

Werk

Titel: Eine Konstruktion von Punktgruppen einer rationalen Involution 3. Ordnung auf ein...

Autor: GÜNTHER, R.H.

Jahr: 1971

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0001 | log8

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Eine Konstruktion von Punktgruppen einer rationalen Involution 3. Ordnung auf einem Kreis und auf einer Geraden

R. HELMUT GÜNTHER

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

Konstruktive Lösungen von Aufgaben der projektiven Geometrie und der klassischen algebraischen Geometrie sind uns in großer Zahl überliefert. Die in dieser kleinen Mitteilung beschriebene Konstruktion von Punktgruppen einer rationalen Involution 3. Ordnung auf einem Kreis und auf einer Geraden war jedoch dem Verfasser bisher nicht bekannt.

Wir stellen unseren Überlegungen einen bekannten Satz voran:

Je zwei äquivalente Gruppen von je m Punkten einer algebraischen Kurve k , die keine gemeinsamen Punkte haben, bestimmen auf k genau eine rationale Involution m -ter Ordnung. (Ist diese Involution selbst eine Vollschar, so ist sie bereits durch eine ihrer Gruppen vollständig bestimmt.)

Da sich die im folgenden beschriebene Konstruktion auf diesen Satz gründet, werden wir wenigstens den nicht in Klammern gesetzten Teil dieses Satzes mit bekannten Mitteln der klassischen algebraischen Geometrie hier nochmals beweisen.

Wir nehmen an, k sei eine ebene algebraische Kurve. A und B seien zwei äquivalente Gruppen von je m Punkten der Kurve k , die keinen Punkt gemeinsam haben. Dann gibt es ein Büschel von Kurven, welches auf k eine solche Involution J der Ordnung m ausschneidet, die die Gruppen A und B enthält. Ein anderes Kurvenbüschel schneide auf k eine Involution J' der Ordnung m aus, welche ebenfalls die Gruppen A und B enthält. Wir werden nun zeigen, daß J' gleich J ist.

Es seien a, b die Kurven des ersten Büschels und a', b' die Kurven des zweiten Büschels, welche die Gruppen A und B auf k ausschneiden. $\alpha a + \beta b$ (α und β sind homogene Parameter) ist die allgemeine Kurve des ersten Büschels und $\gamma a' + \delta b'$ die allgemeine Kurve des zweiten Büschels. P sei ein Punkt von k , der weder zu A noch zu B gehört. Es gibt eine Gruppe G aus J und ebenso eine Gruppe G' aus J' , die den Punkt P enthält. G und G' seien durch die Kurven $\bar{\alpha} a + \bar{\beta} b$ und $\bar{\gamma} a' + \bar{\delta} b'$ auf k ausgeschnitten. Wir denken uns nun a' und b' so mit konstanten Faktoren versehen, daß $\bar{\gamma} = \bar{\alpha}$ und $\bar{\delta} = \bar{\beta}$ gesetzt werden kann. Hiernach bilden wir die Gruppen von J

auf die Gruppen von J' ab, und zwar derart, daß jene Gruppen einander zugeordnet werden, für die $\gamma:\delta = a:\beta$ gilt. Dabei entsprechen die Gruppen A und B je sich selbst, und G wird auf G' abgebildet. Es ist hierdurch auf k eine Korrespondenz mit den Indizes (m, m) erklärt. Da nun die Gruppen von J und ebenso auch die Gruppen von J' trivialerweise jeweils äquivalente Gruppen sind, ist diese Korrespondenz eine Wertigkeitskorrespondenz mit der Wertigkeit Null. Aus dem allgemeinen Korrespondenzprinzip für Wertigkeitskorrespondenzen folgt hiernach, daß die hier vorliegende Korrespondenz genau $2m$ Koinzidenzpunkte hat. Wir können aber sogleich $2m + 1$ Koinzidenzpunkte angeben: die Punkte von A und B und den Punkt P . Demnach hat die Korrespondenz unendlich viele Koinzidenzpunkte. Das bedeutet aber, daß die Gruppen von J mit den Gruppen von J' identisch sind.

Nachdem wir hiermit den für unsere Betrachtungen grundlegenden Satz nochmals bewiesen haben, wenden wir uns insbesondere rationalen Involutionen 3. Ordnung auf einem Kreis zu. Wir wählen auf einem Kreis k zwei Gruppen $A = (A_1, A_2, A_3)$ und $B = (B_1, B_2, B_3)$ ohne gemeinsame Punkte. Da der Kreis eine rationale Kurve ist, sind A und B in jedem Fall äquivalente Gruppen. Es ist bekannt und durch den eingangs bewiesenen Satz verbürgt, daß die durch A und B auf k festgelegte rationale Involution J durch ein Kegelschnittbüschel erzeugt werden kann, von welchem genau ein Trägerpunkt T auf k liegt. Nach dem gleichen Satz darf T auf dem Kreis beliebig gewählt werden.

