Beiträge zur Algebra und Geometrie
2 (1974), 61—72

Rechtsteilweise geordnete Halbgruppen

HEINZ MITSCH

Es sei M eine bezüglich der Relation „$\leqq$" teilweise geordnete Menge. Die Gesamtheit aller Transformationen (= eindeutigen Abbildungen) von M, $T(M)$, ist durch $f \leqq g \Leftrightarrow f(x) \leqq g(x)\ \forall\, x \in M,\ \forall\, f, g \in T(M)$ teilweise geordnet und bildet bezüglich der Funktionenkomposition „$\circ$" : $(f \circ g)(x) = f[g(x)]\ \forall\, x \in M$, $\forall\, f, g \in T(M)$ eine Halbgruppe. Die Operation „$\circ$" ist bezüglich der Ordnungsrelation „$\leqq$" auf $T(M)$ rechtsisoton: $f \leqq g \Rightarrow f \circ h \leqq g \circ h\ \forall\, h \in T(M)$. (Die Linksisotonie gilt in der Unterhalbgruppe der ordnungstreuen Transformationen, im besonderen in der Untergruppe der monotonen Permutationen von M.)

Diese Halbgruppe der Transformationen einer teilweise geordneten Menge bildet mit der Ordnungsrelation „$\leqq$" eine Struktur, die eine Verallgemeinerung des Begriffes der teilweise geordneten Halbgruppe darstellt. Wir wollen sie kurz „rtwg. Halbgruppen" nennen. In dieser Richtung wurden — soweit uns bekannt ist — bisher noch keine Untersuchungen durchgeführt: CLIFFORD [4] und KEIMEL [7] betrachteten Halbgruppen, die mit einer teilweisen Ordnung versehen sind und in denen eine Ungleichung zweier Elemente bei Multiplikation entweder aufrechterhalten oder umgekehrt wird; dabei ist stets ein Zusammenhang zwischen der Multiplikation auf der rechten und der linken Seite für mindestens ein Element als bekannt vorausgesetzt.

In § 1 geben wir die grundlegenden Definitionen. § 2 enthält einen Satz über die Darstellbarkeit jeder rtwg. Halbgruppe mit Einselement als Unterhalbgruppe der rtwg. Halbgruppe aller Transformationen einer rtwg. Halbgruppe und ein analoges Ergebnis für rtwg. Gruppen; weiter den Satz, daß jede Halbgruppe ohne assoziierte Elemente rechtsteilweise geordnet werden kann, und eine Bedingung, wann eine rtwg. Halbgruppe auch die Linksisotonie erfüllt (d. h. eine teilweise geordnete Halbgruppe ist). In § 3 untersuchen wir spezielle Elemente, wie positive, negative, prime, maximale und unzerlegbare, und deren Zusammenhang. § 4 enthält ein Kriterium über die Existenz einer teilweise geordneten Gruppe als ordnungshomomorphes Bild einer gegebenen rtwg. Halbgruppe. In § 5 betrachten wir ordinale Summen rtwg. Halbgruppen: Wir zeigen, daß sich gewisse rechts-angeordnete Halbgruppen eindeutig als ordinale Summe ordinal irreduzibler Halbgruppen desselben Typus darstellen lassen; weiter untersuchen wir die Möglichkeit der Zerlegung einer rtwg. Halbgruppe in eine ordinale Summe von rtwg. Halbgruppen mit Kürzungsregel oder in eine ordinale Summe von rtwg. Gruppen.

§ 1. Definitionen

Gemäß FUCHS [6] verstehen wir unter einer „teilweise geordneten Halbgruppe" (kurz: twg.) eine Halbgruppe $\langle H, \circ\rangle$, die bezüglich der Relation „$\leqq$" eine teilweise geordnete Menge ist und in der das Monotoniegesetz (d. h. Rechts- und Linksisotonie der Operation „$\circ$") gilt:

$$a \leqq b \Rightarrow c \circ a \leqq c \circ b \quad \text{und} \quad a \circ c \leqq b \circ c \quad \text{für alle} \quad c \in H.$$

Wir untersuchen im weiteren folgende Verallgemeinerung:

Definition. Eine „rechtsteilweise geordnete Halbgruppe" (kurz: rtwg.) sei eine Halbgruppe $\langle H, \circ\rangle$, die bezüglich der binären Relation „$\leqq$" eine teilweise geordnete Menge ist und die Rechtsisotonie der Operation „$\circ$" erfüllt:

$$a \leqq b \Rightarrow a \circ c \leqq b \circ c \quad \text{für alle} \quad c \in H.$$

— Ist die Ordnungsrelation eine Totalordnung, so nennen wir H „rechtsangeordnet" (kurz: r-ang.).

Im Fall, daß die rtwg. Halbgruppe eine Gruppe G bildet, sprechen wir von einer „rechtsteilweise geordneten Gruppe"; ist die Relation „$\leqq$" eine Totalordnung, so nennen wir G „rechtsangeordnete Gruppe" (siehe CONRAD [5]: „right-ordered group"). —

§ 2. Grundlegende Eigenschaften

Nach dem Vorhergehenden bildet die Menge der Transformationen einer teilweise geordneten Menge mit der Funktionenkomposition „$\circ$" und mit der Ordnungsrelation „$\leqq$" eine rtwg. Halbgruppe; die Teilmenge der Automorphismen bildet darin eine rtwg. Gruppe. Umgekehrt gilt (für twg. Halbgruppen: KRISHNAN [8]) folgender

Satz 1. *Jede rtwg. Halbgruppe H mit Einselement e (bezüglich „$\circ$") ist zu einer Unterhalbgruppe der rtwg. Halbgruppe aller Transformationen einer teilweise geordneten Menge ordnungsisomorph.*

Beweis. Wir wählen als teilweise geordnete Menge die Menge H selbst; es sei $S = \{f_a\}_{a \in H}$ die Menge aller Transformationen von H der Form:

$$f_a(x) = a \circ x \ \forall\, x \in H, \quad a \text{ festgewählt.}$$

Für alle $a, b \in H$ gilt:

$$(f_a \circ f_b)(x) = f_a[f_b(x)] = f_a(b \circ x) = (a \circ b) \circ x = f_{a \circ b}(x) \ \forall\, x \in H,$$

also ist S Unterhalbgruppe von $T(H)$, der Menge aller Transformationen von H. Die Abbildung $\beta : H \to S$, definiert durch $\beta(a) = f_a \ \forall\, a \in H$, ist umkehrbar eindeutig $(a \neq b \Rightarrow f_a(e) = a \neq b = f_b(e) \ \forall\, a, b \in H)$, und es gilt:

$$\beta(a \circ b) = f_{a \circ b} = f_a \circ f_b = \beta(a) \circ \beta(b) \ \forall\, a, b \in H;$$

also ist β Isomorphismus. β ist ordnungstreue Abbildung:

$$a \leqq b \Rightarrow a \circ x \leqq b \circ x \ \forall\, x \in H,$$

d. h. $f_a(x) \leqq f_b(x) \ \forall\, x \in H$, also $f_a \leqq f_b$ und $\beta(a) \leqq \beta(b)$; ist umgekehrt für $a, b \in H$: $\beta(a) \leqq \beta(b)$, so $a \circ x \leqq b \circ x \ \forall\, x \in H$, also auch für $x = e$, d. h., es gilt $a \leqq b$ in H. —

Korollar. *Jede rtwg. Gruppe G ist isomorph enthalten in der rtwg. Gruppe aller Permutationen einer teilweise geordneten Menge.*

Beweis. Es sei wieder G selbst die teilweise geordnete Menge; nach dem Satz von Cayley (siehe z. B. [9]) ist die Gruppe G isomorph zur Gruppe S aller Transformationen von G der Form: $f_a(x) = a \circ x \ \forall\, x \in G$, $a \in G$; also ist S Untergruppe der Gruppe aller Permutationen von G, daher rechtsteilweise geordnet und analog zum obigen Satz ordnungsisomorph zu G. —

Die Frage, wann eine Halbgruppe H rechtsteilweise geordnet werden kann, können wir im Fall, daß H keine assoziierten Elemente besitzt, positiv beantworten; dabei heißen zwei Elemente $a, b \in H$ „assoziiert", wenn

$$a \neq b, \quad a = x \circ b, \quad b = y \circ a \quad \text{für ein} \quad x, y \in H.$$

Satz 2. *Jede Halbgruppe H ohne assoziierte Elemente kann rechts-teilweise geordnet werden.*

Beweis. Wir definieren eine binäre Relation „$<$" in H durch: $a < b \Leftrightarrow a \neq b$ und $b = c \circ a$ für mindestens ein $c \in H$. Diese Relation ist eine Ordnungsrelation: sei $a < b$ und $b < a$, also $a \neq b$, $a = x \circ b$, $b = y \circ a$ für $x, y \in H$, d. h., a und b wären assoziierte Elemente; sei $a < b$, $b < c$, also $a \neq b$, $b \neq c$, $b = x \circ a$, $c = y \circ b$ für $x, y \in H$, daher $c = (y \circ x) \circ a$: wäre $c = a$, so hätten wir $a < b$, $b < a$, was nach dem soeben Beweisenen nicht möglich ist; also $c \neq a$ und $c = z \circ a$ mit $z \in H$, d. h. $a < c$. Die Halbgruppenoperation „$\circ$" ist rechtsisoton bezüglich der Ordnungsrelation „$<$": sei $a < b$. a und b aus $H \Rightarrow b = c \circ a$ für $c \in H \Rightarrow b \circ x = c \circ (a \circ x)$ für alle $x \in H \Rightarrow$ für $b \circ x \neq a \circ x: a \circ x < b \circ x$ $\forall\, x \in H$; also insgesamt: $a \leqq b \Rightarrow a \circ x \leqq b \circ x \;\forall\, x \in H$. —

Eine zu dieser Relation „$<$" ähnliche „Teilbarkeitsordnung" auf einer Halbgruppe H bedingt die Linksisotonie der Operation „$\circ$" in H:

$$a \leqq b \Rightarrow x \circ a \leqq x \circ b \;\forall\, x \in H:$$

Satz 3. *Eine rtwg. Halbgruppe H ist eine twg. Halbgruppe, wenn für die Ordnungsrelation „$<$" in H gilt: $a < b \Leftrightarrow a \neq b$, $b = a \circ d$ für ein $d \in H$.*

Beweis. Es seien $a, b \in H$ mit $a < b$; dann ist $b = a \circ d$ mit $d \in H$, also gilt $x \circ b = (x \circ a) \circ d \;\forall\, x \in H$; für $x \circ a \neq x \circ b$ erhalten wir $x \circ a < x \circ b$, also insgesamt: $a \leqq b \Rightarrow x \circ a \leqq x \circ b \;\forall\, x \in H$. —

Außer im trivialen Fall der Kommutativität ist also im besonderen jede rtwg. Halbgruppe, die natürlich geordnet ist (im Sinne von FUCHS [6], Seite 217), eine twg. Halbgruppe.

