

Werk

Titel: Zur Lösung des Isotopieproblems der Borettenknoten

Autor: KRÖTENHEERDT, O.

Jahr: 1971

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0001 | log9

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Zur Lösung des Isotopieproblems der Rosettenknoten

OTTO KRÖTENHEERDT

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung und Resultate

Jeder *Knoten* k im 3-dimensionalen euklidischen Raum R^3 ist ein topologisches Bild eines Kreises mit einer gegebenen Orientierung. Zwei Knoten k_1 und k_2 werden *isotop* genannt, wenn es einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus des R^3 auf sich gibt, der k_1 in k_2 überführt. In [3] wurde eine Klasse von Knoten betrachtet, die als

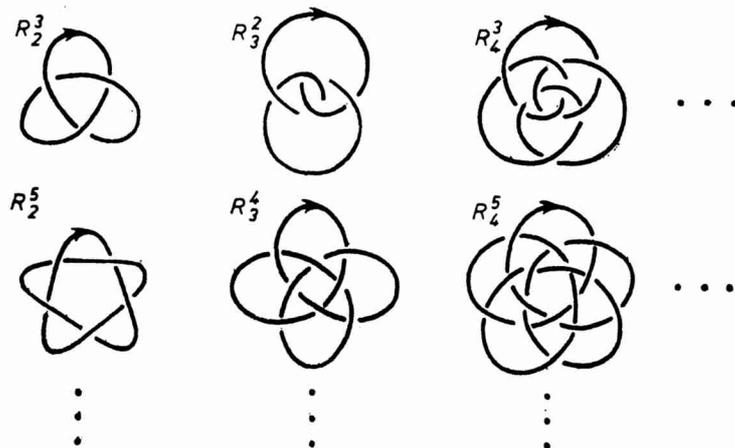


Abb. 1

Rosettenknoten n -ter Ordnung R_n^m bezeichnet wurden. Diese Knoten können als geschlossene Zöpfe n -ter Ordnung angesehen werden, und als solche besitzen sie in der euklidischen Ebene R^2 eine *normierte reguläre Projektion* mit zentralsymmetrischer rosettenartiger Gestalt (vgl. Abb. 1); normiert und regulär wird jede Projektion genannt, in der es nur einfache Punkte und Doppelpunkte gibt und in der an jedem Doppelpunkt Überkreuzung und Unterkreuzung gekennzeichnet sind. Unter Ver-

wendung der Artinschen Zopfschreibweise gestatten die Rosettenknoten n -ter Ordnung R_n^m die Darstellung

$$R_n^m = (s_1 s_2^{-1}, \dots, s_{n-2}^{-e} s_{n-1}^{+e})^m, \quad m \text{ und } n > 1, \quad (m, n) = 1$$

und $e = +1$ oder -1 , je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist; im Fall $m = 1$ liegt ein unverknöteter Kreis vor, im Fall nicht teilerfremder m und n ist R_n^m eine Verkettung von mindestens zwei Kreisen. Aus jedem Rosettenknoten R_n^m entsteht offensichtlich bei Umorientierung der Durchlaufrichtung ein isotoper Knoten.

Wird in der normierten regulären Projektion K eines beliebigen Knotens k an jedem Doppelpunkt die Unterkreuzung zur Überkreuzung und damit auch die Überkreuzung zur Unterkreuzung abgeändert, so entsteht die normierte reguläre Projektion \bar{K} eines Knotens \bar{k} ; der Knoten \bar{k} wird der spiegelbildliche Knoten von k genannt. Jeder Knoten k , der zu \bar{k} isotop ist, heißt *amphicheiral*. Mit den Arbeiten [3] und [6] wurde bewiesen, daß jeder Rosettenknoten ungerader Ordnung amphicheiral ist und daß jeder Rosettenknoten gerader Ordnung nicht amphicheiral ist.

Die Isotopie zweier Knoten k_1 und k_2 kann bewiesen werden, wenn es gelingt, einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus des R^3 auf sich anzugeben, der k_1 in k_2 überführt. Für den Nachweis der Nichtisotopie zweier Knoten k_1 und k_2 werden isotopieinvariante Knoteneigenschaften gesucht, welche sich aus den Knoten k_1 und k_2 oder aus normierten regulären Projektionen dieser Knoten bestimmen lassen. Es ist leicht, solche isotopieinvariante Knoteneigenschaften aufzuzählen; solch eine Eigenschaft aber für gegebene Knoten zu bestimmen bereitet im allgemeinen große, häufig sogar unüberwindliche Schwierigkeiten.