Wollen wir zu einem beliebigen Punkt C_1 des Kreises k die durch J zugeordneten Punkte C_2, C_3 bestimmen, so wählen wir den Punkt T auf k so, daß die Gruppen A und B sowie die zu konstruierende Gruppe C durch die drei Geradenpaare (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , (c_1, c_2) des betreffenden Kegelschnittbüschels auf dem Kreis k ausgeschnitten werden. In Abb. 1 ist dieser Sachverhalt dargestellt. Die Geraden $A_1A_2 = a_1$ und $B_1B_2 =$

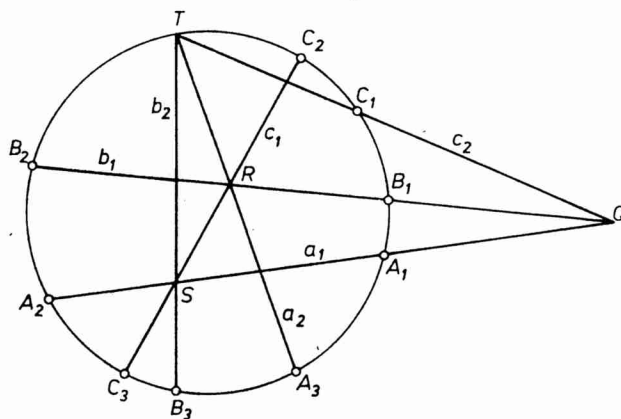


Abb. 1

$= b_1$ schneiden sich in einem Punkt Q . Nachdem wir den Punkt C_1 gewählt haben, verbinden wir diesen durch eine Gerade c_2 mit Q . Der zweite Schnittpunkt von c_2 mit dem Kreis ist der Punkt T . Die Geraden $a_2 = A_3T$ und $b_2 = B_3T$ schneiden b_1 und a_1 in den Punkten R bzw. S . Die Gerade $RS = c_1$ schneidet k in den gesuchten Punkten C_2, C_3 der Gruppe C . (Q, R, S, T sind die Trägerpunkte des Kegelschnittbüschels; R, S, T und damit auch das Kegelschnittbüschel sind mit C_1 beweglich.)

Es folgen nun Anwendungen dieser Konstruktion bei der Lösung bekannter elementarer Aufgaben.

1. Von einem Kegelschnitt seien fünf Punkte X_1, X_2, O, P, Q bekannt. Außerdem sei ein Kreis gegeben, welcher durch X_1 und X_2 hindurchgeht. Es seien die beiden restlichen Schnittpunkte X_3 und X_4 des Kegelschnitts mit dem Kreis zu konstruieren (Abb. 2).

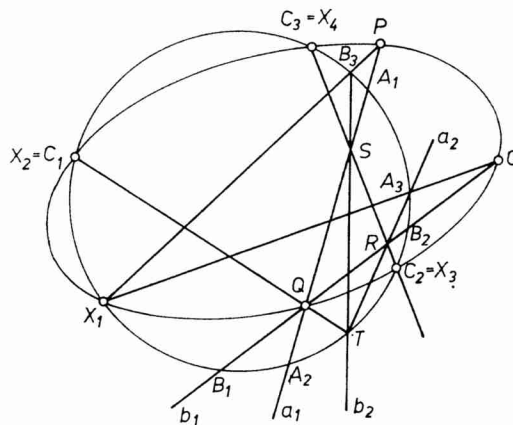


Abb. 2

Zur Lösung dieser Aufgabe betten wir den Kegelschnitt in ein Büschel mit den Trägerpunkten X_1, O, P, Q ein. Das Büschel erzeugt auf dem Kreis eine rationale Involution J 3. Ordnung. Die Geradenpaare X_1O, PQ und X_1P, OQ des Kegelschnittbüschels schneiden auf dem Kreis die Gruppen $A = (A_1, A_2, A_3)$ und $B = (B_1, B_2, B_3)$ der Involution J aus. Die Gruppe von J , welche der gegebene Kegelschnitt erzeugt, enthält den Punkt X_2 . Wir setzen $X_2 = C_1$ und konstruieren nach der angegebenen Methode die zugehörigen Punkte C_2 und C_3 . Diese sind zugleich die gesuchten Punkte X_3 und X_4 .

Möglicherweise ist dies die kürzeste Konstruktion, die man zur Lösung dieser Aufgabe angeben kann.

2. Zwei Dreiseite $a_1a_2a_3$ und $b_1b_2b_3$ in einer Ebene bestimmen ein Büschel von Kurven 3. Ordnung. Außerdem sei ein Punkt P gegeben, welcher auf keinem der beiden Dreiseite liegt. Es seien beliebig viele Punkte der durch P gehenden Kurve c des Büschels zu konstruieren.

Zur Lösung dieser Aufgabe legen wir eine beliebige Gerade g durch P . Die Dreiseite $a_1a_2a_3$ und $b_1b_2b_3$ schneiden auf g die Punktgruppen $A = (A_1, A_2, A_3)$ und $B = (B_1, B_2, B_3)$ aus. Das Büschel von Kurven 3. Ordnung erzeugt auf g jene Involution J , die durch die Gruppen A und B bestimmt ist. Wir bezeichnen nun den Punkt P mit C_1 und suchen diejenigen Punkte C_2, C_3 , die mit C_1 in einer Gruppe C von J liegen. (C_2, C_3 sind Punkte der Kurve c .)

Hierzu projizieren wir die Gerade g stereographisch auf einen beliebigen Kreis. Die Punktgruppen A' und B' , welche man als Bilder von A und B auf dem Kreis erhält, bestimmen auf diesem wiederum eine Involution J' . Mit Hilfe der hergeleiteten Konstruktion können wir nun zu dem stereographischen Bild C_1' von C_1

die durch J' zugeordneten Punkte C_2' und C_3' finden. Anschließend projizieren wir die Punkte C_2' und C_3' zurück auf die Gerade g und erhalten die Punkte C_2 und C_3 der Kurve c . Legen wir nun eine andere Gerade durch P und wiederholen wir in bezug auf diese Gerade die beschriebene Konstruktion, so erhalten wir abermals Punkte der Kurve c .

Manuskripteingang: 1. 9. 1970

VERFASSEN

R. HELMUT GÜNTHER, Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden