Beiträge zur Algebra und Geometrie
2 (1974), 37—53

Über das Schneiden von Geraden und Zyklen in der absoluten Geometrie

JULIUS STROMMER

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

In einer unlängst veröffentlichten Arbeit[1]) habe ich auf Grund der ebenen Axiome I—III des von HILBERT in seiner Festschrift „Grundlagen der Geometrie“ aufgestellten Systems unter Hinzuziehung des Axioms über das Schneiden eines Kreises mit einer Geraden den bekannten Satz von den Schnittpunkten zweier Kreise bewiesen.

In dieser Arbeit soll nun gezeigt werden, daß auch die Existenz der Schnittpunkte einer Geraden und eines Zykels bzw. zweier Zyklen aus den genannten Axiomen, also ohne Benutzung irgendeines Axioms über das Schneiden oder Nicht-Schneiden der Geraden folgt.

Aus den nachfolgenden Untersuchungen erkennen wir zugleich unmittelbar, daß diese Schnittpunkte mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Daraus ergibt sich: Diejenigen geometrischen Konstruktionsaufgaben, die durch Ziehen von geraden Linien und beliebigen Zyklen gelöst werden können, lassen sich allein mit Zirkel und Lineal ausführen.

Dieses Resultat ist die Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von NESTOROVITSCH[2]) über die Lösbarkeit der elementaren Aufgaben mit dem Zirkel und dem Lineal in der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie.

---

[1]) Über die Kreisaxiome, Period. Math. Hungar. *4* (1973), 3–16. Die Seitenzahlen im Text beziehen sich immer auf diese Note.

[2]) N. NESTOROVITSCH, Sur l'équivalence par rapport à la construction du complexe

Ich will noch bemerken, daß ich im folgenden — ebenso wie in meiner Note über die Kreisaxiome — in einem Bereiche operiere, der aus dem System der axiomatisch gegebenen eigentlichen Punkte und eigentlichen Geraden dadurch entsteht, daß zu demselben nur ideale Punkte, dagegen nicht ideale Geraden hinzugefügt werden.

1. Wir wollen vor allem diejenigen bekannten Tatsachen kurz zusammenstellen, die im folgenden benutzt werden.
In meiner bereits zitierten Note habe ich mittels der hier von uns zugrunde gelegten Axiome die folgenden Sätze bewiesen:

Satz 1. *Wenn die Seite AB eines (einfachen) Kreisvierecks $ABCD$ Durchmesser des umschriebenen Kreises ist, so steht die Gerade, welche den Schnittpunkt E der beiden Diagonalen AC und BD mit dem den Geraden AD und BC gemeinsamen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt F verbindet, auf AB senkrecht.*

Satz 2. *Wenn die Seite AB eines (einfachen) Kreisvierecks $ABCD$ Durchmesser des umschriebenen Kreises ist, so gehört der den in C und D an den Kreis gelegten Tangenten gemeinsame eigentliche oder uneigentliche Punkt der Geraden an, welche den Schnittpunkt der beiden Diagonalen AC und BD mit dem den Geraden AD und BC gemeinsamen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt verbindet.*

Satz 3. *Legt man aus beliebigen eigentlichen oder uneigentlichen Punkten einer geraden Linie die Tangenten an einen gegebenen Kreis, so gehen die Geraden, welche die Berührungspunkte der zusammengehörigen Tangenten verbinden, wenn irgend zwei von diesen Linien in einem Punkte zusammentreffen, durch den nämlichen Punkt, welcher außerhalb oder innerhalb des Kreises liegt, je nachdem die gegebene gerade Linie den Kreis schneidet oder außerhalb desselben liegt.*

Und umgekehrt:

Zieht man durch einen beliebig angenommenen Punkt gerade Linien, welche einen gegebenen Kreis schneiden, und legt in den Schnittpunkten Tangenten an diesen Kreis, so liegen die eigentlichen oder uneigentlichen Schnittpunkte der zusammengehörigen Tangenten, wenn irgend zwei von denselben sich treffen, auf einer bestimmten Geraden, welche auf dem durch den angenommenen Punkt gehenden

---

MB et du complexe E, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.) *22* (1939), 224–226; ferner: N. NESTOROVITSCH, Sur la puissance constructive d'un complexe E sur le plan de Lobatschewski, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.) *43* (1944), 186–188. Einen rein geometrischen Beweis für diesen Satz hat später auf meine Anregung hin E. VERMES erbracht; vgl. dessen Note: Rein geometrischer Beweis eines Satzes von N. M. Nestorovič, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. *7* (1964), 99–107.

Durchmesser senkrecht steht und welche außerhalb des Kreises liegt oder ihn schneidet, je nachdem der angenommene Punkt innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt. [1]
In dem Falle, wo der angenommene Punkt außerhalb des Kreises liegt, schneidet die genannte gerade Linie den Kreis in denjenigen Punkten, in welchen er von den durch den gegebenen Punkt gehenden Tangenten berührt wird.

Satz 4. *Die aus einem beliebigen, auf der gemeinsamen Sekante zweier gegebenen Kreise außerhalb derselben gelegenen Punkt an die beiden Kreise gelegten Tangenten sind untereinander gleich.*

In den nachfolgenden Untersuchungen benutzen wir folgenden besonderen Fall des Desarguesschen Satzes:
Laufen in zwei Dreiecken die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken durch einen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt und haben ferner zwei Paare entsprechender Seiten je ein gemeinsames Lot, wobei sich diese Lote in einem eigentlichen Punkt schneiden, so haben auch die dritten Seiten ein gemeinsames Lot, das durch denselben Punkt hindurchgeht.
Derselbe kann, wie H. Toepken gezeigt hat [2], nebst seiner Umkehrung ohne Einführung uneigentlicher Geraden nachgewiesen werden.

Endlich brauchen wir folgenden Hilfssatz: [3]

Sind A und A_1, B und B_1, C und C_1 eigentliche oder uneigentliche Gegenecken eines vollständigen Vierseits, ferner a und a_1, b und b_1, c und c_1 deren Verbindungslinien mit einem Punkte P, der nicht in eine Ecke des Vierseits fällt, und ist dann von den drei Kongruenzen

$$(a, b) = (b_1, a_1), \qquad (b, c) = (c_1, b_1), \qquad (c, a) = (a_1, c_1)$$

eine gültig, so sind auch die beiden anderen gültig.