Isotope Knoten haben isomorphe *Knotengruppen*, d. h. isomorphe 1-dimensionale Homotopiegruppen der Knotenaußenräume; sind also für zwei Knoten k_1 und k_2 die Knotengruppen nicht isomorph, so sind k_1 und k_2 nicht isotop; aus der Isomorphie der Gruppen zweier Knoten kann die Isotopie der Knoten nicht gefolgert werden, denn es besitzen z. B. alle nichtisotopen spiegelbildlichen Knoten isomorphe Knotengruppen. Etwas leichter zu übersehen, aber weniger tiefgehend als die Gruppe eines Knotens ist die daraus ableitbare *Kette der Elementarideale*; gehören zu zwei Knotengruppen verschiedene Ketten von Elementaridealen, so sind die Knotengruppen nicht isomorph, und folglich sind die zugehörigen Knoten nicht isotop; aus der Gleichheit der Ketten der Elementarideale zweier Knotengruppen kann die Isomorphie der Knotengruppen nicht gefolgert werden. Wiederum leichter zu übersehen, aber ebenfalls weniger tiefgehend als die Kette der Elementarideale ist das daraus ableitbare *Alexander-Polynom* $\Delta(t)$; gehören zu zwei Ketten von Elementaridealen verschiedene Alexander-Polynome, so sind die Ketten der Elementarideale verschieden; folglich sind die Knotengruppen nicht isomorph, und die zugehörigen Knoten sind nicht isotop; aus der Gleichheit der Alexander-Polynome zweier Ketten von Elementaridealen kann die Gleichheit der Ketten der Elementarideale nicht gefolgert werden.

In der vorliegenden Arbeit wird mit Hilfe der Alexander-Polynome bewiesen, daß je zwei Rosettenknoten gleicher Ordnung R_n^m und $R_n^{m'}$ mit $m \neq m'$ und je zwei Rosettenknoten unterschiedlicher Ordnung R_n^m und $R_{n'}^{m'}$ mit $n \neq n'$ nicht isotop sind. Die durchgeführten Untersuchungen, die sich wesentlich auf die Arbeit [4] von MURASUGI stützen, zeigen, daß die Kraft der Alexander-Polynome ausreicht, für alle Rosettenknoten die genannten Isotopieentscheidungen zu treffen; es ist noch nicht einmal die Kenntnis des gesamten Alexander-Polynoms $\Delta(t)$ für jeden Rosettenknoten R_n^m erforderlich, sondern es genügt bereits, den Grad und den Koeffizienten vor der zweit-

höchsten t -Potenz von $\Delta(t)$ für jeden Rosettenknoten R_n^m zu kennen; entweder der Grad oder der Koeffizient vor der zweithöchsten t -Potenz von $\Delta(t)$ reichen für die Entscheidung nicht aus. Damit ist in Verbindung mit den Arbeiten [3] und [6] eine Lösung des Isotopieproblems für alle Rosettenknoten und ihre spiegelbildlichen Knoten gegeben.

2. Begriffsbildungen und Bezeichnungen

Um zu gewissen Aussagen über die Alexander-Polynome aller Rosettenknoten n -ter Ordnung R_n^m für alle n und $m \geq 2$ mit $(m, n) = 1$ zu gelangen, bedienen wir uns der Begriffsbildungen und Bezeichnungen, die von MURASUGI in [4] für *alternierende* Knoten und Verkettungen verwendet wurden; Knoten und Verkettungen heißen alternierend, wenn sie normierte reguläre Projektionen besitzen, bei deren Durchlaufen abwechselnd Unterkreuzungen und Überkreuzungen auftreten. Rosettenknoten sind alternierende Knoten.

In jedem Doppelpunkt D einer normierten regulären Projektion K jedes alternierenden Knotens oder jeder alternierenden Verkettung k stoßen vier Gebiete G_1, \dots, G_4 zusammen; Doppelpunkte, bei denen nicht alle vier Gebiete paarweise verschieden sind, können durch einfache isotope Veränderungen von k beseitigt werden und seien im folgenden ausgeschlossen. An jedem Doppelpunkt D werden zwei der vier zusammenstoßenden *Gebietsecken* mit einem Markierungspunkt versehen, und zwar diejenigen, die beim positiven Durchlaufen von K bei D links vom unterkreuzenden Bogen liegen.

Aus der normierten regulären Projektion K entstehen ein oder mehrere geschlossene Kurvenzüge, wenn beim positiven Durchlaufen von K beim Erreichen jedes Doppelpunktes D zum kreuzenden Bogen in positiver Durchlaufrichtung übergewechselt wird. Jeder solche geschlossene Kurvenzug L heißt *Standard-Schleife 1. Art*, wenn L der Rand genau eines derjenigen Gebiete ist, in die die Projektionsebene R^2 durch K zerlegt wird; andernfalls heißt L *Standard-Schleife 2. Art*. Standard-Schleifen besitzen keine Schnittpunkte, aber sie können sich in Doppelpunkten von K berühren. Jeder alternierende Knoten und jede alternierende Verkettung k heißt *spezial-alternierend*, wenn K keine Standard-Schleife 2. Art besitzt.

Für jedes k , welches nicht *spezial-alternierend* ist, werden in R^2 mit K durch die Standard Schleifen 2. Art C_1, \dots, C_g ($g \geq 1$) $g + 1$ *Gebietsvereinigungen* E_1, \dots, E_{g+1} so festgelegt, daß die Ränder \dot{E}_i der E_i , $i = 1, \dots, g + 1$, aus Standard-Schleifen 2. Art bestehen. Die Numerierung der C_i und E_i , $i = 1, \dots, g$, kann so erfolgen, daß in $\dot{E}_i = C_{i_0} \cup C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_n}$ stets $i_0 = i$ und $i_1, \dots, i_n < i$ für $i = 1, \dots, g$ gilt; das verbleibende Außengebiet wird mit E_{g+1} bezeichnet. Zur Abkürzung wird K_i für $(E_i \cup \dot{E}_i) \cap K$ verwendet. Jeder Doppelpunkt von K ist Doppelpunkt von genau einem K_i , und jedes K_i kann als normierte reguläre Projektion eines *spezialalternierenden* Knotens bzw. einer *spezial alternierenden* Verkettung k_i angesehen werden. Für jedes $i = 1, \dots, g + 1$ gestatten die Gebiete, in die die Projektionsebene R^2 durch K_i zerlegt wird, eine Schwarz-Weiß-Färbung derart, daß längs jedes Bogens zwischen zwei benachbarten Doppelpunkten von K_i ein schwarzes und ein weißes Gebiet zusammenstoßen, daß jedes Gebiet aus E_i , welches einen auf \dot{E}_i gelagerten Randbogen besitzt, weiß gefärbt ist und daß jedes schwarze Gebiet von einer Standard-Schleife 1. Art begrenzt wird. Die zu K_i gehörenden weißen Gebiete mögen mit W_{i1}, \dots, W_{ip} bezeichnet sein. Ist K selbst *spezial-alternierend*, so wird eine Schwarz-Weiß-Färbung

der durch K in der Projektionsebene bestimmten Gebiete in entsprechender Weise vorgenommen; damit gelten die oben genannten Bezeichnungen auch für den Fall $g = 0$.

Jedem spezial-alternierenden Knoten und jeder spezial-alternierenden Verkettung k_i wird unter Verwendung von K_i eine Matrix $M_i = (a_{kl})$, k und $l = 1, \dots, p_i$, zugeordnet, für die jedes a_{kk} gleich der halben Anzahl der Doppelpunkte von W_{ik} ist und für die $-a_{kl}$, $k \neq l$, gleich der Anzahl der mit Markierungspunkten versehenen Gebietsecken von W_{ik} an allen Doppelpunkten von $\dot{W}_{ik} \cap \dot{W}_{il}$ ist.

Jedem alternierenden Knoten und jeder alternierenden Verkettung k wird unter Verwendung von K und K_i , $i = 1, \dots, g + 1$, eine Matrix $M = (M_{ij})$, i und $j = 1, \dots, g + 1$, zugeordnet. In dieser Matrix ist jede Teilmatrix M_{ii} gleich der Matrix M_i des spezial-alternierenden Knotens k_i . Für die Matrizen $M_{ij} = (b_{qr})$, $i \neq j$, ist $M_{ij} = M_{ji}$ gleich der Nullmatrix 0 , falls $\dot{E}_i \cap \dot{E}_j$ leer ist oder nur aus Doppelpunkten von K besteht; ist $\dot{E}_i \cap \dot{E}_j = C_f$, dabei möge $f = \min(i, j)$ sein, so ist $M_{ij} = 0$, falls E_i beim positiven Durchlaufen von C_f rechts von C_f liegt, und liegt E_i links von C_f , so ist $b_{qr} = u - v$, wobei u die Anzahl der mit Markierungspunkten und v die Anzahl der nicht mit Markierungspunkten versehenen Gebietsecken von W_{iq} an allen Doppelpunkten von $\dot{W}_{iq} \cap \dot{W}_{jr}$ ist. $M_{ij}^!$ sei die transponierte Matrix von M_{ij} , und M^T sei die Matrix

$$\begin{bmatrix} M'_{11} & -M'_{21} & \dots & -M'_{g+1,1} \\ -M'_{12} & M'_{22} & \dots & -M'_{g+1,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -M'_{1,g+1} & -M'_{2,g+1} & \dots & M'_{g+1,g+1} \end{bmatrix}$$

Es sei außerdem

$$\begin{aligned} 1 \leq s_1 \leq p_1, \quad p_1 + 1 \leq s_2 \leq p_1 + p_2, \quad \dots, \\ p_1 + \dots + p_g + 1 \leq s_{g+1} \leq p_1 + \dots + p_{g+1}. \end{aligned}$$

Streicht man in M und in M^T die s_1 -te, s_2 -te, \dots , s_{g+1} -te Zeile und die s_1 -te, s_2 -te, \dots , s_{g+1} -te Spalte, so mögen die dadurch entstehenden Matrizen mit $(\tilde{M}_1(s_1, s_2, \dots, s_{g+1}))$ bzw. $\tilde{M}^T(s_1, s_2, \dots, s_{g+1})$ bezeichnet sein.

