0) \geqq h$, also $z_0 \neq z_{n'}$, insbesondere $z_0 \notin W$ sowie die Unabhängigkeit der Menge $(W - \{z_{n'}\}) \cup \{z_0\}$ zur Folge hat. Ist λ die kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft $z_{n'} \leqq a_\lambda$, so gilt nach Annahme $z_\nu \leqq a_\lambda$ für $\nu = 1, \ldots, n'$, also nach (4) auch $z_0 \leqq a_\lambda$. Ferner enthält die Menge $W_{\lambda, H(z_0)}$ (siehe Abschnitt 3) wegen $H(z_{n'}) < H(z_0)$ weder das Element $z_{n'}$, so daß auch $W_{\lambda, H(z_0)} \cup \{z_0\}$ unabhängig ist, noch das Element z_0 (wegen $z_0 \notin W$), was der Konstruktion von $W_{\lambda, H(z_0)}$ widerspricht. Daher existiert keine natürliche Zahl n' mit den angenommenen Eigenschaften, und der Hilfssatz ist bewiesen.

5. Zu jedem Element $z \in W$ bezeichne $y \in Z$ ein fest gewähltes Element mit der Eigenschaft $y^{(H(z))} = z$, und Y sei die Menge aller auf diese Weise definierten Elemente y. Sie wird sich als Basis des Verbandes P erweisen. In diesem Abschnitt soll zunächst ihre Unabhängigkeit gezeigt werden.

Nimmt man an, daß Y nicht unabhängig ist, so folgt die Existenz eines Elementes $y_0 \in Y$ mit der Eigenschaft $y_0 \cap (\bigcup y) > 0$, wobei die Vereinigung über alle $y \in Y$ mit $y \neq y_0$ zu erstrecken ist. Hieraus folgt wegen $O(z_0) = 1$ weiter $y_0^{(H(z_0))} = z_0 \leqq \bigcup_{y \neq y_0} y$, und da z_0 kompakt ist, gilt sogar $z_0 \leqq \bigcup_{\nu=1}^{n} y_\nu$ mit $y_\nu \in Y$,

$y_\nu \neq y_0$ für $\nu = 1, \ldots, n$ und einer geeigneten natürlichen Zahl n. Mittels vollständiger Induktion läßt sich jedoch zeigen, daß eine solche Relation nicht möglich ist, was einen Widerspruch zur Annahme bedeutet.
Im Fall $n = 1$ müßte $z_0 \leqq y_1$ gelten, woraus $z_0 = z_1$ und damit $y_0 = y_1$ folgen würde, was gerade auszuschließen war. Es werde daher angenommen, daß für beliebige paarweise verschiedene Elemente $y_\nu \in Y$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$) stets $z_0 \nleqq \bigcup_{\nu=1}^{n-1} y_\nu$ gilt, und es seien $y_\nu \in Y$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) paarweise verschiedene Elemente mit

$$z_0 \leqq \bigcup_{\nu=1}^{n} y_\nu .$$

Da W unabhängig ist, gilt

$$z_0 \nleqq \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu = \bigcup_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(H(z_\nu))},$$

so daß für $\nu = 1, \ldots, n$ natürliche Zahlen r_ν mit $0 \leqq r_\nu \leqq H(z_\nu)$ und

$$z_0 \leq \left(\bigcup_{\nu=1}^{n-1} y_\nu^{(r_\nu)}\right) \cup y_n^{(r_n-1)},$$

$$z_0 \nleqq \left(\bigcup_{\nu=1}^{n-1} y_\nu^{(r_\nu)}\right) \cup y_n^{(r_n)}$$

existieren. Auf Grund der Eigenschaft (III) des Verbandes P gilt dann

$$y_n^{(r_n-1)} \leq \left(\bigcup_{\nu=1}^{n-1} y_\nu^{(r_\nu)}\right) \cup z_0,$$

woraus nach (2) und (3)

$$y_n^{(r_n)} \leqq \bigcup_{\nu=1}^{n-1} y_\nu^{(r_\nu+1)} \leqq \bigcup_{\nu=1}^{n-1} y_\nu$$

folgt. Wegen $z_n \leqq y_n^{(r_n)}$ ist damit auch

$$z_n \leqq \bigcup_{\nu=1}^{n-1} y_\nu,$$

was nach Induktionsannahme nicht möglich ist. Daher gilt

$$z_0 \nleqq \bigcup_{\nu=1}^{n} y_\nu,$$

und die Unabhängigkeit der Menge Y ist bewiesen.