2. Für den zu führenden Beweis haben wir den Begriff der Halbdrehung um einen uneigentlichen Punkt nötig.

Erklärung. Es sei $(ABC\ldots)$ irgendeine Figur, deren Punkte $A, B, C, \ldots$ sämtlich eigentlich sind, ferner seien a und b zwei beliebige Gerade durch einen uneigentlichen Punkt O; aus $(ABC\ldots)$ leiten wir durch die aufeinanderfolgende Anwendung der Spiegelungen an den Geraden a, b eine neue Figur $(A_2 B_2 C_2 \ldots)$

---

[1] Es muß erwähnt werden, daß ich in meiner Note nur diejenigen zusammengehörigen Tangenten betrachtete, die einen eigentlichen Punkt gemein haben. Das dort eingeschlagene Beweisverfahren und das erlangte Resultat bleiben aber auch für zusammengehörige Tangenten gültig, die einen uneigentlichen Punkt gemein haben.

[2] H. Toepken, Zur absoluten Geometrie, Dtsch. Math. *5* (1940), 85–94, insbes. 91–92.

[3] Vgl. J. Hjelmslev, Neue Begründung der ebenen Geometrie, Math. Ann. *64* (1907), 449–474, insbes. 460–461.

ab; die Mittelpunkte A_1, B_1, C_1, ... der Strecken AA_2, BB_2, CC_2, ... bilden dann eine dritte Figur, deren Punkte den Punkten der ursprünglichen Figur (ABC ...) eindeutig entsprechen. Die Transformation, durch welche die Figur (ABC ...) in ($A_1 B_1 C_1$ ...) übergeht, nennen wir eine *Halbdrehung um den uneigentlichen Punkt O.*[1])

Bei einer Halbdrehung um einen uneigentlichen Punkt gehen nach dem Satze über den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Verbindungslinien kongruenter Punktreihen[2]) die eigentlichen Punkte irgendeiner Geraden g in eigentliche Punkte einer Geraden g_1 über; wenn g durch O läuft, so geht auch g_1 durch O.

Die von irgend zwei Geraden durch O gebildete Figur ist, wie man leicht erkennt, kongruent der von den entsprechenden Geraden gebildeten Figur.

Ferner entspricht jedem rechten Winkel, von dem ein Schenkel durch O geht, wieder ein rechter Winkel.

Es sei nämlich OAB ein rechter Winkel (Abb. 1). Wir verlängern BA über A hinaus um sich selbst bis C. Entspricht nun bei der gegebenen Halbdrehung der Punkt A_1 dem Punkte A, so kann unsere Halbdrehung aus der Aufeinanderfolge der Spiegelungen an OA und OA_1 abgeleitet werden; wenn also die Punkte B und C durch diese Spiegelungen in B_2 und C_2 übergeführt werden, so ist $B_2 C_2$ das Spiegelbild von CB in bezug auf OA_1; mithin geht die Mitte B_1 von BB_2 in die Mitte C_1 von $C_2 C$ über; dann aber steht die Gerade $B_1 C_1$, welche der Geraden BC entspricht, auf OA_1 senkrecht.

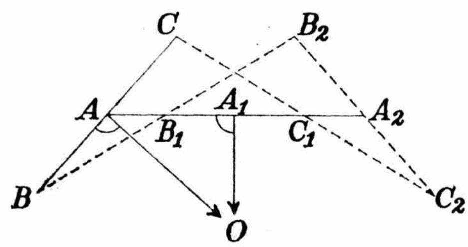

Abb. 1

3. Auf Grund der Sätze 1 bis 4 gelingt nun der Nachweis folgender wichtigen Tatsache:

Satz 5. *Zieht man aus einem willkürlich angenommenen äußeren Punkte M eine gerade Linie, welche einen gegebenen Zykel in den Punkten A, B schneidet, und legt aus dem Punkte M die Tangente MT an den Zykel, so ist das von dem Berührungspunkte T auf die durch den angenommenen Punkt M gehende Achse des Zykels gefällte Lot Spiegelungsachse der Verbindungslinien der Schnittpunkte A, B mit dem Fußpunkte N dieses Lotes.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß der gegebene Zykel ein Kreis ist (Abb. 2), und bezeichnen die Punkte, in denen die Gerade MN den Kreis schnei-

[1]) Haben die Geraden durch O ein gemeinsames Lot l, so heißt diese Transformation auch eine *Halbverschiebung längs der Geraden l.*

[2]) Vgl. HJELMSLEV, a. a. O., 459.

det, in der Weise mit C und D, daß C auf derselben Seite der Verbindungslinie BD wie der Punkt A liegt.

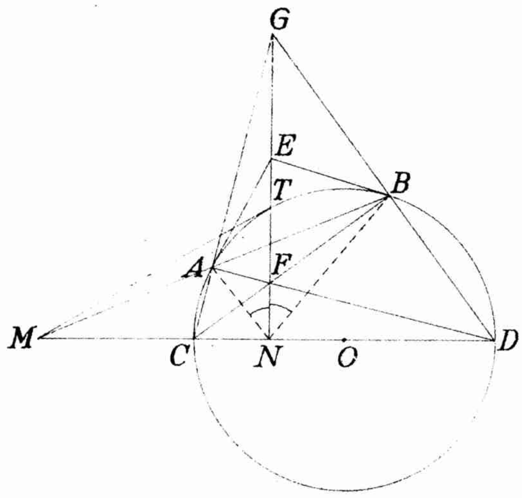

Abb. 2

Der eigentliche oder uneigentliche Schnittpunkt E der in den Punkten A und B an den Kreis gelegten Tangenten gehört nach Satz 2 der Geraden an, welche den Schnittpunkt F von AD und BC mit dem den Geraden AC und BD gemeinsamen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt G verbindet und welche nach Satz 1 auf CD senkrecht steht. Aus dem Satze 3 folgt dann, daß diese Gerade durch den Punkt T hindurchläuft; dann aber ist NT Spiegelungsachse sowohl der Geraden NC, ND als auch NF, NG. Wegen dieses Umstandes können wir den Hilfssatz in Nr. 1 auf N und das von den vier Geraden CA, CB, DA, DB gebildete vollständige Vierseit anwenden und erkennen hieraus, daß in der Tat NA und NB Spiegelbilder an NT sind.

Um nun den entsprechenden Nachweis für einen Zykel zu erbringen, dessen Achsen einen uneigentlichen Punkt O gemein haben (Abb. 3), nehmen wir an erster Stelle an, daß die in den Punkten A und B an den Zykel gelegten Tangenten sich im Punkte P schneiden.