MURASUGI zeigte in [4], daß die Determinante der Matrix

$$\tilde{M}(s_1, s_2, \dots, s_{g+1}) - t \cdot \tilde{M}^T(s_1, s_2, \dots, s_{g+1}),$$

die in der beschriebenen Weise jedem alternierenden Knoten und jeder alternierenden Verkettung k zugeordnet werden kann, immer dann, wenn k ein Knoten ist, gleich dem Alexander-Polynom $\Delta(t)$ von k ist.

3. Ein Satz über die geschlossenen Zöpfe R_n^m

Wir wollen im folgenden die Bezeichnung R_n^m , n und $m > 1$, sowohl für die in Frage kommenden geschlossenen Zöpfe n -ter Ordnung als auch für deren normierte reguläre Projektionen verwenden; im Fall $(n, m) = 1$ ist R_n^m ein alternierender Knoten,

andernfalls eine alternierende Verkettung von mindestens zwei Kreisen. Bei geeigneter Übertragung des Verfahrens zur Konstruktion der Matrix $\tilde{M}(s_1, \dots, s_{g+1}) - t \cdot \tilde{M}^T(s_1, \dots, s_{g+1})$ für die geschlossenen Zöpfe R_n^m zeigt sich, daß es möglich ist, für jedes $n \geq 2$ und jedes $m \geq 2$ diese Matrix, für die wir zur Abkürzung die Bezeichnung $M_n^m(t)$ verwenden wollen, in einer Form anzugeben, aus der für jeden Rosettenknoten R_n^m wichtige Eigenschaften des Alexander-Polynoms $\Delta(t)$ von R_n^m zu erkennen sind.

Wir denken uns R_n^m , n und $m > 1$, in der zentralsymmetrischen rosettenartigen Gestalt der normierten regulären Projektion gegeben (vgl. Abb. 1 für $(m, n) = 1$); die Orientierung von R_n^m sei vom Mittelpunkt aus gesehen im Uhrzeigersinn festgelegt, und an jedem Doppelpunkt D von R_n^m seien zwei der vier zusammenstoßenden Gebietsecken mit Markierungspunkten versehen, und zwar diejenigen, die beim positiven Durchlaufen von R_n^m bei D links vom unterkreuzenden Bogen liegen. R_n^m zerfällt in zwei Standard-Schleifen 1. Art und $g = n - 2$ Standard-Schleifen 2. Art; alle Standard-Schleifen besitzen m -zählige Zentralsymmetrie mit dem Zentrum im Mittelpunkt von R_n^m . Die Standard-Schleifen 2. Art werden vom Mittelpunkt von R_n^m aus beginnend, nach außen fortschreitend, der Reihe nach mit C_1, \dots, C_{n-2} bezeichnet; in der gleichen Weise werden vom Zentrum von R_n^m aus beginnend die durch C_1, \dots, C_{n-2} bestimmten Gebietsvereinigungen E_1, \dots, E_{n-1} und die dadurch festgelegten spezial-alternierenden Knoten bzw. Verkettungen K_1, \dots, K_{n-1} numeriert; im Fall $n = 2$ gibt es keine Standard-Schleifen 2. Art, das heißt, R_2^m ist spezial-alternierend. Mit den Standard-Schleifen 1. und 2. Art besitzen auch alle E_i und K_i , $i = 1, \dots,$

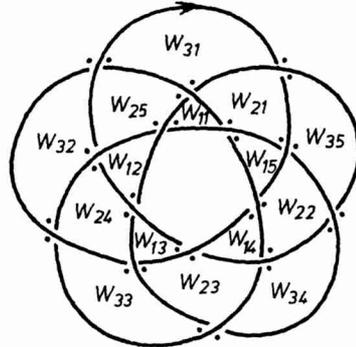


Abb. 2

$n - 1$, m -zählige Zentralsymmetrie; jedes K_i erweist sich als R_2^m mit $p_i = m$ weißen Gebieten W_{i1}, \dots, W_{im} und zwei schwarzen Gebieten, von denen das eine den Mittelpunkt von K_i enthält, während sich das andere ins Unendliche der Projektionsebene erstreckt. Für die Numerierung der W_{i1}, \dots, W_{im} denken wir uns einen Strahl vom Mittelpunkt von R_n^m aus in der Projektionsebene, der durch keinen Doppelpunkt von R_n^m verläuft. Das für jedes i von diesem Strahl getroffene weiße Gebiet von K_i wird mit W_{i1} bezeichnet. Für jedes ungeradzahlige i numerieren wir die übrigen weißen Gebiete von K_i der Reihe nach entgegen dem Uhrzeigersinn von W_{i1} aus, und für jedes geradzahlige i erfolgt die Numerierung der übrigen weißen Gebiete von K_i der Reihe nach im Uhrzeigersinn von W_{i1} aus. Abb. 2 zeigt den geschlossenen Zopf 4. Ordnung R_4^5 mit den zwei Markierungspunkten an jedem Doppelpunkt und mit der Bezeichnung der Gebiete W_{i1}, \dots, W_{i5} , $i = 1, 2, 3$.