§ 3. Spezielle Elemente

In einer rtwg. Halbgruppe H bezeichnen wir mit e das Einselement bezüglich der Operation „$\circ$", mit 0 das kleinste (d. h. $0 \leqq x \;\forall\, x \in H$) und mit i das größte Element (d. h. $x \leqq i \;\forall\, x \in H$), falls solche existieren.

Lemma 1. *In einer rtwg. Halbgruppe H mit e ist 0 bzw. i idempotent. Ist $e = 0$ bzw. $e = i$, so folgt aus $a \circ b = e$: $a = b = e$ für $a, b \in H$. In H mit e und i* (bzw. e und 0) *und rechter Kürzungsregel gilt: $e = i$* (bzw. $e = 0$).

Beweis. Aus $0 \leqq e$ folgt $0 \circ 0 \leqq 0$, also $0 \circ 0 = 0$. Ist $e = 0$ und $a \circ b = e$, so $e \leqq b \leqq a \circ b = e$ (da $e \leqq a$), also $b = e$ und $a = e$. In H mit e und 0 folgt aus $0 \circ 0 = e \circ 0 = 0$ wegen der rechten Kürzungsregel, daß $e = 0$.

Korollar. *Es gibt keine beschränkten (d. h. mit 0 und i) rtwg. Halbgruppen mit e und rechter (bzw. linker) Kürzungsregel. Eine rtwg. Gruppe kann kein kleinstes (bzw. größtes) Element besitzen (außer der trivialen).*

Analog FUCHS [6] nennen wir ein Element a einer rtwg. Halbgruppe H „rechtspositiv", wenn $x \circ a \geqq x \;\forall\, x \in H$, „linkspositiv", wenn $a \circ x \geqq x \;\forall\, x \in H$, und „positiv", wenn beides gilt. Die „rechtsnegativen", „linksnegativen" und „negativen" Elemente werden durch die dualen Ungleichungen definiert. — Besitzt H ein Einselement, das zugleich kleinstes bzw. größtes Element von H ist, dann ist jedes Element von H linkspositiv bzw. linksnegativ.

Bezeichnung. Wir verstehen unter $A \geqq B$, wobei A, B Mengen sind, daß für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt: $a \geqq b$; $A > B$ bedeutet daher $a > b$ für alle $a \in A$, $b \in B$. — $A \setminus B$ sei die Menge aller $a \in A$ mit $a \notin B$.

Lemma 2. *Es sei H rtwg. Halbgruppe, L_p die Menge aller linkspositiven, L_n aller linksnegativen, R_p aller rechtspositiven und R_n aller rechtsnegativen Elemente von H. Dann sind L_p und L_n Unterhalbgruppen und obere bzw. untere Klassen von H; die Mengen $I = R_p \cap L_n$ bzw. $J = L_p \cap R_n$ bestehen aus höchstens einem (und dann idempotenten) Element a bzw. b, und es gilt:*

$$R_p \setminus a > a > L_n \setminus a, \quad L_p \setminus b > b > R_n \setminus b.$$

Beweis. Sind a, b aus L_p, so $(a \circ b) \circ x \geqq b \circ x \geqq x \;\forall\; x \in H$, also $a \circ b$ aus L_p. Ist $m > a$ mit $a \in L_p$, so $m \circ x \geqq a \circ x \geqq x$, also $m \in L_p$. Sind $a, b \in I$, so $a \circ x \leqq x \leqq x \circ a \;\forall\; x \in H$, also $a \leqq a \circ b \leqq b \leqq b \circ a \leqq a$, d. h. $a = b, I = \{a\}$ und a idempotent. Sind nun $c \in L_p$, $d \in R_n$ beliebig, so $c \circ d \geqq d$ und $c \circ d \leqq c$, also $d \leqq c$; ist $d = c$, so $d \in J$, daher $L_p \setminus b > b > R_n \setminus b$. —
Neben den obigen Mengen I und J sind auch $K = L_p \cap L_n$ und $M = R_n \cap R_p$ Mengen von Idempotenten aus H: $a \in K \Rightarrow a \circ x \geqq x$, $a \circ x \leqq x \;\forall\; x \in H$, also $a \circ x = x \;\forall\; x \in H$; daher: $x \leqq y \Rightarrow a \circ x \leqq a \circ y \;\forall\; a \in K$.

Korollar. *In einer r-ang. Halbgruppe H gilt: $L_p > L_n \setminus K\,(L_p \setminus K > L_n)$ für $K = L_p \cap L_n$. Dasselbe ist auch in rtwg. Halbgruppen richtig, die die Bedingung erfüllen: L_n ist Teilmenge von R_n.*

Beweis. Angenommen, es existiert ein $x \in L_n \setminus K$ mit $x > a$, wo $a \in L_p$; dann gilt $x \in L_p$ und $x \in K$, d. h. $x \notin L_n \setminus K$. Würde umgekehrt ein $y \in L_p$ existieren mit $y < b$, wo $b \in L_n \setminus K$, so $b \in L_p$, also $b \in K$ und $b \notin L_n \setminus K$. Da H r-ang. ist, haben wir $L_p > L_n \setminus K$; für $a \in L_p$ und $b \in L_n \setminus K$ und $a = b$ wäre $b \in K$, Wid. Die Beziehung $L_p \setminus K > L_n$ folgt analog aus der Eigenschaft von L_n, untere Klasse von H zu sein. — Ist H rtwg. mit $L_n \subseteqq R_n$, so würde aus $a \in L_p$ und $x \in L_n \setminus K$ mit $x \parallel a$ folgen, daß $x \leqq a \circ x \leqq a$, da für $x \in L_n \setminus K$ folgt, daß $x \in R_n$. Also kann nur $x \leqq a$ gelten, und mit dem obigen Fall ergibt sich analog $L_p > L_n \setminus K$. —

Korollar. *Besitzt eine rtwg. Halbgruppe H ein neutrales Element e, dann gilt: $I = J = K = M = \{e\}$ und $L_p \setminus e > e > L_n \setminus e$, $R_p \setminus e > e > R_n \setminus e$, $L_p \setminus e > e > R_n \setminus e$ und $R_p \setminus e > e > L_n \setminus e$.*

Beweis. Ist $a \in I$, so gilt $a \circ x \leqq x$, $x \circ a \geqq x \;\forall\; x$, also für $x = e$: $a = e$; ebenso für J, K, M. Ist $a \in L_p$, so $a \circ x \geqq x \;\forall\; x$, d. h. $a \geqq e$; für $b \in L_n$ gilt $b \circ x \leqq x$, also $b \leqq e$; daher gilt $L_p \setminus e > e > L_n \setminus e$ (wegen $K = \{e\}$). —

Im folgenden untersuchen wir „unzerlegbare", „prime" und „maximale" Elemente (siehe etwa Birkhoff [3], Seite 334). — Wir sagen, eine rtwg. Halbgruppe H genügt der „Maximalbedingung", wenn jede ihrer nichtleeren Teilmengen ein maximales Element besitzt. Im weiteren werden wir rtwg.

Halbgruppen H voraussetzen, die ein Einselement e besitzen, welches zugleich das größte Element in H ist; wir schreiben: „H mit $e = i$“.

Definition. Ein Element a einer rtwg. Halbgruppe H mit $e = i$ heißt „unzerlegbar“, wenn aus $a = b \circ c$, mit $b, c \in H$, folgt: $b = a$ oder $c = a$.

Nach Lemma 1 ist das Element $e = i$ unzerlegbar; ebenso das Element $e = 0$. Also hat in einer rtwg. Halbgruppe H mit $e = i$ (bzw. $e = 0$) kein Element $a \neq e$ ein Rechts- oder Linksinverses.

Lemma 3. *Jedes Element $a(\neq e)$ einer rtwg. Halbgruppe H, die der Maximalbedingung genügt und in der jedes Element negativ ist, läßt sich als Produkt unzerlegbarer Elemente aus H darstellen.*

Beweis. Angenommen, die Behauptung ist falsch; dann besitzt die Menge M aller $x \in H$, die nicht so darstellbar sind, ein maximales Element c; dieses c ist sicher zerlegbar: wäre $c = a \circ b$ mit $a = c$ oder $b = c$, so wäre wegen $c \leqq a$ und $c \leqq b$ das Element c Produkt unzerlegbarer Elemente, d. h., c wäre nicht in M. Also folgt aus $c = x \circ y$, daß $c < x$ und $c < y$, d. h. $x, y \notin M$ und $x = p_1 \circ p_2 \circ \cdots \circ p_r$, $y = q_1 \circ q_2 \circ \cdots \circ q_s$, wobei die p_i und q_j unzerlegbare Elemente sind. Also $c = x \circ y = p_1 \circ \cdots \circ p_r \circ q_1 \circ \cdots \circ q_s$, d. h., c ist Produkt unzerlegbarer Elemente, Wid. –

Definition. Ein Element $p < e$ einer rtwg. Halbgruppe H mit $e = i$ heißt „prim“, wenn aus $a \circ b \leqq p$ $(a, b \in H)$ folgt: $a \leqq p$ oder $b \leqq p$.

Lemma 4. *Un einer rtwg. Halbgruppe H mit $e = i$ ist jedes negative prime Element unzerlegbar.*

Beweis. Sei p negatives primes Element und $x \circ y = p$ für $x, y \in H$; also muß $x \leqq p$ oder $y \leqq p$ gelten; wegen $p = x \circ y \leqq x, y$ folgt $x = p$ oder $y = p$. –

Lemma 5. *Ist p primes Element einer rtwg. Halbgruppe mit $e = i$, so folgt aus $x^n \leqq p$, daß $x \leqq p$.*

Beweis. Angenommen $x \nleqq p$; dann sei $r > 1$ die kleinste Zahl, für die noch $x^r \leqq p$ gilt $(r \leqq n)$; also $x^{r-1} \circ x \leqq p$, wobei $x^{r-1} \nleqq p$, also muß $x \leqq p$. –

Definition. Ein Element $m < e$ einer rtwg. Halbgruppe mit $e = i$ heißt „maximal“, wenn aus $m < x \leqq e$ $(x \in H)$ folgt: $x = e$.

Lemma 6. *In einer rtwg. Halbgruppe H mit $e = i$ ist jedes maximale Element auch unzerlegbar.*

Beweis. Sei m maximales Element mit $m = a \circ b$, $a, b \in H$; wegen $a \leqq e$ gilt $m = a \circ b \leqq b$. Ist $m = b$, so ist m unzerlegbar; ist $m < b \leqq e$, so folgt $b = e$ und daher $m = a$, also ist m auch in diesem Fall unzerlegbar. –

§ 4. Ordnungsepimorphe Bilder, die Gruppen sind

Bigard [1] hat notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß eine twg. Halbgruppe als ordnungsepimorphes Bild eine twg. Gruppe besitzt. Es zeigt sich, daß diese Bedingungen auch für rtwg. Halbgruppen H hinreichend sind und daß die ordnungsepimorphe Gruppe sogar eine twg. Gruppe ist. Dies hat zur Folge, daß die angegebenen Bedingungen über H auch notwendig sind.