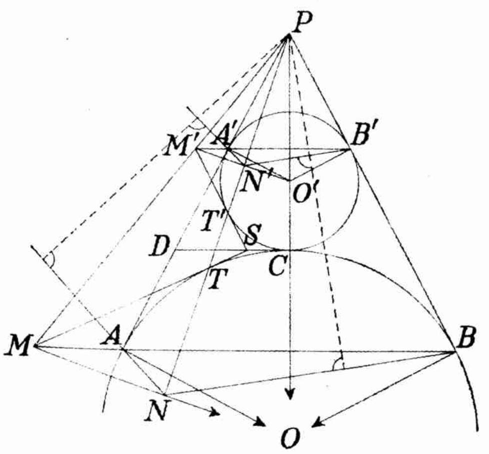

Abb. 3

Es sei C der Schnittpunkt des Zykels mit der Achse PO. Wir bezeichnen den Mittelpunkt des Kreises, welcher von dem gegebenen Zykel in C und von den beiden Tangenten PA, PB bzw. in den Punkten A' und B' berührt wird, mit O'. Ferner sei T' der Schnittpunkt der von P auf MO gefällten Senkrechten und des Kreises um O', und zwar derjenige, der auf der nämlichen Seite oder auf der entgegengesetzten Seite der Geraden $A'B'$ wie C liegt, je nachdem C und T auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten der Geraden AB liegen.

Die in T' an den Kreis gelegte Tangente treffe $A'B'$ in dem Punkte M', der eigentlich oder uneigentlich sein kann; wir behaupten, daß der Punkt M' auf der von O' auf PT gefällten Senkrechte liegt. Im ersten Falle ergibt sich unsere Behauptung unmittelbar aus Satz 3 und im zweiten Falle durch Anwendung einer Halbdrehung um O', bei der $M'T'$ und $M'A'$ in Gerade übergehen, welche einen eigentlichen Punkt gemein haben.

In den beiden Dreiecken OMA und $O'M'A'$ haben die entsprechenden Seiten je ein gemeinsames Lot, welche durch den nämlichen Punkt P laufen; nach der Umkehrung des Desarguesschen Satzes folgt daher, daß die drei Verbindungsgeraden OO', MM', AA' sich in einem und demselben Punkte, nämlich im Punkte P treffen.

Wir bezeichnen die Punkte, in denen MO und $M'O'$ die Gerade PT' treffen, bzw. mit N und N'. Nunmehr laufen für die Dreiecke MNA und $M'N'A'$ die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch den nämlichen Punkt P, und da überdies zwei Paare entsprechender Seiten, nämlich MA und $M'A'$ sowie MN und $M'N'$, je ein gemeinsames Lot haben, welche durch den Punkt P laufen, so folgt mittels des Desarguesschen Satzes, daß die von P auf $N'A'$ gefällte Senkrechte auch zu NA senkrecht sein muß; auf gleiche Weise lehrt die Betrachtung der Dreiecke MNB und $M'N'B'$, daß die von P auf $N'B'$ gefällte Senkrechte auch zu NB senkrecht ist, und mithin sind nach dem ersten Teil des Beweises die Geraden NA und NB Spiegelbilder an NP.

Es werde noch hervorgehoben, daß die vorhin angewandte Schlußweise und bewiesene Tatsache auch für uneigentliche Punkte M gültig sind, vorausgesetzt, daß es eine Gerade gibt, welche die beiden Punkte M, O miteinander verbindet.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Gerade PN durch T läuft.

Zum Beweise dieser Behauptung nehmen wir an, daß die Punkte C, T auf dieselbe Seite von MO fallen. Wir bezeichnen die Punkte, in denen PA und PB die Gerade MT treffen, mit E bzw. F. Von diesen Punkten fällen wir Lote auf die Achse MO. Die Fußpunkte dieser Lote seien G und H. Da nach dem vorhin Bewiesenen die Verbindungslinien TG, AG zu dem Lot EG und die Verbindungslinien TH, BH zu dem Lot FH symmetrisch liegen, treffen sich die Geraden AG und BH in einem Punkte U, welcher das Spiegelbild des Punktes T an der Geraden MO ist.

Nunmehr laufen für die Dreiecke AEG und BFH die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch den nämlichen Punkt M, und da überdies zwei Paare entsprechender Seiten, nämlich AG und BH sowie EG und FH, auf der Geraden TU zusammentreffen, liegt auch der Treffpunkt P der dritten Seiten AE und BF auf dieser Geraden, d. h., die Gerade PN geht notwendig durch T, womit der gewünschte Nachweis erbracht ist.

Nunmehr nehmen wir an, die in A und B an den Zykel gelegten Tangenten schnitten sich nicht. Eine Halbdrehung um den uneigentlichen Punkt O, durch welche die Gerade PO in die Gerade AO übergeht, führt unsere Figur in eine ganz ähnliche Figur über; A, B, M, T gehen in A_1, B_1, M_1, T_1 über, und die in A_1 und B_1 an denjenigen Zykel gelegten Tangenten, welcher bei der er-

wähnten Halbdrehung dem gegebenen Zykel entspricht, haben den Punkt A gemein. Nach dem vorhin Bewiesenen gehen daher die Geraden, welche A_1 und B_1 mit dem Fußpunkt N_1 des von T_1 auf die Achse M_1O gefällten Lotes verbinden, durch Spiegelung an $N_1\,T_1$ ineinander über; mithin schneiden $A_1\,N_1$ und $B_1\,N_1$ den letzteren Zykel noch in den Spiegelbildern B_1' und A_1' von B_1 und A_1 an der Geraden $M_1\,O$, und die Mittelsenkrechten auf $A_1\,B_1'$ und $B_1\,A_1'$, welche den Punkt O gemein haben, sind Spiegelbilder an derselben Geraden $M_1\,O$. Hieraus folgt, daß die Verbindungslinien der Punkte A und B mit dem Fußpunkt N des von T auf MO gefällten Lotes, welche durch unsere Halbdrehung nach $N_1\,A_1$ und $N_1\,B_1$ geführt werden, Spiegelbilder an MO sind, und daher ist auch NT Spiegelungsachse der Geraden NA und NB.
Damit ist der Beweis des Satzes 5 vollständig erbracht.

4. Nunmehr wollen wir nachweisen, daß sich der Satz 4 auf den Fall beliebiger Zyklen verallgemeinern läßt.

Zu dem Zwecke beweisen wir zunächst folgende Tatsache:

Satz 6. *Von einem willkürlich angenommenen äußeren Punkt M werde eine gerade Linie gezogen, die einen gegebenen Kreis um O schneidet. In den Schnittpunkten A, B seien die Tangenten a bzw. b an diesen Kreis gelegt. Ferner werde eine Tangente t aus M an den Kreis gelegt. Ihr Berührungspunkt sei T; das von T auf den durch M gehenden Durchmesser gefällte Lot l habe den Fußpunkt N. Sodann seien C, D diejenigen (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkte, in denen a bzw. b von t geschnitten werden. Die Verbindungsgeraden von C, D mit N seien c bzw. d. Dann liegen c, d in bezug auf l symmetrisch.*

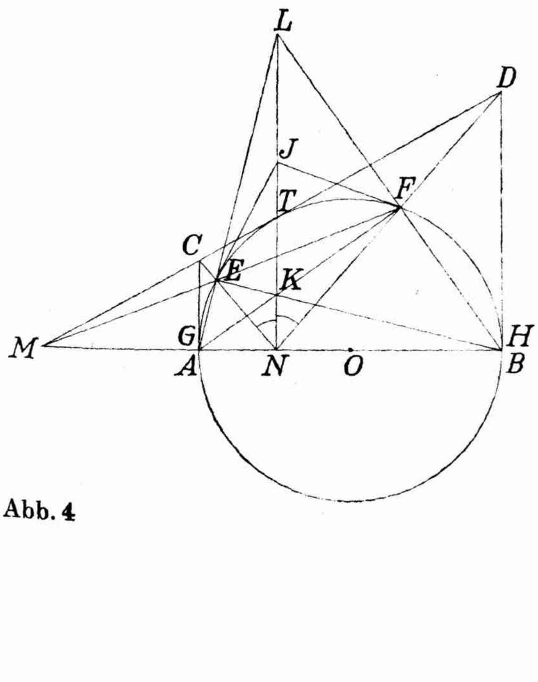

Abb. 4

Beweis. Wir nehmen an, daß A zwischen M und N liegt (Abb. 4) und folglich C notwendig eigentlich ist. Die Strecke NC treffe den Kreis in E, und die Verbindungslinie ME schneide den Kreis noch im Punkte F; endlich bezeichnen wir die Punkte, in denen die Verbindungslinie MO den Kreis schneidet, in der Weise mit G und H, daß der mit G bezeichnete Punkt auf derselben Seite der Geraden NT wie der Punkt C liegt. Ich behaupte, daß die Geraden AE, BF, NT in einem (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkte zusammentreffen.

In der Tat, fallen A und B mit G und H zusammen (Abb. 4), so gehört nach Satz 2 der (eigentliche oder uneigentliche) Schnittpunkt J der in E und F an den Kreis gelegten Tangenten der Geraden an, welche den Schnittpunkt K von AF und BE mit dem den Geraden AE und BF gemeinsamen (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt L verbindet und welche nach Satz 1 auf AB senkrecht steht; diese Gerade läuft nach Satz 3 durch den Punkt T, d. h. fällt mit der Geraden NT zusammen.

Sind ferner A und G und folglich auch B und H voneinander verschieden (Abb. 5), so finden wir auf dieselbe Weise, daß die (eigentlichen oder uneigentlichen) Schnittpunkte P und Q von AG mit BH und EG mit FH auf der Geraden NT liegen, und da in den Dreiecken AEG und BFH die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch den nämlichen Punkt M laufen, so folgt mittels des Desarguesschen Satzes, daß AE und BF die Gerade NT in einem und demselben (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkte R treffen. Aus dem Satze 3 folgt weiter, daß auch AC und BD (als in A und B an den Kreis gelegten Tangenten) die Gerade NT in einem und demselben (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkte S treffen. (Es läßt sich zeigen, daß S mit Q zusammenfällt, was aber uns nicht unmittelbar interessiert.)

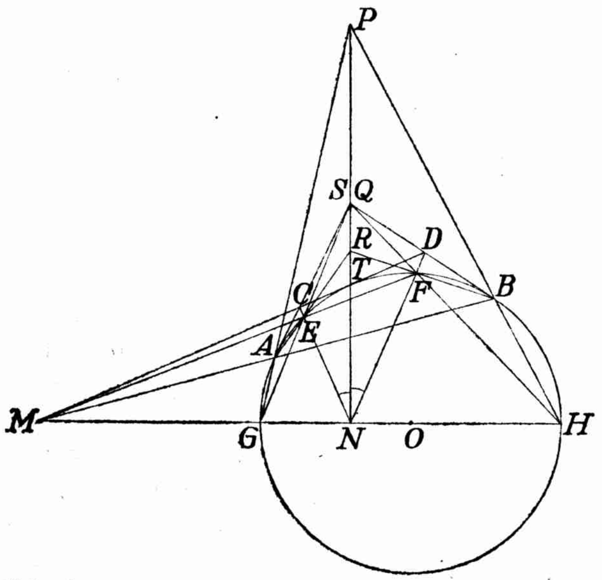

Abb. 5

Nunmehr laufen für die Dreiecke ACE und BDF die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch den nämlichen Punkt M, und mithin folgt wegen der vorhin gefundenen Tatsachen nach dem Desarguesschen Satz, daß CE und DF die Gerade NT in einem und demselben Punkte, nämlich im Punkt N treffen; hieraus folgt nach Satz 5, daß die Geraden NC, ND Spiegelbilder an NT sind, wie der Satz 7 behauptet.

Es sei jetzt O (Abb. 6) ein willkürlich angenommener Punkt der in einem beliebigen Punkte T an einen gegebenen Zykel gelegten Tangente, dessen Achsen durch einen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt M hindurchgehen. Die Achse OM schneide den Zykel in dem Punkt A, und die in demselben an den Zykel gelegte Tangente treffe OT in B. Die Halbierungslinie des Winkels ABO schneidet OA in einem Punkte M'. Bezeichnen wir den Punkt, in welchem der Kreis um den Punkt M' durch den Punkt A von der Geraden OT berührt wird, mit T', so ist $BT = BT' = BA$; mithin wird der Kreis, dessen Durchmesser TT' ist, von den Geraden OA, MT, $M'T'$ bzw. in den Punkten A, T, T' berührt.

Ist P ein beliebiger, innerhalb des Winkels BAT gelegener Punkt des Zykels, so schneidet die Mittelsenkrechte auf AP die Strecke AB in einem Punkte C. Der um C durch P gelegte Kreis, der von der Geraden PM in P berührt wird, schneide die Verbindungslinie OP noch im Punkte P'. Die in P' an denselben Kreis gelegte Tangente schneidet OM in einem Punkte M''. Bezeichnen wir den Fußpunkt des von A auf OC gefällten Lotes mit D, so folgt nach Satz 6, daß DM und DM'' Spiegelbilder an DA sind.

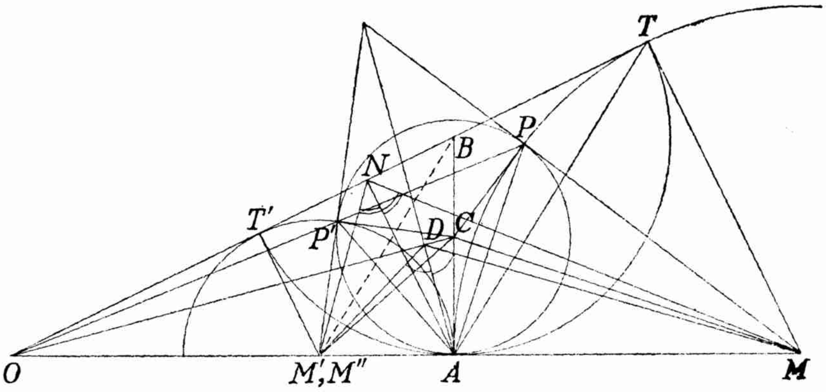

Abb. 6

Da in T und T' an den Kreis mit dem Durchmesser TT' gelegte Tangenten die in A an denselben Kreis gelegte Tangente in M und M' treffen, so folgt nach Satz 6, daß die Verbindungslinien der Punkte M, M' mit dem Fußpunkt N des von A auf OT gefällten Lotes Spiegelbilder in bezug auf NA sind. Dann aber sind auch die Geraden DM und DM' Spiegelbilder an DA.

Um diese Behauptung zu beweisen, wählen wir (Abb. 7) einen Punkt E auf der Verlängerung von AN über N hinaus; dann konstruieren wir die geraden Verbindungslinien EM und EM'; ihre Schnittpunkte mit der Geraden ON bezeichnen wir mit F bzw. G. Wir konstruieren noch H als Schnittpunkt der Geraden FM' und GM. Wenn wir den Hilfssatz in Nr. 1 auf N und das von den vier Geraden MF, MG, $M'F$, $M'G$ gebildete vollständige Vierseit anwenden, so ergibt sich, daß der Punkt H auf der Geraden AN liegt.

Die Gerade OD schneidet die Verbindungslinien AF und AG in F_1 und G_1. Wir bezeichnen den Schnittpunkt von MF_1 und $M'G_1$ mit E_1 und den Schnittpunkt von MG_1 und $M'F_1$ mit H_1. Da die Schnittpunkte entsprechender Seiten der beiden Dreiecke EFG und $E_1F_1G_1$ auf einer Geraden liegen, so folgt nach der Umkehrung des Desarguesschen Satzes, daß die drei Punkte A, E, E_1

in einer Geraden liegen. Ebenso folgt dann aus der Betrachtung der Dreiecke FGH und $F_1G_1H_1$, daß A, H, H_1 Punkte einer Geraden sind.

Es sei nun E_2 der (eigentliche oder uneigentliche) Schnittpunkt von AD und OE_1. Bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden OF_1 und ME_2 mit F_2 und den Schnittpunkt der Geraden AE_2 und $M'F_2$ mit H_2, so zeigt die Betrachtung der Dreiecke $E_1F_1H_1$ und $E_2F_2H_2$, daß O, H_1, H_2 auf einer Geraden liegen. Bezeichnen wir schließlich den Schnittpunkt der Geraden MH_2 und $M'E_2$ mit G_2, so lehrt die Betrachtung der Dreiecke $E_1G_1H_1$ und $E_2G_2H_2$, daß O, G_1, G_2 Punkte einer Geraden sind.

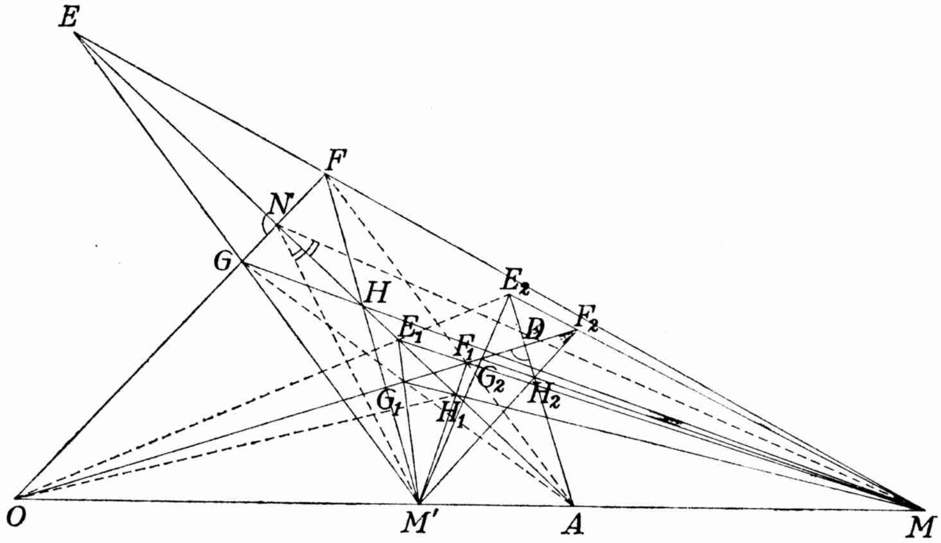

Abb. 7

Da die Geraden DE_2 und DH_2 sowie DF_2 und DG_2 Spiegelbilder an DA sind, so folgt aus der Betrachtung des von den vier Geraden MF_2, MG_2, $M'F_2$, $M'G_2$ gebildeten vollständigen Vierseits mittels desselben Hilfssatzes (Nr. 1), daß in der Tat DM und DM' Spiegelbilder an DA sind.

Hieraus folgt, daß die Punkte M' und M'' zusammenfallen, d. h. die Gerade $M'P'$ berührt nach Satz 6 den Kreis um C in dem Punkte P'; mithin ist CM' die Mittelsenkrechte auf AP', und folglich ist P' ein Punkt des Kreises um M'.

Auf dieselbe Weise finden wir, daß die Gerade, welche einen beliebigen, innerhalb des Winkels $AM'T'$ gelegenen Punkt P' des Kreises um M' mit O verbindet, den Zykel in einem innerhalb des Winkels BAT gelegenen Punkt P schneidet und die in P' an den um M' geschlagenen Kreis gelegte Tangente die in P an den gegebenen Zykel gelegte Tangente in einem Punkte C der gemeinsamen Tangente AB schneidet.

Wir zeigen jetzt, wie das vorhergehende Ergebnis benutzt wird, *um aus einem beliebigen (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkte M einer Sekante AB an einen* *gegebenen Zykel, dessen Achsen durch einen uneigentlichen Punkt O gehen, eine Tangente MT zu konstruieren.*

Wir betrachten zunächst den Fall, wo M eigentlich ist, und nehmen an, die in A und B an den Zykel gelegten Tangenten schnitten sich in einem Punkte P (Abb. 3). Dann bestimmen wir den Schnittpunkt C der Achse PO mit dem Zykel. Zu diesem Zweck benutzen wir die bekannte, von J. HJELMSLEV angegebene Konstruktion.[1] Die in C an den Zykel gelegte Tangente schneide die Gerade PA in D. Wir konstruieren noch O' als Schnittpunkt der Halbierungslinie des Winkels zwischen den beiden Halbgeraden DC und DP mit der Geraden PO. Sodann beschreiben wir um O' mit dem Halbmesser $O'C$ den Kreis; er berühre die Gerade PA und PB bzw. in A' und B'. Die Verbindungslinie PM schneidet $A'B'$ in einem Punkte M'; aus diesem Punkte ziehen wir an den Kreis um O' eine Tangente, deren Berührungspunkt T' auf derselben Seite der Geraden $A'B'$ wie C liegt; sie treffe die Tangente CD in S. Dann ist die Gerade MS Tangente des gegebenen Zykels, deren Berührungspunkt T auf der Geraden PT' liegt.

In der Tat, die Gerade PT' schneidet den Zykel, wie aus dem oben Bewiesenen hervorgeht, in einem Punkte, der auf derselben Seite der Geraden AB wie der Punkt C liegt, und die in demselben Punkte an den Zykel gelegte Tangente geht durch den Punkt S. Andererseits geht nach dem Beweis des Satzes 5 dieselbe Tangente durch den Punkt M.

Schneiden sich die in A und B an den gegebenen Zykel gelegten Tangenten nicht, so kann die Aufgabe mittels einer Halbdrehung um O, bei der diese Tangenten in Gerade übergehen, welche einen eigentlichen Punkt gemein haben, nach obigem gelöst werden.

Auch der Fall, wo der gegebene Punkt uneigentlich ist, kann durch geeignete Halbdrehungen um O erledigt werden. Wenn der gegebene Punkt insbesondere der absolute Pol derjenigen Achse ist, welche auf der Sehne AB senkrecht steht, so ist der Berührungspunkt der gesuchten Tangente der Scheitel jener Achse.

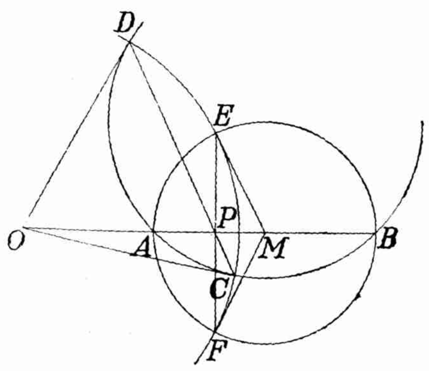

Abb. 8

Nunmehr sei O (Abb. 8) ein willkürlich angenommener äußerer Punkt einer beliebigen Sekante AB eines Zykels; beschreibt man mit einer der beiden aus ihm an den Zykel gelegten Tangenten OC, OD einen Kreis und legt aus dem Mittelpunkte M der Sehne AB die Tangenten ME, MF an den Kreis,

[1] Vgl. J. HJELMSLEV, Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre. Dritte Mitteilung. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. *19*, Nr. 12 (1942), 34.

so gehen nach Satz 3 die Sehnen AB, CD, EF durch ein und denselben Punkt P.

Aus dieser Tatsache folgt dann durch das nämliche Schlußverfahren, welches in meiner Note über die Kreisaxiome (a. a. O., S. 13) beim Beweise des Satzes 4 angewandt worden ist, daß der um M mit einer der beiden Tangenten ME, MF beschriebene Kreis die Gerade OM in den Punkten A, B schneidet.

Hieraus folgert man dann den Satz:

Satz 7 (Verallgemeinerung von Satz 4). *Die aus einem beliebigen, auf der gemeinsamen Sekante zweier gegebener Zyklen außerhalb derselben gelegenen Punkt an die beiden Zyklen gelegten Tangenten sind untereinander gleich.*

5. Wir definieren jetzt den Begriff der Inversion folgendermaßen:

Erklärung. Es sei K (Abb. 9) ein Kreis um O; wir ordnen jedem Punkte P den Punkt P' zu, in welchem sich die durch P gehenden und den Kreis K rechtwinklig schneidenden Kreise zum zweitenmal schneiden. K heißt der Grundkreis, O das Inversionszentrum und P' der inverse Punkt zu P in bezug auf K.

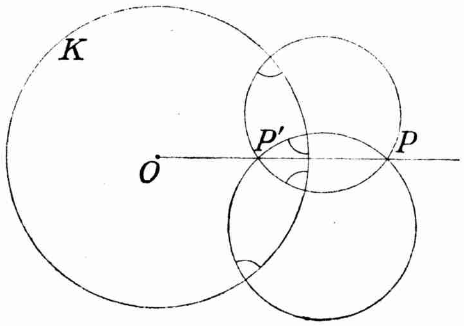

Abb. 9

Die Beziehung zwischen P und P' ist eine involutorische, d. h., wenn P' der inverse Punkt zu P ist, so ist auch P der inverse Punkt zu P'.

Sind P und P' inverse Punkte, so schneidet jeder Zykel durch die Punkte P, P' den Grundkreis rechtwinklig.

Bewegt sich P auf einer durch O gehenden geraden Linie g, so bewegt sich auch P' auf derselben Geraden; rückt P immer weiter hinaus, so nähert sich P' immer mehr dem Punkte O. Nähert sich P auf der Geraden g dem Punkte O, so entfernt sich P' von O; der Punkt Q des Kreises fällt mit seinem entsprechenden Punkte Q' zusammen, d. h., K entspricht sich selbst, und zwar Punkt für Punkt. Auch jeder Kreis, welcher den Kreis K rechtwinklig schneidet, ist zu sich selbst invers.

6. Für das Folgende sind einige Sätze, die wir jetzt ableiten wollen, von Wichtigkeit:

Jedem Punkte P eines Zykels k, welcher den Grundkreis von außen oder einschließend berührt, entspricht ein Punkt P', der auf einem Kreise k' liegt, welcher den Grundkreis in demselben Punkte von innen berührt und das inverse Bild von k heißt. Umgekehrt liegt der zu einem beliebigen Punkte P' von k' inverse Punkt P auf k.

Beweis. Es sei P ein beliebiger Punkt auf k, der außerhalb der Geraden fällt, welche den Berührungspunkt A mit dem Inversionszentrum O verbindet. Die Verbindungsgerade OP trifft den Zykel k_1, welcher durch P geht und den Grundkreis K in A rechtwinklig schneidet, zum zweiten Mal in dem zu P inversen Punkt P'.

Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt im Falle, wo k_1 ein Kreis ist, unmittelbar aus der Definition in Nr. 5; im gegenteiligen Falle ist unsere Behauptung aus dem Umstande ersichtlich, daß der Kreis mit PP' als Durchmesser den Kreis K, wie man aus dem Satze 7 erkennt, rechtwinklig schneidet.

Die in P an k_1 gelegte Tangente gehört zu dem Achsenbüschel von k. Es treffe die in P' an k' gelegte Tangente OA in M'. Ist nun N der Fußpunkt des von A auf diejenige Achse von k_1 gefällten Lotes, welche durch O hindurchgeht, so ist nach Satz 7 die Verbindungslinie NM' das Spiegelbild der durch N gehenden Achse von k an der Geraden AN. Unsere Betrachtungen in Nr. 4 zeigen dann, daß M' von der getroffenen Wahl des Punktes P unabhängig ist. Da ferner P' das Spiegelbild von A an der durch M' gehenden Achse von k_1 ist, liegt P' auf dem Kreise um M' durch A.

Trifft die Gerade OA den Zykel k noch im Punkte B und bestimmt man zu B bezüglich K den inversen Punkt B', so hat jeder Zykel durch B, B', von dem Kreise mit BB' als Durchmesser abgesehen, mit dem Kreise k' einen von B' verschiedenen Punkt gemein. Hieraus erschließen wir, daß auch der Punkt B' auf dem Kreise k' liegt.

Auf dieselbe Weise kann gezeigt werden, daß der zu einem beliebigen Punkte P' von k' inverse Punkt P, wenn vorhanden ist, auf k liegt, womit der Satz vollständig bewiesen ist.

Durch eine geringe Abänderung des obigen Schlußverfahrens, die leicht ersichtlich ist, gelangen wir zu folgender Tatsache:

Jedem Punkte P einer den Grundkreis berührenden Geraden g entspricht ein Punkt P', der auf einem Kreis g' liegt, welcher den Grundkreis in demselben Punkte wie die Gerade g von innen berührt. Umgekehrt liegen alle Punkte P, die zu irgendeinem Punkte P' von g' invers sind, auf g.

Wir wollen noch einen Satz beweisen, der im folgenden oft Anwendung finden wird.

Dieser Satz ist der folgende:

Berührt der Zykel k den Grundkreis von außen, so entspricht einem beliebigen Punkt P, der nicht auf k liegt, ein Punkt P', der innerhalb oder außerhalb jenes Kreises k' liegt, welcher das inverse Bild von k ist, je nachdem P innerhalb oder außerhalb k liegt.

Beweis. Es sei P (Abb. 10) ein willkürlich angenommener innerer Punkt des Zykels k und S der Scheitel der durch P gehenden Achse desselben, ferner

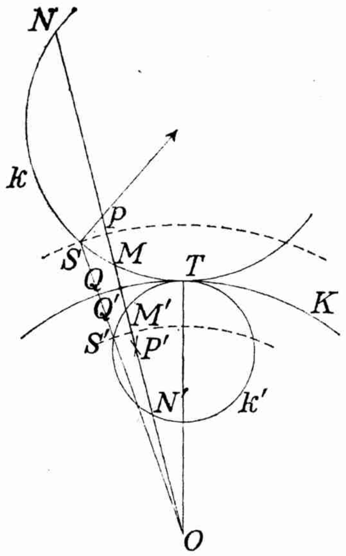

Abb. 10

S' der inverse Punkt von S. Der Zykel k und somit auch der inverse Kreis k' möge den Grundkreis K in T berühren. Wir nehmen zunächst an, daß P außerhalb derjenigen Geraden liegt, welche durch das Inversionszentrum O und durch T geht. Dann liegen die Punkte S und T auf verschiedenen Seiten der Geraden OP, und mithin schneidet dieselbe den Kreis k' in zwei Punkten M', N'; einer von ihnen, etwa M', liegt außerhalb, der andere innerhalb des um O durch S' geschlagenen Kreises. Die von O aus durch P gehende Halbgerade möge den Grundkreis im Punkte Q treffen, welcher mit seinem entsprechenden Punkte Q' zusammenfällt. Da nach Voraussetzung $OS' < OM'$ ist, so entspricht in der Inversion dem Punkte M' notwendig ein Punkt M von k. Entspricht nun auch dem Punkte N' ein Punkt N, so geht k durch N, und P liegt zwischen M und N; mithin liegt P' zwischen M' und N'. Entspricht ferner dem Punkte N kein Punkt invers in bezug auf den Kreis K, so hat die Gerade OP mit k keinen weiteren Punkt gemein, und somit liegt M notwendig zwischen P und Q; mithin liegt M' zwischen P' und Q'. Ferner muß N' auf der Verlängerung von $P'Q'$ liegen, da es sonst entgegen der Voraussetzung einen zu N' inversen Punkt N gäbe, und somit liegt P' zwischen M' und N'. Demnach liegt P' in den beiden Fällen innerhalb k'.

Liegt P auf der Geraden OT, so wird eine Abänderung dieses Schlußverfahrens notwendig, die leicht ersichtlich ist.

In vollkommen ähnlicher Weise wird bewiesen, daß derjenige Punkt P, welcher einem beliebigen inneren Punkt P' von k' entspricht, innerhalb k liegt.

Hieraus folgt durch indirektes Schlußverfahren, daß der Punkt P', welcher einem außerhalb von k gelegenen Punkte P entspricht, außerhalb k' liegt, womit unser Beweis vollkommen erbracht ist.

7. Die im vorstehenden gefundenen Resultate setzen uns in den Stand, die in der Einleitung von uns aufgestellte Behauptung zu begründen.

Zu diesem Zwecke beweisen wir der Reihe nach die folgenden Sätze:[1])

Enthält eine Gerade einen Punkt A innerhalb und einen Punkt B außerhalb eines Zykels, so hat sie mit dem Zykel einen Punkt gemein.

[1]) Im folgenden wollen wir mit dem Namen „Zykel“ immer einen Zykel bezeichnen, der kein Kreis ist.

Zum Beweise bestimmen wir (Abb. 11) den Scheitel C der durch B gehenden Achse des Zykels. Die in C an den Zykel gelegte Tangente treffe AB in D. Wir dürfen annehmen, daß C und D voneinander verschieden sind da sonst C der Schnittpunkt des Zykels mit der geraden Linie AB wäre. Es sei nun E der Treffpunkt der Halbierungslinie des Winkels BDC mit der Achse BC. Wir beschreiben um E einen Kreis K mit dem Halbmesser EC; derselbe berührt die Gerade AB in dem Spiegelbild F des Punktes C in bezug auf DE. Betrachtet man den Kreis K als Inversionskreis, so entspricht nach Nr. 6 dem gegebenen Zykel ein Kreis, der den Grundkreis in C von innen berührt, und der Geraden AB ebenfalls ein Kreis, welcher den Grundkreis in F von innen berührt und welcher durch die Punkte A' und B' geht, die zu A und B invers sind und von welchen A' innerhalb und B' außerhalb des ersten Kreises liegt; mithin schneidet der Kreisbogen $A'FB'$ den ersten Kreis in einem Punkte M'. Die Verbindungslinie EM' trifft die Gerade AB in einem zwischen A und B gelegenen Punkt M; dieser wird der Schnittpunkt des Zykels und der Geraden AB.

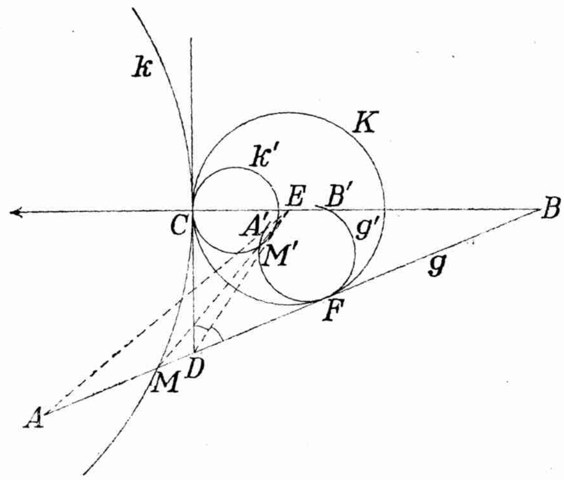

Abb. 11

Liegen die Punkte A und B eines Zykels auf verschiedenen Seiten einer Geraden, so hat der Zykel mit der Geraden einen Punkt gemein.

Um dies zu beweisen, bestimmen wir (Abb. 12) den Schnittpunkt C der gegebenen Geraden mit der Verbindungslinie AB, ferner den Scheitel D der durch C gehenden Achse des Zykels. Dann beschreiben wir um C mit dem Halbmesser CD einen Kreis K und konstruieren zu dem Zykel den inversen Kreis in bezug auf K, welcher den Grundkreis in D von innen berührt und durch die Punkte A' und B' geht, die zu A und B invers sind. Da A' und B' auf verschiedenen Seiten der gegebenen Geraden liegen, so hat der Kreisbogen $A'D'B'$ mit derselben Geraden einen Punkt M' gemein; wie wir sofort er-

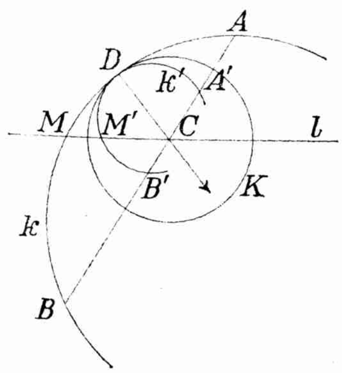

Abb. 12

kennen, ist der zu M' inverse Punkt M der Schnittpunkt des Zykels und der gegebenen Geraden.

Enthält ein Kreis einen Punkt A innerhalb und einen Punkt B außerhalb eines Zykels, so hat er mit dem Zykel zwei Punkte gemein.

In der Tat, es sei O (Abb. 13) der Mittelpunkt des Kreises und C der Scheitel der durch O gehenden Achse des Zykels; dieselbe Achse möge den Kreis in einem außerhalb des Zykels gelegenen Punkte D treffen. Nimmt man nun den über CD als Durchmesser geschlagenen Kreis K als Inversionskreis an, so entspricht dem gegebenen Zykel ein Kreis, der den Grundkreis in C von innen berührt, und dem Kreis um O ebenfalls ein Kreis, der den Grundkreis in D von innen berührt und durch die zu A und B inversen Punkte A' bzw. B' geht, von denen A' innerhalb und B' außerhalb des ersten Kreises liegt; mithin haben die beiden Kreise zwei Punkte M', N' gemein. Die zu den Punkten M', N' zugehörigen Punkte M, N sind die Schnittpunkte des gegebenen Kreises mit dem Zykel.

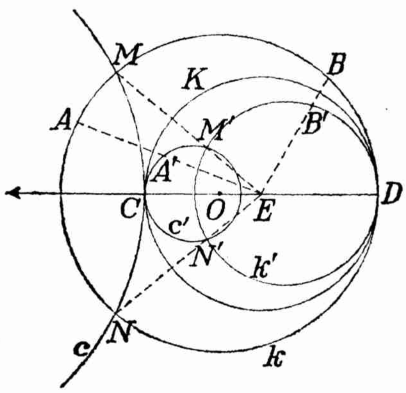

Abb. 13

Hiernach kann man leicht den folgenden allgemeinen Satz beweisen:

Es sind zwei Zyklen gegeben, von denen der eine einen Punkt A innerhalb und einen Punkt B außerhalb des anderen enthält: dann haben die beiden Zyklen mindestens einen Punkt gemein.

Zu dem Zwecke bestimmen wir (Abb. 14) den Schnittpunkt C der Strecke AB mit dem Zykel, der nicht durch die Endpunkte dieser Strecke hindurchgeht, und den Schnittpunkt D der durch C gehenden Achse desselben Zykels mit dem anderen Zykel. Der Kreis, der CD zum Durchmesser hat, schneidet den durch A und B gehenden Zykel noch im Punkte E. Die in C an denselben Kreis gelegte Tangente hat mit der Geraden DE einen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt F gemein. Sodann konstruieren wir den

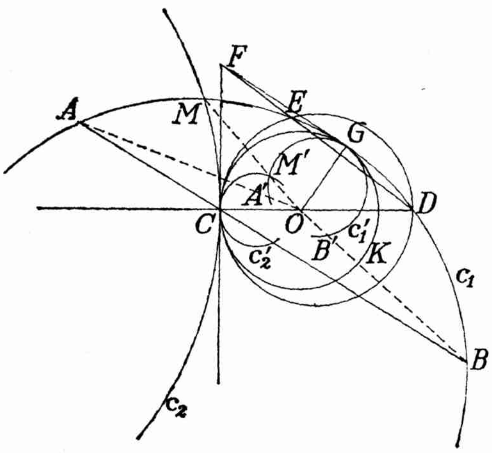

Abb. 14

Berührungspunkt G der aus dem Punkte F an den durch die Punkte D, E gehenden Zykel gelegten Tangente. Um den Punkt G zu finden, bedienen wir uns der in Nr. 4 angegebenen Konstruktion.
Die in G auf der Tangente FG errichtete Senkrechte trifft die Gerade DC in einem Punkte O. Nimmt man jetzt den um O durch C geschlagenen Kreis als Inversionskreis, so ergibt sich genau wie vorhin, daß die beiden Zyklen notwendigerweise einen Punkt gemein haben.
Damit ist unsere Behauptung bewiesen, und wir erkennen zugleich, daß die Schnittpunkte einer Geraden und eines Zykels bzw. zweier Zyklen mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können.

Manuskripteingang: 1. 9. 1971

VERFASSER:
JULIUS STROMMER, Lehrstuhl für Darstellende Geometrie der Technischen Universität Budapest