Mit den angegebenen Bezeichnungen erhalten wir bei jedem geschlossenen Zopf R_n^m , n und $m > 1$, die quadratischen m -reihigen Matrizen

$$M_{ii} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n - 1,$$

und

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad i = j + 1, j = 1, \dots, n - 2.$$

Alle Matrizen M_{ij} , i und $j = 1, \dots, n - 1$, mit $i < j$ oder $i > j + 1$ sind quadratische m -reihige Nullmatrizen 0 . Wählen wir nun beim Übergang zur Matrix

$$M_n^m(t) = \tilde{M}(s_1, \dots, s_{n-1}) - t \cdot \tilde{M}^T(s_1, \dots, s_{n-1})$$

die Zahlen $s_1 = 1, s_2 = m + 1, \dots, s_{n-1} = (n - 1) \cdot m + 1$, so erhalten wir mit den $(m - 1)$ -reihigen quadratischen Matrizen

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

die im Fall $m = 2$ die Gestalt $F = [1]$ und $G = [-1]$ annehmen, schließlich die $(n - 1) \cdot (m - 1)$ -reihige quadratische Matrix $M_n^m(t) =$

$$\begin{bmatrix} F - t \cdot F' & t \cdot G & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ G & F - t \cdot F' & t \cdot G & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G & F - t \cdot F' & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F - t \cdot F' & t \cdot G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & G & F - t \cdot F' & t \cdot G \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & G & F - t \cdot F' \end{bmatrix},$$

$B_2^{m-1}(t) = (-t)^{m-3}$ sei bereits für $m \geq 3$ gezeigt, so folgt aus der $(m-1)$ -reihigen quadratischen Matrix

$$M_2^m(t) = [F - t \cdot F']$$

$$= \begin{bmatrix} 1-t & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t & 1-t & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t & 1-t & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-t & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t & 1-t \end{bmatrix}$$

bei der Berechnung der Determinante $D_2^m(t)$ durch Entwicklung nach den Elementen der 1. Zeile

$$B_2^m(t) = 1 \cdot A_2^{m-1}(t) - t \cdot B_2^{m-1}(t) + 1 \cdot t \cdot A_2^{m-2}(t) = (-t)^{m-2} + (-t)^{m-2} - (-t)^{m-2},$$

$$B_2^m(t) = (-t)^{m-2}$$

und damit die Gültigkeit von $B_2^m(t) = (-t)^{m-2}$ für alle $m \geq 2$.

2. Schritt. Nachweis der Behauptung

$$B_3^m(t) = ((3-2) \cdot m + 1) \cdot (-t)^{(3-1) \cdot (m-1) - 1} = (m+1) \cdot (-t)^{2m-3}, m \geq 2.$$

Es ist im Fall $m = 2$ die Matrix

$$M_3^m(t) = \begin{bmatrix} F - t \cdot F' & t \cdot G \\ G & F - t \cdot F' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t & -t \\ -1 & 1-t \end{bmatrix},$$

und daraus folgt $B_3^2(t) = 3 \cdot (-t)^1$; im Fall $m \geq 3$ ist $M_3^m(t)$ die $(2m-2)$ -reihige quadratische Matrix

$$\begin{bmatrix} 1-t & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \dots & 0 & t & -t \\ t & 1-t & -1 & \dots & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \dots & t & -t & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-t & -1 & | & t & -t & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & 1-t & | & -t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & | & 1-t & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 & | & t & 1-t & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-t & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \dots & t & 1-t \end{bmatrix}$$

Aus dieser Matrix entsteht durch Addition

- der $(2m - 2)$ -ten Zeile zur $(2m - 3)$ -ten Zeile,
- der $(2m - 3)$ -ten Zeile zur $(2m - 4)$ -ten Zeile,
-
- der $(m + 1)$ -ten Zeile zur m -ten Zeile,
- der $(m - 1)$ -ten Zeile zur $(m - 2)$ -ten Zeile,
- der $(m - 2)$ -ten Zeile zur $(m - 3)$ -ten Zeile,
-
- der 2. Zeile zur 1. Zeile,
- der $(m - 2)$ -ten Spalte zur m -ten Spalte,
- der $(m - 3)$ -ten Spalte zur $(m + 1)$ -ten Spalte,
-
- der 1. Spalte zur $(2m - 3)$ -ten Spalte

schließlich die Matrix

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -t \\
 t & 1 & 0 & \dots & 0 & -t & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & t & 1 & \dots & 0 & -t & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -t & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & t & 1 - t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -t \\
 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & t - 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & -t \\
 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & t - 1 & 1 & \dots & 0 & -t \\
 \dots & \dots \\
 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -t \\
 -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t - 1 & 1 - t
 \end{array} \right]$$

Zur Bestimmung von $B_3^m(t)$ für $m \geq 3$ denken wir uns die Determinante D der vorstehenden Matrix nach den $(m - 1)$ -reihigen Unterdeterminanten D_w der ersten $m - 1$ Zeilen entwickelt, $w = 1, 2, \dots, \binom{2m - 2}{m - 1}$. In der somit für D entstehenden Summe von $\binom{2m - 2}{m - 1}$ Produkten $D_w \cdot \bar{D}_w$ (\bar{D}_w möge die komplementäre Determinante von D_w bedeuten) interessieren uns nur diejenigen Produkte, in denen einer der beiden Faktoren vom Grad $m - 1$ in t und der andere vom Grad $m - 2$ in t ist. Offensichtlich gibt es nur eine Determinante \bar{D}_w , welche in t vom Grad $m - 1$ ist; sie sei

mit \bar{D}_1 bezeichnet. Das Produkt aus der höchsten t -Potenz von \bar{D}_1 mit der zweithöchsten t -Potenz von D_1 ist

$$\left((-1)^m \cdot (-t) \cdot t^{m-2}\right) \cdot \left(1 \cdot (-1)^{m-1} \cdot (-t) \cdot t^{m-3}\right) = (-t)^{2m-3},$$

wobei wir uns D_1 nach den Elementen der 1. Zeile entwickelt denken; das Produkt aus der höchsten t -Potenz von D_1 mit der zweithöchsten t -Potenz von \bar{D}_1 ist

$$\begin{aligned} & \left((-1)^m \cdot (-t) \cdot t^{m-2}\right) \cdot \left(1 \cdot (-1)^{m-1} \cdot (-t) \cdot t^{m-3} + (-1)^m \cdot (-t) \cdot (-m-2) \cdot t^{m-3}\right) \\ & = (m-1) \cdot (-t)^{2m-3}, \end{aligned}$$

wobei wir uns \bar{D}_1 nach den Elementen der 1. Zeile entwickelt denken. Jede Unterdeterminante D_w , $w \neq 1$, mit einer t -Potenz vom Grad $m-1$ muß $m-2$ von den $m-1$ Spalten von D_1 in der durch D_1 gegebenen Reihenfolge enthalten, und die letzte Spalte jeder solchen Unterdeterminante D_w besteht aus der oberen Hälfte der letzten Spalte von D . Es gibt $m-1$ derartige Unterdeterminanten, die wir mit D_w , $w = 2, \dots, m$, bezeichnen wollen, und dabei möge in D_w die $(w-1)$ -te Spalte von D_1 nicht vorkommen. Von den komplementären Unterdeterminanten \bar{D}_w , $w = 2, \dots, m$, ist für unsere Untersuchungen lediglich \bar{D}_m von Interesse, weil für alle übrigen der Grad der höchsten t -Potenz kleiner als $m-2$ ist. Aus $D_m \cdot \bar{D}_m$ erhalten wir als Produkt der höchsten t -Potenz von D_m mit der höchsten t -Potenz von \bar{D}_m

$$\left((-1)^m \cdot (-t) \cdot t^{m-2}\right) \cdot \left((-1) \cdot t^{m-2}\right) = (-1)^{m-1} \cdot (-t)^{2m-3}.$$

Für die Berechnung von $B_3^m(t)$, $m \geq 3$, ist noch entsprechend der Vorzeichenregeln für die Entwicklung einer Determinante nach Unterdeterminanten zu beachten, daß der aus $D_m \cdot \bar{D}_m$ stammende Bestandteil mit

$$(-1)^{1+2+\dots+(m-1)} \cdot (-1)^{1+2+\dots+(m-2)+(2m-2)} = (-1)^{m-1}$$

und der aus $D_1 \cdot \bar{D}_1$ stammende Bestandteil mit

$$(-1)^{1+2+\dots+(m-1)} \cdot (-1)^{1+2+\dots+(m-1)} = 1$$

zu multiplizieren ist. Folglich ist auch für jedes $m \geq 3$

$$B_3^m(t) = (m+1) \cdot (-t)^{2m-3}.$$

3. Schritt. Nachweis der Behauptung

$$B_n^m(t) = (n-2) \cdot m + 1 \cdot (-t)^{(n-1) \cdot (m-1)}, \quad m \geq 2 \text{ und } n \geq 4.$$

Wir nehmen an, es wäre $B_{n-1}^m(t) = ((n-3) \cdot m + 1) \cdot (-t)^{(n-2) \cdot (m-1)-1}$ für $m \geq 2$ und $n \geq 4$ bereits gezeigt. Zur Bestimmung von $B_n^m(t)$ denken wir uns die Determinante von $M_n^m(t)$ nach den $(m-1)$ -reihigen Unterdeterminanten der letzten $m-1$ Zeilen entwickelt. Einen Beitrag zu $B_n^m(t)$ erhalten wir durch das Produkt aus der höchsten t -Potenz der Unterdeterminante $|F - t \cdot F'|$ mit der zweithöchsten t -Potenz der komplementären Unterdeterminante, d. h. durch das Produkt $A_2^m(t) \cdot B_{n-1}^m(t)$. Weitere Beiträge zu $B_n^m(t)$, $n \geq 4$, können nur noch durch Produkte aus $(m-1)$ -reihigen Unterdeterminanten der Matrix $[G \ F - t \cdot F']$ mit den entsprechenden komplementären Unterdeterminanten entstehen. Solche $(m-1)$ -reihigen Unterdeterminanten von $[G \ F - t \cdot F']$ müssen vom Grad $m-2$ in t , und die entsprechenden komplementären Unterdeterminanten müssen vom Grad $(n-2) \cdot (m-1)$ in t sein. Mit Hilfe einer gedachten Entwicklung der Determinante von $M_n^m(t)$ nach den Elementen

der $(m-1)$ -ten, $(m-2)$ -ten, ..., 1., $(2m-2)$ -ten, $(2m-3)$ -ten, ..., m -ten, ..., $((n-3) \cdot (m-1))$ -ten, $((n-3) \cdot (m-1)-1)$ -ten, ..., $((n-4) \cdot (m-1) + 1)$ -ten Spalte finden wir die noch fehlenden Beiträge zu $B_n^m(t)$ durch den Ausdruck $B_3^m(t) \cdot A_{n-2}^m(t)$. In $B_3^m(t) \cdot A_{n-2}^m(t)$ ist allerdings auch der Summand $A_2^m(t) \cdot B_2^m(t) \cdot A_{n-2}^m(t)$ enthalten, der bereits durch $A_2^m(t) \cdot B_{n-1}^m(t)$ erfaßt und somit von $B_3^m(t) \cdot A_{n-2}^m(t)$ zu subtrahieren ist. Wir erhalten also für $n \geq 4$ und $m \geq 2$ unter Berücksichtigung der oben gemachten Annahme und unter Berücksichtigung der in den Schritten 1 und 2 gefundenen Ergebnisse

$$\begin{aligned} B_n^m(t) &= A_2^m(t) \cdot B_{n-1}^m(t) + B_3^m(t) \cdot A_{n-2}^m(t) - A_2^m(t) \cdot B_2^m(t) \cdot A_{n-2}^m(t) \\ &= (-t)^{m-1} \cdot ((n-3) \cdot m + 1) \cdot (-t)^{(n-2) \cdot (m-1)-1} \\ &\quad + (m+1) \cdot (-t)^{2m-3} \cdot (-t)^{(n-3) \cdot (m-1)} \\ &\quad - (-t)^{m-1} \cdot (-t)^{m-2} \cdot (-t)^{(n-3) \cdot (m-1)}, \\ B_n^m(t) &= ((n-2) \cdot m + 1) \cdot (-t)^{(n-1) \cdot (m-1)-1}. \end{aligned}$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

4. Lösung des Isotopieproblems für Rosettenknoten R_n^m

Auf Grund der Murasugischen Untersuchungen in [4] stimmt für jeden alternierenden Knoten k die Determinante der Matrix $\tilde{M}(s_1, \dots, s_{g+1}) - t \cdot \tilde{M}^T(s_1, \dots, s_{g+1})$ mit dem Alexander-Polynom $\Delta(t)$ von k überein. Für die von uns betrachteten geschlossenen Zöpfe ist somit in den Fällen teilerfremder m und n , also für Rosettenknoten R_n^m , die Determinante $D_n^m(t)$ von R_n^m gleich dem Alexander-Polynom $\Delta(t)$ von R_n^m . Das Alexander-Polynom jedes Knotens k ist invariant gegenüber isotopen Veränderungen von k . Wir kennen nach Satz 1 zwar nicht das ganze Alexander-Polynom jedes Rosettenknotens R_n^m , aber die Kenntnis des Grades g_n^m des Alexander-Polynoms und des Koeffizienten b_n^m vor der zweithöchsten t -Potenz reichen bereits aus, von je zwei Rosettenknoten zu entscheiden, ob sie isotop sind oder nicht. Wir beweisen den folgenden Satz.

Satz 2. Je zwei Rosettenknoten gleicher Ordnung R_n^m und $R_n^{m'}$ mit $m \neq m'$ und je zwei Rosettenknoten unterschiedlicher Ordnung R_n^m und $R_n^{m'}$ mit $n \neq n'$ sind nicht isotop.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß je zwei Rosettenknoten gleicher Ordnung R_n^m und $R_n^{m'}$ mit $m \neq m'$ nicht isotop sind. Die Grade der beiden Alexander-Polynome sind

$$g_n^m = (n-1) \cdot (m-1), \quad g_n^{m'} = (n-1) \cdot (m'-1),$$

und folglich sind R_n^m und $R_n^{m'}$ für $m \neq m'$ nicht isotop.

Zum Nachweis der Nichtisotopie zweier Rosettenknoten unterschiedlicher Ordnung genügt es nicht, die Gradzahlen der Alexander-Polynome zu kennen, denn diese können übereinstimmen; zum Beispiel ist $g_5^4 = g_3^7 = 12$. Auch die Kenntnis der Koeffizienten b_n^m und $b_n^{m'}$ der Alexander-Polynome zweier Rosettenknoten unterschied-

licher Ordnung reicht nicht aus, die Nichtisotopie zu beweisen, weil diese Koeffizienten ebenfalls übereinstimmen können; zum Beispiel ist $b_7^2 = b_4^5 = -11$. Mit beiden Kriterien gemeinsam gelingt der gewünschte Nachweis.

Nehmen wir an, es gäbe zwei Rosettenknoten unterschiedlicher Ordnungen R_n^m und $R_{n'}^{m'}$, $n \neq n'$, für die gleichzeitig $g_n^m = g_{n'}^{m'}$ und $b_n^m = b_{n'}^{m'}$, d. h.

$$(n-1) \cdot (m-1) = (n'-1) \cdot (m'-1)$$

und
$$(n-2) \cdot m + 1 = (n'-2) \cdot m' + 1$$

gelten würde. Aus diesen beiden Relationen würde

$$m - n = m' - n'$$

folgen, und das ist für $n \neq n'$ ein offensichtlicher Widerspruch zu $g_n^m = g_{n'}^{m'}$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Bemerkung 1. Satz 2 ergibt zusammen mit den Ergebnissen von [3] und [6], wonach jeder Rosettenknoten ungerader Ordnung amphicheiral und jeder Rosettenknoten gerader Ordnung nicht amphicheiral ist, eine Lösung des Isotopieproblems für alle Rosettenknoten und ihre spiegelbildlichen Knoten.

Bemerkung 2. Die von TROTTER in [9] als Isotopieinvariante nachgewiesene Knotensignatur wurde von MURASUGI in [6] mit Erfolg für Isotopieuntersuchungen spiegelbildlicher Rosettenknoten verwendet; die Signatur ist eine der wenigen berechenbaren Isotopieinvarianten, die nicht aus der 1-dimensionalen Homotopiegruppe des Knotenaußenraumes abgeleitet werden können. Für die Lösung des Isotopieproblems der Rosettenknoten reicht jedoch die Kenntnis der Signatur jedes Rosettenknotens nicht aus. Da jeder geschlossene Zopf R_n^m nach [6] ein gewisses Produkt von $n-1$ Torusknoten vom Typ $(2, m)$ ist, bereitet die Berechnung der Signatur $\sigma(R_n^m)$ keine Schwierigkeiten. Die Berechnung ergibt

$$\sigma(R_n^m) = m - 1 \text{ für geradzahliges } n,$$

$$\sigma(R_n^m) = 0 \text{ für ungeradzahliges } n.$$

Daraus kann lediglich gefolgert werden, daß je zwei Rosettenknoten derselben geradzahigen Ordnung R_n^m und $R_n^{m'}$ mit $m \neq m'$ nicht isotop sind.

LITERATUR

- [1] ARTIN, E.: Theorie der Zöpfe. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 4 (1926) 47–72.
- [2] CROWELL, R. H., and R. H. FOX: Introduction to knot theory. Ginn and Company Boston, 1963.
- [3] KRÖTENHEERDT, O.: Über einen speziellen Typ alternierender Knoten. Math. Ann. 153 (1964) 270 bis 284.
- [4] MURASUGI, K.: On alternating knots. Osaka Math. J. 12 (1960) 277–303.
- [5] MURASUGI, K.: On the definition of the knot matrix. Proc. Japan. Acad. 37 (1961) 220–221.
- [6] MURASUGI, K.: Remarks on rosette knots. Math. Ann. 158 (1965) 290–292.

- [7] MURASUGI, K.: On a certain numerical invariant of link types. *Trans. Amer. Math. Soc.* *117* (1965) 387—422.
- [8] REIDEMEISTER, K.: *Knotentheorie*. Springer, Berlin 1932.
- [9] TROTTER, H. F.: Homology of group systems with applications to knot theory. *Ann. Math.* *76* (1962) 464—498.

Manuskripteingang: 25. 9. 1970

VERFASSER:

OTTO KRÖTENHEERDT, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle—
Wittenberg