Satz. *Es sei H eine rtwg. Halbgruppe mit Einselement e und T eine nichtleere Teilmenge von H. Es gibt dann und nur dann einen Ordnungsepimorphismus β von H auf eine passende teilweise geordnete Gruppe G mit positivem Kegel P derart, daß T das inverse Bild von $P^{-1} = \{x \in G \mid x \leqq E\}$, wo E das Einselement von G ist, wenn folgende Bedingungen gelten:*

1. *T ist Unterhalbgruppe von H mit $e \in T$;*
2. *T ist untere Klasse von H, d. h., $a \in T$, $b \in H$ mit $b \leqq a \Rightarrow b \in T$;*
3. *${}_aT = \{x \in H \mid a \circ x \in T\} = T_a = \{x \in H \mid x \circ a \in T\} \neq \emptyset \; \forall\, a \in H$;*
4. *zu jedem $a \in H$ existiert ein $t \in {}_aT$, so daß $T_{t \circ a} = T$;*
5. *es gilt $T_a = T_b$ genau dann, wenn $\beta(a) = \beta(b)$.*

Beweis. Nach Bigard [1] sind die Bedingungen 1. bis 5. notwendig, wenn das ordnungsepimorphe Bild von H eine teilweise geordnete Gruppe ist. — Es sei nun H eine rtwg. Halbgruppe, die den Bedingungen 1. bis 4. genügt; wir definieren durch 5. eine binäre Relation β in H, d. h., es gelte $a \equiv b\,(\beta)$ genau dann, wenn ${}_aT = {}_bT$ ist. β ist eine Äquivalenzrelation, die Klasse von a sei $\beta(a)$; β ist auch Kongruenzrelation auf H:

$$a \equiv b\,(\beta) \Rightarrow {}_aT = {}_bT \Rightarrow \forall\, c \in H\colon {}_{a\circ c}T = {}_{b\circ c}T,$$

da

$$\begin{aligned} {}_{a\circ c}T &= \{x \in H \mid a \circ c \circ x \in T\} = \{y \in H \mid c \circ y \in {}_aT\} \\ &= \{y \in H \mid c \circ y \in {}_bT\} = \{x \in H \mid b \circ c \circ x \in T\} = {}_{b\circ c}T; \end{aligned}$$

ebenso gilt $\forall\, c \in H$: $T_{c\circ a} = T_{c\circ b}$, da nach 3. ${}_aT = T_a = T_b = {}_bT$; also $a \circ c \equiv b \circ c\,(\beta)$ und $c \circ a \equiv c \circ b\,(\beta)\ \forall\, c \in H$. Die Faktorstruktur ist daher eine Halbgruppe; sie bildet sogar eine Gruppe: Zu jedem $a \in H$ gibt es ein $t \in T_a$, so daß $T_{t\circ a} = T = T_e$ (nach 4.); also gilt $t \circ a \equiv e\,(\beta)$, d. h., es ist $\beta(t \circ a) = \beta(t) \circ \beta(a) = \beta(e)$, wobei $\beta(e)$ das Einselement von H/β ist; daher besitzt jedes Element $\beta(a)$ von H/β ein Linksinverses, also ist H/β eine Gruppe G.
Wir setzen in G: $\beta(a) \leqq \beta(b)$ genau dann, wenn ${}_aT \supseteqq {}_bT$; diese Relation ist eine Ordnungsrelation, d. h., „$\leqq$" definiert auf G eine teilweise Ordnung. Aus $\beta(a) \leqq \beta(b)$ folgt $\beta(a) \circ \beta(c) \leqq \beta(b) \circ \beta(c)$ für alle $\beta(c) \in G$, denn

$${}_{a\circ c}T = \{x \in H \mid c \circ x \in {}_aT\} \supseteqq \{x \in H \mid c \circ x \in {}_bT\} = {}_{b\circ c}T,$$

also $\beta(a \circ c) \leqq \beta(b \circ c)$; genauso folgt für alle $\beta(c) \in G$:

$$\beta(c) \circ \beta(a) \leqq \beta(c) \circ \beta(b),$$

da wegen 3.

$$T_{c \circ a} = \{x \in H \mid x \circ c \in T_a\} \supseteqq \{x \in H \mid x \circ c \in T_b\} = T_{c \circ b};$$

daher ist G eine teilweise geordnete Gruppe, die homomorphes Bild von H ist — unter dem zur Kongruenz β gehörigen natürlichen Homomorphismus h; h ist eine ordnungstreue Abbildung: ist $a \leqq b$ in H, so $a \circ x \leqq b \circ x \; \forall \, x \in H$, also folgt aus $x \in {}_bT$, d. h. aus $b \circ x \in T$, daß $a \circ x \in T$, wegen 2., also $x \in {}_aT$; daher gilt ${}_aT \supseteqq {}_bT$ und $h(a) \leqq h(b)$. — Wir zeigen noch, daß T das inverse Bild von P^{-1} unter dem Homomorphismus h ist: Ist $u \in T$ festgewählt, so gilt für alle $x \in T$, wegen 1., daß $u \circ x \in T$, also $x \in {}_uT$; daher ist $T = {}_eT \subseteqq {}_uT$ $\forall \, u \in T$ und wir haben $\beta(u) \leqq \beta(e) = E$, also $\beta(u) \in P^{-1} = \{x \in G \mid x \leqq E\}$ für jedes $u \in T$, Ist umgekehrt $\beta(a) \in P^{-1}$ für $a \in H$, also $\beta(a) \leqq \beta(e)$, d. h. ${}_aT \supseteqq {}_eT = T$, so folgt wegen $e \in T$: $e \in {}_aT$, d. h. $a \circ e = a \in T$. —

§ 5. Ordinale Summen von rtwg. Halbgruppen

Es sei Λ eine totalgeordnete Menge, $(H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von paarweise disjunkten Halbgruppen. Die mengentheoretische Vereinigung $H = \bigcup H_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ wird zu einer Halbgruppe, wenn man definiert: $a \circ b = b \circ a = b \; \forall \, a \in H_\lambda$, $b \in H_\mu$ mit $\lambda < \mu$. Diese Halbgruppe wird die „ordinale Summe der Halbgruppen H_λ, $\lambda \in \Lambda$" genannt (siehe BIGARD [2]). Sind die H_λ, $\lambda \in \Lambda$ rtwg. Halbgruppen, so definieren wir ihre ordinale Summe folgendermaßen (für twg. Halbgruppen siehe BIGARD [2]):

Definition. Ist $(H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie paarweiser disjunkter rtwg. Halbgruppen, dann nennen wir „ordinale Summe der H_λ, $\lambda \in \Lambda$" die rtwg. Halbgruppe $H = \bigcup H_\lambda$, die man erhält, indem man definiert:
1. $a \circ b = b \circ a = b$ und $a < b$ für alle $a \in H_\lambda$, $b \in H_\mu$ mit $\lambda < \mu$;
2. die Ordnungsrelation und die Halbgruppenoperation innerhalb eines jeden H bleibt ungeändert.

Man sieht sogleich, daß die ordinale Summe H der H_λ, $\lambda \in \Lambda$ genau dann positiv, negativ bzw. r-angeordnet ist, wenn dasselbe für jeden der Summanden H gilt.

Definition. Wir nennen eine rtwg. Halbgruppe „ordinal irreduzibel", wenn sie nicht als ordinale Summe zweier oder mehrerer ihrer Unterhalbgruppen dargestellt werden kann.

Der folgende Satz führt den allgemeinen Fall (reduzibler) r-angeordneter Halbgruppen auf ordinal irreduzible zurück:

Satz 1. *Jede r-angeordnete Halbgruppe aus l-positiven Elementen läßt sich eindeutig als ordinale Summe einer angeordneten Menge ordinal irreduzibler, l-positiv r-angeordneter Halbgruppen darstellen.*

Beweis. Der Nachweis verläuft analog zum entsprechenden Satz für angeordnete Halbgruppen; siehe FUCHS [6], Seite 236. –

Von besonderem Interesse sind natürlich Zerlegungen einer rtwg. Halbgruppe in ordinal irreduzible Unterhalbgruppen eines speziellen Typs (für twg. Halbgruppen: BIGARD [2]):

Satz 2. *Eine rtwg. Halbgruppe aus positiven Elementen, H, ist genau dann ordinale Summe ordinal irreduzibler positiv rtwg. Halbgruppen mit Kürzungsregeln, wenn H folgenden Bedingungen genügt:* $a \circ b = a \circ c$ (bzw. $b \circ a = c \circ a$) $\Rightarrow b = c$ *oder* $a \circ b = a$ (bzw. $b \circ a = a$).

Beweis. Es sei zuerst H ordinale Summe der H_λ, $\lambda \in \Lambda$, die ordinal irreduzible, positiv rtwg. Halbgruppen sind. Seien $a \in H_\lambda$, $b \in H_\mu$, $c \in H_\nu$ und $a \circ b = a \circ c$: ist $\mu < \lambda$, so $a \circ b = a$; ist $\mu = \lambda$, so $a \circ b \in H_\lambda$, also auch $a \circ c \in H_\lambda$, daher muß gelten $\nu \leqq \lambda$ (da in H $a \circ c \geqq c$ und aus $\nu > \lambda$ folgen würde: $c > a \circ c$); für $\nu < \lambda$ haben wir $a \circ b = a \circ c = a$, für $\nu = \lambda$ gilt a, b, $c \in H_\lambda$, wo die Kürzungsregeln gelten, also $b = c$; ist $\mu > \lambda$, so bleibt der Fall $\nu > \lambda$, d. h., es ist $a \circ b = b$ und $a \circ c = c$, daher $b = c$.

Umgekehrt erfülle die positiv rtwg. Halbgruppe H die angegebenen Bedingungen; dann betrachten wir folgende binäre Relation in H:

$$a \equiv b\,(\beta) \Leftrightarrow a = b \quad \text{oder} \quad \{a, b\} \cap \{a \circ b, b \circ a\} = \emptyset.$$

i) β ist eine Kongruenzrelation:

β ist ersichtlich reflexiv und symmetrisch; sie ist auch transitiv: es seien $a, b, c \in H$ alle verschieden mit $a \equiv b\ (\beta)$, $b \equiv c\ (\beta)$; (sind zwei davon gleich, so folgt sofort $a \equiv c\ (\beta)$ trivial); da $a \neq c$, so ist zu zeigen, daß

$$\{a, c\} \cap \{a \circ c, c \circ a\} = \emptyset;$$

wäre $a \circ c = c$, so $b \circ a \circ c = b \circ c$, also $b \circ a = b$ oder $b \circ c = c$; wäre $a \circ c = a$, so $a \circ b = a \circ c \circ b$, also $b = c \circ b$ oder $a \circ b = a$; die Fälle $c \circ a = a$ und $c \circ a = c$ führen analog auf einen Widerspruch, da $a \neq b$, $b \neq c$ und sonst $a \not\equiv b$ oder $b \not\equiv c$ wäre. — Wir zeigen, daß

$$a \equiv b\ (\beta) \Rightarrow a \circ c \equiv b \circ c\ (\beta)\ \forall\, c \in H:$$

aus $a = b$ folgt $a \circ c = b \circ c$, also $a \circ c \equiv b \circ c\ (\beta)\ \forall\, c \in H$; es sei nun $a \neq b$: ist $a \circ c = (a \circ c) \circ (b \circ c)$, so $a = a \circ c \circ b$ oder $a \circ c = c$; im ersten Fall ist dann $a \leqq a \circ b \leqq (a \circ c) \circ b = a$, also $a = a \circ b$, was nicht möglich ist; im zweiten Fall haben wir $a \circ c = c \leqq b \circ c$ und $a \circ c \geqq b \circ c$ (aus der Annahme), also $a \circ c = b \circ c$, d. h. $a \circ c \equiv b \circ c\ (\beta)$; ist $b \circ c = (a \circ c) \circ (b \circ c)$, so $b = a \circ c \circ b$ oder $b \circ c = c$; im ersten Fall ist $b \leqq a \circ b \leqq (a \circ c) \circ b = b$, also $b = a \circ b$ und

$a \not\equiv b\,(\beta)$; im zweiten Fall haben wir $b \circ c = c \leqq a \circ c$ und $a \circ c \geqq b \circ c$ (aus der Annahme); also gilt analog $a \circ c \equiv b \circ c\,(\beta)\ \forall\, c \in H$. — Die beiden restlichen Möglichkeiten sowie die Linksregularität der Relation β zeigt man auf ähnliche Weise; d. h., β ist Kongruenz.

ii) Die Kongruenzklassen nach β sind Unterhalbgruppen von H:
Es sei $\beta(a)$ die Kongruenzklasse, die $a \in H$ enthält; sind $x, y \in \beta(a)$, so genügt es zu zeigen, daß $a \circ a \equiv a(\beta)$ (da $x \circ y \equiv a \circ a(\beta)$ gilt); ist $a = a \circ a$, so fertig; ist $a \neq a \circ a$, so gilt $a < a \circ a$; es ist also zu zeigen, daß

$$\{a, a \circ a\} \cap \{a \circ a \circ a\} = \emptyset:$$

wäre $a = a \circ a \circ a$, so $a < a \circ a \leqq a \circ a \circ a = a$, was nicht möglich ist; wäre $a \circ a = a \circ a \circ a$, so $a \circ (a \circ a) = a \circ a$, daher $a \circ a = a$ oder $a \circ a \circ a = a$; also ergibt sich in beiden Fällen $a \circ a = a$: Widerspruch.

iii) $a \circ a = b \Rightarrow b \circ a = b$ (bzw. $a \circ b = a \Rightarrow b \circ a = a$):
Aus $a \circ b = b$ folgt $b \circ b = b \circ a \circ b$, daher $b = b \circ a$ oder $b \circ b = b$; für $b \circ b = b$ folgt $b \leqq b \circ a \leqq b \circ a \circ b = b \circ b = b$, also $b \circ a = b$.

iv) H/β ist ein Halbverband mit Totalordnung:
H/β ist idempotente Halbgruppe, da nach ii): $\beta(a) \circ \beta(a) = \beta(a \circ a) = \beta(a)$, und ist kommutativ; denn: ist $\beta(a) \neq \beta(b)$, so gilt $a \not\equiv b(\beta)$, also $a \neq b$ und $\{a, b\} \cap \{a \circ b, b \circ a\} \neq \emptyset$; ist $a \circ b = a$, so $b \circ a = a$ nach iii) also $a \circ b = b \circ a$; ist $a \circ b = b$, so $b \circ a = b$ und $a \circ b = b \circ a$; die beiden übrigen Fälle sind ähnlich; also bildet H/β einen Halbverband bezüglich „$\circ$“. Seine Ordnungsrelation sei: $\beta(a) \leqq \beta(b) \Leftrightarrow \beta(a) \circ \beta(b) = \beta(b)$; sie ist eine Totalordnung, denn: sind $\beta(a), \beta(b) \in H/\beta$, so gilt für $\beta(a) \neq \beta(b)$, daß $a \neq b$ und

$$a \circ b = (b \circ a =) = a \quad \text{oder} \quad a \circ b = (b \circ a =) = b, \quad \text{da} \quad a \not\equiv b(\beta),$$

also $a \circ b \equiv a(\beta)$ oder $a \circ b \equiv b(\beta)$, d. h. $\beta(a \circ b) = \beta(a)$ oder $= \beta(b)$, und wir haben $\beta(a) \leqq \beta(b)$ oder $\beta(a) \leqq \beta(b)$.

v) die Halbgruppe H ist ordinale Summe ihrer Kongruenzklassen:
Die Menge aller Kongruenzklassen H_λ, Λ, ist nach iv) eine totalgeordnete Menge; die H_λ sind nach ii) positiv rtwg. Halbgruppen; es gilt $H_\lambda \cap H_\mu = \emptyset$ für $\lambda \neq \mu$ und $H = \bigcup H_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, nach i); ist $a \in H_\lambda$, $b \in H_\mu$ mit $\lambda \neq \mu$, so gilt $a \not\equiv b(\beta)$, also $a \neq b$ und $a \circ b = (b \circ a) = b$ oder $a \circ b = (b \circ a =) = a$; für $\lambda < \mu$ haben wir $H_\lambda = \beta(a) < \beta(b) = H_\mu$, also $\beta(a \circ b) = \beta(b)$, daher muß $a \circ b = b \circ a = b$ (sonst $a \equiv b(\beta)$) und $a < b$, da $b = a \circ b \geqq a$ und $a \neq b$; für $\mu < \lambda$ haben wir $\beta(a \circ b) = \beta(a)$, daher $a \circ b = b \circ a = a$ und $b < a$ auf analoge Weise.