6. Um zu beweisen, daß Y eine Basis des Verbandes P ist, bleibt zu zeigen, daß die direkte Vereinigung aller Elemente $y \in Y$ das Einselement von P ist. Es sei

$$x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{y \in Y} y .$$

Dann gilt nach Voraussetzung

$$x \leqq \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i \,(= 1).$$

Da jedes Element a_i $(i = 1, \ldots)$ Vereinigung ausgezeichneter Elemente ist (Eigenschaft (I) des Verbandes P), genügt es zu zeigen, daß für ein beliebiges Element $z \in Z$ stets $z \leqq x$ gilt. Dies ist mittels vollständiger Induktion nach $O(z)$ möglich. Da W maximale unabhängige Untermenge von P ist, gilt für ein beliebiges Element $z_0 \in Z$ stets $z_0 \cap \sum_{z \in W} z > 0$, woraus im Fall $O(z_0) = 1$ $z_0 \leqq \sum_{z \in W} z$ und wegen der Kompaktheit von z

$$z_0 \leqq \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \leqq \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \leqq x$$

mit geeigneten Elementen $z_\nu \in W$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ folgt. Es werde nunmehr angenommen, daß für jedes Element $z \in Z$ mit $O(z) \leqq k - 1$ $(k > 1)$ $z \leqq x$ gilt, und z_0 sei ein Element mit $O(z_0) = k$, $z_0 \nleqq x$. Ist erstens $z_0^{(k-1)} \in W$, so existiert ein Element $y_* \in Y$ mit

$$z_* \overset{\text{def}}{=} z_0^{(k-1)} = y_*^{(H(z_*))}, \quad H(z_*) \geqq k - 1.$$

Setzt man $\bar{y} \overset{\text{def}}{=} y^{(H(z_*)-k+1)}$, so ist $z_0^{(k-1)} = \bar{y}^{(k-1)}$, so daß wegen $z_0 \nleqq x$, also $z_0 \nleqq \bar{y}$ $(\leqq y_* \leqq x)$ eine natürliche Zahl s mit $s \leqq k - 1$ und

$$z_0^{(s)} \leqq \bar{y}^{(s)}, \quad z_0^{(s-1)} \nleqq \bar{y}^{(s-1)} \tag{5}$$

existiert. Auf Grund der Eigenschaft (IV′) des Verbandes P folgt daraus die Existenz eines Elementes $\bar{z} \in Z$ mit

$$\bar{z} \leqq z_0 \cup \bar{y}, \quad \bar{z}^{(s)} = 0, \quad \bar{z}^{(s-1)} \leqq \bar{y}^{(s-1)}, \tag{6}$$

so daß $O(\bar{z}) = s \leqq k - 1$, also $\bar{z} \leqq x$ nach Induktionsvoraussetzung gilt. Ist $\bar{z} \nleqq z_0' \cup \bar{y}$, so folgt aus der Eigenschaft (III) des Verbandes P

$$z_0 \leqq \bar{z} \cup \bar{y} \leqq x$$

im Widerspruch zur Annahme über z_0. Ist jedoch $\bar{z} \leqq z_0' \cup \bar{y}$, so ergibt sich nach (2), (3) und (5)

$$\bar{z}^{(s-1)} \leqq z_0^{(s)} \cup \bar{y}^{(s-1)} \leqq \bar{y}^{(s-1)},$$

was im Widerspruch zu (6) steht.

Gilt zweitens $z_0^{(k-1)} \notin W$, so existieren eine natürliche Zahl $l > 1$ und Elemente $z_\lambda \in W$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ mit den Eigenschaften

$$z_0^{(k-1)} \leqq \sum_{\lambda=1}^{l} z_\lambda, \quad z_0^{(k-1)} \nleqq \sum_{i=1}^{l-1} z_{\lambda_i}$$

($1 \leqq \lambda_i \leqq l$ für $i = 1, \ldots, l-1$). Nach Hilfssatz 2 ist dabei

$$H(z_\lambda) \geqq H(z_0^{(k-1)}) \geqq k-1 \quad \text{für} \quad \lambda = 1, \ldots, l,$$

also gilt

$$z_0^{(k-1)} \leqq \sum_{\lambda=1}^{l} y_\lambda \quad \text{mit} \quad O(y_\lambda) \geqq k\ (>1) \quad \text{für} \quad \lambda = 1, \ldots, l,$$

so daß die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 erfüllt sind. Es existiert daher ein Element $y_0 \in P$ mit den Eigenschaften

$$y_0 \leqq \sum_{\lambda=1}^{l} y_\lambda\ (\leqq x), \quad z_0^{(k-1)} \leqq y_0^{(k-1)}. \tag{7}$$

Wegen $z_0 \nleqq x$ gibt es also eine natürliche Zahl h mit $1 \leqq h < k$ und

$$z_0^{(k-h)} \leqq y_0^{(k-h)}, \quad z_0^{(k-h-1)} \nleqq y_0^{(k-h-1)}. \tag{8}$$

Aus (IV′) folgt dann die Existenz eines Elementes $\hat{z} \in Z$ mit

$$\hat{z} \leqq y_0 \cup z_0, \quad \hat{z}^{(k-h)} = 0, \quad \hat{z}^{(k-h-1)} \nleqq y_0^{(k-h-1)}. \tag{9}$$

Insbesondere ist $O(\hat{z}) = k - h < k$, so daß nach Induktionsvoraussetzung

$$\hat{z} \leqq x \tag{10}$$

gilt. Nimmt man an, daß die Relation $\hat{z} \leqq y_0 \cup z_0'$ besteht, so folgt wegen (2), (3) und (8)

$$\hat{z}^{(k-h-1)} \leqq y_0^{(k-h-1)} \cup z_0^{(k-h)} \leqq y_0^{(k-h-1)}$$

im Widerspruch zu (9). Demnach gilt $\hat{z} \nleqq y_0 \cup z_0'$, also wegen (III), (7) und (10)

$$z_0 \leqq y_0 \cup \hat{z} \leqq x,$$

was der Annahme über z_0 widerspricht. Diese führt also in jedem Fall zu einem Widerspruch. Infolgedessen muß $z \leqq x$ für alle $z \in Z$ gelten, was zu beweisen war. Die Menge Y ist also eine Basis des Verbandes P. Der im Abschnitt 2 formulierte Satz ist damit vollständig bewiesen.

7. Wie in [4] ergeben sich als Folgerungen aus dem Satz das verbandstheoretische Analogon zum Satz von PRÜFER [5] über abzählbare primäre abelsche Gruppen, die kein Element unendlicher Höhe enthalten, sowie das Analogon zum Satz von PRÜFER und BAER (siehe [1]).

Folgerung 1. Ein algebraischer modularer Verband P mit den Eigenschaften (I), (II), (III), (IV′), welcher höchstens abzählbar viele ausgezeichnete Elemente enthält, besitzt eine ausgezeichnete Basis, wenn $H(z)$ für alle $z \in P$ $(z \neq 0)$ endlich ist.

Beweis. Ist $Z = \{z_1, z_2, \ldots\} \subseteqq P$ die Menge der ausgezeichneten Elemente von P, so sind die Voraussetzungen des Satzes mit

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\nu=1}^{i} z_\nu \, (i = 1, 2, \ldots)$$

erfüllt.
Hinsichtlich der Umkehrung dieses Satzes beachte man die entsprechende Bemerkung in Abschnitt 2.

Folgerung 2. Ein algebraischer modularer Verband P mit den Eigenschaften (I), (II), (III), (IV′) besitzt eine ausgezeichnete Basis, wenn $O(z) \leqq n$ für alle ausgezeichneten Elemente $z \in P$ mit einer natürlichen Zahl n gilt.

Beweis. Aus $O(z) \leqq n$ für alle $z \in P$ folgt nach Definition der Höhe

$$H(z) \leqq n - 1 \quad \text{für alle} \quad z \in P,$$

so daß das Einselement von P selbst die bei der Formulierung des Satzes über die Elemente a_i $(i = 1, \ldots)$ gemachten Voraussetzungen erfüllt.

Die Anregung zu den Untersuchungen über den in dieser Mitteilung und in [1] behandelten Problemkreis verdankt der Verfasser Herrn Professor A. Kertész (siehe auch [2] und [3]).

LITERATUR

[1] Fritzsche, R.: Verallgemeinerung eines Satzes von Prüfer und Baer, Beiträge zur Algebra und Geometrie *1* (1971), 155–161.
[2] Kertész, A.: On the decomposibility of abelian p-groups into the direct sum of cyclic groups, Acta Mat. Sci. Hung. *3* (1952), 121–125.
[3] Kertész, A.: Zur Theorie der kompakt erzeugten modularen Verbände, Publ. Math. Debrecen *15* (1968), 1–11.
[4] Куликов, Л. Я.: К теории абелевых групп произвольной мощности, Мат. Сборник, Н. С., *16* (1945), 129–162.
[5] Prüfer, H.: Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären abelschen Gruppen, Math. Z. *17* (1923), 35–61.

Manuskripteingang: 20. 9. 1971

VERFASSER:
Reiner Fritzsche, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg