Über Schreiersche Erweiterungen von universalen Algebren I

Renate Kummer

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

§ 1. Problemstellung

Im Jahre 1926 löste O. Schreier [12] das folgende Problem: Für beliebig vorgegebene Gruppen A und S sind sämtliche Gruppen E zu beschreiben, die einen zu A isomorphen Normalteiler A_0 enthalten, so daß die Faktorgruppe E/A_0 zu S isomorph ist. Das entsprechende Problem für Ringe wurde 1942 von J. C. Everett [2] und für Halbmoduln und Halbringe 1952 von L. Rédei [11] behandelt. Inzwischen wurde dieses Problem auch für andere wichtige algebraische Strukturen untersucht (z. B. in [1, 3, 4, 5, 6, 7, 15]).

Wir wollen in dieser Arbeit das analoge Problem für universale Algebren betrachten.

Es bezeichne Ω eine Menge von endlichstelligen Operationen ($\Omega = \bigcup \Omega^{(n)}$; $\Omega^{(n)}$ eine Menge von n-ären Operationen ω; $n \geqq 0$), I eine Menge von Identitäten und $\mathcal{K}$ oder $\mathcal{K}(\Omega, I)$ die primitive Klasse der universalen Algebren mit dem Operationensystem Ω und der Identitätenmenge I [8]. Die den Algebren aus $\mathcal{K}$ zugrunde liegenden Mengen seien aus einem Universum $\mathfrak{U}$ (vgl. z. B. [13]), das für unsere Betrachtungen hinreichend groß gewählt sei. Wir bezeichnen eine Algebra und ihre Grundmenge mit denselben Buchstaben. Sind A, $E \in \mathcal{K}$ gegeben und ist A eine Unteralgebra von E, so schreiben wir kurz $A \leqq E$. Ist A Kongruenzklasse bei einer Kongruenz auf E, so heißt A normal [10], und wir schreiben $A \trianglelefteq E$.

Es seien A und S beliebige Algebren aus der primitiven Klasse $\mathcal{K}$. Gesucht ist eine Beschreibung sämtlicher Algebren E aus $\mathcal{K}$, die eine zu A isomorphe normale Unteralgebra A_0 enthalten, in Zeichen $A_0 \trianglelefteq E$, so daß (mindestens) eine Faktoralgebra von E nach A_0 zu S isomorph ist. (Es wird im allgemeinen auch Faktoralgebren von E nach A_0 geben, die nicht zu S isomorph sind.) Offenbar muß die Algebra S mindestens eine einelementige Unteralgebra $\{i\}$ enthalten, und zwar das Bild von A_0. Im Spezialfall der additiven Gruppen, Ringe oder Multioperationsgruppen bezeichnet i das Nullelement von S, im Fall der Halbgruppen oder Quasigruppen kann i ein beliebiges idempotentes Element von S, im Fall der Verbände ein beliebiges Element des Verbandes S sein.

In § 2 geben wir neben den notwendigen Vorbereitungen die Definitionen für eine Schreiersche Erweiterung, eine stark Schreiersche Erweiterung und eine ω^*-reguläre Schreiersche Erweiterung von A durch S bezüglich der einelementigen Unteralgebra $\{i\} \leqq S$ in $\mathcal{K}$ an. Es zeigt sich, daß jede Schreiersche Erweiterung auch als spezielle stark Schreiersche Erweiterung betrachtet werden kann (vgl. Satz 1 und Folgerung 1). Die ω^*-regulären Schreierschen Erweiterungen werden erst im Teil II dieser Arbeit untersucht.

In § 3 stellen wir fest, daß die Schreierschen Erweiterungen in der primitiven Klasse $\mathcal{K}$ eine Kategorie bilden. Hier wird auch die Äquivalenz von Schreierschen Erweiterungen definiert. Bei festem A und S bezeichnet $\mathrm{Ext}_i(S, A)$ die Menge der Äquivalenzklassen der Schreierschen Erweiterungen von A durch S bezüglich $\{i\} \leqq S$ (falls dies eine Menge ist). $\mathrm{Ext}_i\,(S, A)$ ist ein kontravarianter Funktor, der die Kategorie $\mathcal{K}_i$ der Algebren S aus $\mathcal{K}$, die die einelementige Unteralgebra $\{i\}$ enthalten, in die Kategorie $\mathcal{E}ns$ der Mengen abbildet.