vi) in H_λ, $\lambda \in \Lambda$, gelten die Kürzungsregeln:
Es seien $a, b, c \in H_\lambda$ mit $a \circ c = b \circ c$; also gilt $b = c$ oder $a \circ b = a$; im zweiten

Fall muß wegen $a \equiv b(\beta)$ folgen, daß $a = b$; ebenso folgt wegen $a \equiv c(\beta)$ aus $a \circ c = (a \circ b =) = a$, daß $a = c$, also $b = c$.

vii) die H_λ sind ordinal irreduzibel:
Wäre $H_\lambda = H_\lambda^1 \cup H_\lambda^2$ mit $H_\lambda^1 \cap H_\lambda^2 = \emptyset\ (\lambda \in \Lambda)$ ordinale Summe von H_λ^1 und H_λ^2, so wäre für $a \in H_\lambda^1, b \in H_\lambda^2 : a \neq b$ und $a \circ b = b \circ a = b$, also würde für $a, b \in H_\lambda$ gelten, daß $a \not\equiv b(\beta)$, Widerspruch. –

Für die Zerlegbarkeit einer twg. Halbgruppe in eine ordinale Summe von twg. Gruppen hat BIGARD [2], Satz 3 und Korollar, ein Kriterium hergeleitet. Wir können diesen Satz ohne Einschränkung auf rtwg. Halbgruppen übertragen:

Satz 3. *Eine rtwg. Halbgruppe H ist genau dann als ordinale Summe von rtwg. Gruppen darstellbar, wenn H folgende Bedingungen erfüllt:*
1. *zu jedem Element $a \in H$ existiert ein $x \in H$ mit $a = a \circ x \circ a$;*
2. *$a \circ b = a \circ c \Rightarrow b = c$ oder $a \circ b = b \circ a = a$;*
3. *$a \circ b = b \Rightarrow a \leqq b$ oder $a \in H \circ b = \{x \in H \mid x = h \circ b$ mit $h \in H\}$.*

Beweis. Es sei zuerst H ordinale Summe der rtwg. Gruppen $G_\lambda, \lambda \in \Lambda$: nach Satz 3 aus BIGARD [2] sind für die Zerlegung der Halbgruppe H in eine ordinale Summe von Gruppen die Bedingung 1 und 2 notwendig; ad 3.: es sei $a \circ b = b$ mit $a \in G_\lambda, b \in G_\mu$; ist $\lambda < \mu$, so $a < b$; ist $\lambda > \mu$, so $a \circ b = b \circ a = a$, also $a = b$; ist $\lambda = \mu$, so $a, b \in G_\lambda$, und aus $a \circ b = e_\lambda \circ b$ (e_λ Einselement der Gruppe G_λ) folgt $a = e_\lambda = b' \circ b$ (b' Inverses von b in G_λ), also $a \in H \circ b$.

Gelten umgekehrt in H die Bedingungen 1. bis 3., so ist nach Satz 3 aus [2] H ordinale Summe von Gruppen G_λ, $\lambda \in \Lambda$. Da H rtwg. Halbgruppe ist, so auch jedes G_λ rtwg.; es bleibt also nur noch zu zeigen, daß für $a \in G_\lambda$, $b \in G_\mu$ und $\lambda < \mu$ gilt: $a < b$; da H ordinale Summe der G_λ ist, gilt $a \circ b = (b \circ a =) = b$; nach 3. folgt daher: $a \leqq b$ oder $a \in H \circ b$; im ersten Fall folgt wegen $a \neq b$ die Behauptung; der zweite Fall kann aber nicht eintreten: denn wäre $a = h \circ b$ für ein $h \in H$, etwa $h \in G_\nu$, so hätten wir für $\nu < \mu$: $a = h \circ b = b \circ h = b$, für $\nu = \mu : a = h \circ b \in G_\mu$, für $\nu > \mu : a = h \circ b = b \circ h = h \in G_\gamma$, was in keinem Fall möglich ist.

LITERATUR

[1] BIGARD, A.: Sur les images homomorphes d'un demigroupe ordonné. C. R. Acad. Sci. Paris *260* (1965), 5987–5988.
[2] BIGARD, A.: Décomposition des demigroupes ordonnés. Sémin. Dubreil – Pisot *18* (1964/65), 1–11.
[3] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory. 3rd ed., New York 1967.
[4] CLIFFORD, A.: Ordered commutative semigroups of the second kind. Proc. Amer. Math. Soc. *9* (1958), 682–687.

[5] CONRAD, P.: Right-ordered groups. Michigan Math. J. *6* (1960), 267–275.
[6] FUCHS, L.: Teilweise geordnete algebraische Strukturen. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1966.
[7] KEIMEL, K.: Demigroupes partiellement ordonnés de deuxième et troisième espèce. Rend. Acad. Nac. Lincei *44* (1968), 21–33.
[8] KRISHNAN, V.: Les algèbres partiellement ordonnées et leurs extension. Bull. Soc. Math. France *78* (1950), 235–263.
[9] MACLANE, S., and G. BIRKHOFF: Algèbre. Gauthier-Villars, Paris 1970.

Manuskripteingang: 28. 9. 1971

VERFASSER:
HEINZ MITSCH, Mathematisches Institut der Universität Wien