In § 4 folgt eine allgemeine Beschreibung der möglichen Schreierschen Erweiterungen von A durch S (in der primitiven Klasse $\mathcal{K}$). Auch die äquivalenten Schreierschen Erweiterungen werden charakterisiert. Die Kenntnis eines vollen Repräsentantensystems für die Äquivalenzklassen aus $\mathrm{Ext}_i\,(S, A)$ hat für jede primitive Klasse $\mathcal{K}$ eine große Bedeutung. Es wird kurz auf die Schreierschen i-Erweiterungen von Halbgruppen und die der Verbände eingegangen.

Die Verfasserin dankt Herrn Professor O.-H. KELLER für die von ihm erhaltene Grundausbildung sowie Herrn Professor A. KERTÉSZ für die zahlreichen Anregungen und Hinweise zu dieser Arbeit sehr herzlich.

§ 2. Kongruenzen und exakte Sequenzen

Wir betrachten Algebren aus der primitiven Klasse $\mathcal{K}$. Es sei $E \in \mathcal{K}$. Jede Kongruenz ϱ auf der Algebra E induziert eine kompatible Klasseneinteilung von E in ϱ-Klassen — $\varrho[x]$ bzw. $\bar{x}$ bezeichnet die Klasse, die das Element x enthält —

$$\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow (x, y) \in \varrho \qquad \forall x, y \in E,$$

und weiter induziert ϱ mit

$$\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \omega = \overline{x_1 \cdots x_n \omega} \quad \forall\, \omega \in \Omega, \ \forall x_1, \ldots, x_n \in E$$

eine Faktoralgebra $\bar{E} = E/\varrho$ von E. Der kanonische Epimorphismus $x \to \bar{x}$ von E auf die Faktoralgebra E/ϱ wird mit kan ϱ bezeichnet.

Ein Epimorphismus π einer Algebra E aus $\mathcal{K}$ auf eine Algebra S, die eine einelementige Unteralgebra $\{i\}$ enthält, induziert in E eine Kongruenz $\pi^\sharp$ mit

$$(x, y) \in \pi^\sharp \Leftrightarrow x\pi = y\pi \qquad \forall\, x,\ y \in E$$

und eine kompatible Klasseneinteilung $\bar{E}$ mit

$$\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x\pi = y\pi \qquad \forall x, y \in E.$$

Die Faktoralgebra $\bar{E} = E/\pi^\sharp$ von E ist vermöge der Abbildung

$$\pi^\flat : \bar{x} \mapsto x\pi \qquad \forall \bar{x} \in E/\pi^\sharp$$

mit dem homomorphen Bild $\operatorname{im} \pi = S$ von E isomorph, so daß $\operatorname{kan} \pi^{\sharp} \circ \pi^{\flat} = \pi$ und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\text{kan}"'] & & S \\ & E/\pi^{\sharp} \arrow[ur, "\pi^{\flat}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Die Klasse A derjenigen Elemente von E, welche bei dem Epimorphismus π auf das Element $i \in S$ abgebildet werden, wird als *i-Kern von π*, kurz als $i\text{-}\ker \pi$ bezeichnet. Der i-Kern A des Epimorphismus π ist eine Unteralgebra von E, welche Klasse einer kompatiblen Klasseneinteilung von E ist und nach Łoš [10] eine *normale Unteralgebra* genannt wird, in Zeichen: $A \trianglelefteq E$.

Eine Kongruenz ϱ auf der Algebra E, bei der eine Klasse A der induzierten kompatiblen Klasseneinteilung $\bar{E} = E/\varrho$ eine Unteralgebra, d. h. eine normale Unteralgebra von E bildet, heißt *A-Kongruenz*.
Eine Unteralgebra A von E ist nach Łoš genau dann normal, wenn für jedes Wort $w(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ einer freien Algebra aus $\mathcal{K}$

$$\big((\mathfrak{a} \subseteq A) \wedge \big(w(\mathfrak{a}, \mathfrak{e}) \in A \quad \forall \mathfrak{e} \subseteq E\big)\big) \to \big(w(\mathfrak{a}', \mathfrak{e}) \in A \quad \forall \mathfrak{a}' \subseteq A, \quad \mathfrak{e} \subseteq E\big)$$

gilt. In der primitiven Klasse der Gruppen bedeutet dies für die normale Untergruppe A von E

$$(e^{-1} 1 e = 1 \in A \quad \forall e \in E) \Rightarrow (e^{-1} A e \subseteq A \quad \forall e \in E),$$

d. h., A ist Normalteiler der Gruppe E. In der primitiven Klasse $\mathcal{H}$ der Halbgruppen gilt für ein beliebiges Element $a \in A$ der normalen Unterhalbgruppe A von E

$$aE \subseteq A \Rightarrow AE \subseteq A; \quad Ea \subseteq A \Rightarrow EA \subseteq A; \quad EaE \subseteq A \Rightarrow EAE \subseteq A.$$

In der primitiven Klasse V der Verbände folgt für ein beliebiges Element $a \in A$ des normalen Unterverbandes A von E

$$\big((a \wedge e_1) \vee e_2\big) \wedge \cdots \substack{\vee \\ \wedge}\, e_n \in A \Rightarrow \big((A \wedge e_1) \vee e_2\big) \wedge \cdots \substack{\vee \\ \wedge}\, e_n \subseteq A;$$

$$\big((a \vee e_1) \wedge e_2\big) \vee \cdots \substack{\vee \\ \wedge}\, e_n \in A \Rightarrow \big((A \vee e_1) \wedge e_2\big) \vee \cdots \substack{\vee \\ \wedge}\, e_n \subseteq A.$$

Insbesondere folgt aus $(a \vee E) \wedge a = \{a\}$ die Relation $(A \vee E) \wedge A \subseteq A$, und der normale Unterverband A ist konvex.

Es seien wieder A und E Algebren aus der beliebigen primitiven Klasse $\mathcal{K}$. Zu jeder normalen Unteralgebra A von E gehört ein vollständiger Verband $C(A)$ von A-Kongruenzen auf E. Dieser Verband besitzt ein kleinstes und ein größtes Element. Das kleinste Element ist die durch A induzierte Kongruenz $\mu(A)$; die zugehörige Faktoralgebra $E/\mu(A)$ wird kurz mit E/A bezeichnet. Das größte Element in $C(A)$ ist die Kongruenz

$$\nu(A) = \{(x, y) \in E \times E \mid \forall w(\mathfrak{x}), \quad \forall e_1, \ldots, e_n \in E:$$
$$w(e_1, \ldots, e_n, x) \in A \Leftrightarrow w(e_1, \ldots, e_n, y) \in A\}.$$

In der primitiven Klasse $\mathcal{H}$ der Halbgruppen ist die größte Kongruenz auf E, bei der die normale Unterhalbgruppe A eine Kongruenzklasse bildet, die Kongruenz

$$\nu(A) = \{(x, y) \in E \times E \mid \forall e, e' \in E : (x \in A \Leftrightarrow y \in A) \wedge (ex \in A \Leftrightarrow ey \in A) \wedge (xe \in A \Leftrightarrow ye \in A) \wedge (exe' \in A \Leftrightarrow eye' \in A).$$

Dann folgt für die primitive Klasse $\mathcal{D}$ der distributiven Verbände: Die größte Kongruenz des Verbandes E, bei der der normale konvexe Unterverband A eine einzige Kongruenzklasse bildet, ist die Kongruenz

$$\nu(A) = \{(x, y) \in E \times E \mid \forall e, e' \in E : (x \wedge e) \vee e' \in A \Leftrightarrow (y \wedge e) \vee e' \in A\}.$$

Es seien wiederum A und E Algebren aus einer beliebigen primitiven Klasse $\mathcal{K}$. Ist ϱ eine beliebige A-Kongruenz auf E, so gibt es natürliche Epimorphismen α und β, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \xrightarrow{1_A} & E & \xrightarrow{\text{kan}} & E/A & \longrightarrow & \{\bar{A}\} \\
\| & & \| & & \downarrow \alpha & & \\
A & \xrightarrow{1_A} & E & \xrightarrow{\text{kan}} & E/\varrho & \longrightarrow & \{\bar{A}\} \\
\| & & \| & & \downarrow \beta & & \\
A & \xrightarrow{1_A} & E & \xrightarrow{\text{kan}} & E(\nu/A) & \longrightarrow & \{\bar{A}\}
\end{array}$$

kommutativ ist, wobei notwendig

$$\alpha = \mu^{\varrho} : \mu[x] \mapsto \varrho[x] \qquad \forall x \in E,$$
$$\beta = \varrho^{\nu} : \varrho[x] \mapsto \nu[x] \qquad \forall x \in E$$

gilt. Wie wir sehen werden, sind die drei Reihen in dem Diagramm exakte Folgen.

In der primitiven Klasse der Gruppen, Ringe, Multioperatorgruppen, Quasigruppen, Loops oder ähnlicher algebraischer Strukturen gilt stets $\mu(A) = \nu(A)$, d. h., jeder Kongruenzverband $C(A)$ besteht nur aus einem Element, der durch die normale Unteralgebra A in der Algebra E induzierten Kongruenz. In der primitiven Klasse

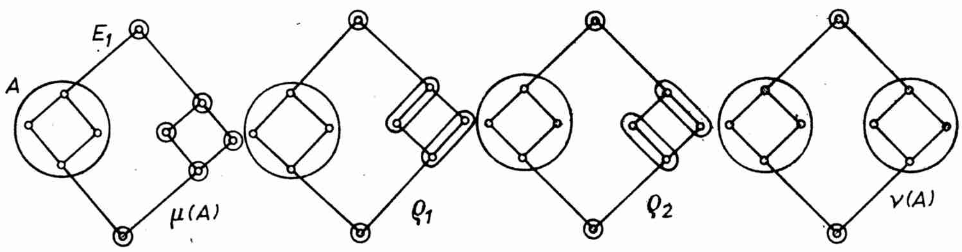

Abb. 1

der Halbgruppen oder Verbände jedoch besteht $C(A)$ im allgemeinen aus mehreren Elementen, wie das Beispiel des Verbandes E_1 mit dem Unterverband A zeigt, wo $C(A)$ zu A isomorph ist (siehe Abb. 1). Jedoch auch bei Verbänden kann $C(A)$ nur aus einem Element bestehen, z. B. bei E und A in Abb. 2.

Eine Folge von Algebren $A_j \in \mathcal{K}$ und Homomorphismen α_j

$$A_0 \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_k} A_k \quad (k \geqq 2)$$

heißt *exakt*, wenn

1. das homomorphe Bild $\operatorname{im}\alpha_j = A_{j-1}\alpha_j$ eine normale Unteralgebra von A_j bildet und
2. $\operatorname{im}\alpha_j$ eine Klasse der durch α_{j+1} auf der Algebra A_j induzierten kompatiblen Klasseneinteilung ist $(j = 1, \ldots, k - 1)$.

Dabei kann die durch die normale Unteralgebra $\operatorname{im}\alpha_j$ in A_j induzierte kompatible Klasseneinteilung von der durch den Homomorphismus α_{j+1} induzierten verschiedensein, aber eine wohlbestimmte Faktoralgebra von A_j nach $\operatorname{im}\alpha_j$ ist zu dem homomorphen Bild $\operatorname{im}\alpha_{j-1}$ isomorph. — Die Unteralgebra $\operatorname{im}\alpha_k$ von A_k braucht nicht normal zu sein.

Die obige Folge ist offenbar dann und nur dann exakt, wenn

1'. jede Algebra A_j eine einelementige Unteralgebra $\{i_j\}$ enthält $(j = 2, \ldots, k)$, so daß

2'. $\operatorname{im}\alpha_j = i_{j+1}\text{-}\ker\alpha_{j+1}$ gilt $(j = 1, \ldots, k - 1)$.

Dieser Begriff ist eine Verallgemeinerung des aus der Theorie der R-Moduln wohlbekannten Begriffes der exakten Folge.

Als Beispiel betrachten wir die in Abb. 1 angegebenen Verbände A und E_1. Bezeichnet π einen Epimorphismus von E_1 auf A, der auf E_1 die Kongruenz $\nu(A)$ induziert, so ist

$$A \xrightarrow{1_A} E_1 \xrightarrow{\pi} A$$

eine exakte Folge.

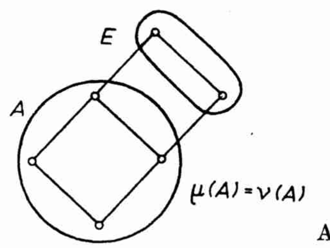

Abb. 2

Eine Folge $E \xrightarrow{\pi} S \to \{i\}$ ist genau dann exakt, wenn π ein Epimorphismus ist. — Ist ι ein Monomorphismus einer Algebra A in E, so schreiben wir $A \rightarrowtail E$.
Eine Folge

$$A \overset{\iota}{\rightarrowtail} E \xrightarrow{\pi} S \longrightarrow \{i\}$$

ist dann und nur dann exakt, wenn π ein Epimorphismus von E auf S ist, der genau das monomorphe Bild $\operatorname{im}\iota$ von A auf eine einelementige Unteralgebra von S abbildet. So existiert zu jedem Epimorphismus π einer Algebra E auf eine Algebra S, die eine einelementige Unteralgebra $\{i\}$ enthält, eine exakte Folge

$$i\text{-}\ker\pi \overset{\iota}{\rightarrowtail} E \xrightarrow{\pi} S \longrightarrow \{i\},$$

wobei ι die identische Abbildung bezeichnet.

Definition 1. Eine Algebra E aus der primitiven Klasse $\mathcal{K}$ heißt eine *Schreiersche Erweiterung von A durch S bezüglich der einelementigen Unteralgebra $\{i\}$ von S*, kurz eine *i-Erweiterung von A durch S*, wenn in $\mathcal{K}$ eine exakte Folge

$$A \overset{\iota}{\rightarrowtail} E \xrightarrow{\pi} S \longrightarrow \{i\}$$

existiert, so daß $A\,\iota\,\pi = \{i\} \leqq S$ gilt. Die Schreiersche Erweiterung wird durch das Tripel (E, ι, π) angegeben.

Offenbar existiert in jeder primitiven Klasse $\mathcal{K}$ zu jedem Paar S, A von Algebren, sobald S eine einelementige Unteralgebra $\{i\}$ enthält, mindestens eine Schreiersche i-Erweiterung von A durch S, das direkte Produkt $S \otimes A$ mit der exakten Folge

$$A \overset{\iota}{\rightarrowtail} S \otimes A \xrightarrow{\pi} S \longrightarrow \{i\},$$

wobei $\iota : a \mapsto (i, a)$ $\forall a \in A$ und $\pi : (s, a) \mapsto s$ $\forall (s, a) \in S \otimes A$ ist.

Es sei (E, ι, π) eine beliebige Schreiersche Erweiterung von A durch S in K. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\iota"] & E \arrow[r, "\pi"] & S \arrow[r] & \{i\} \\
A\,\iota \arrow[u, two heads, "\iota^{-1}"] \arrow[r, tail, "1_{A\iota}"] & E \arrow[u, equal] \arrow[r, "\text{kan}"] & E/\pi^{\#} \arrow[u, two heads, "\pi"'] \arrow[r] & \{\overline{A\,\iota}\},
\end{tikzcd}$$

so daß die Algebra E auch als Schreiersche Erweiterung der Unteralgebra $A\,\iota$ durch eine zu S isomorphe Faktoralgebra von E aufgefaßt werden kann. Also ist die Algebra E eine Schreiersche Erweiterung von A' durch S' bezüglich $\{i'\} \leqq S'$, wenn A' zu A und S' zu S (mit $i' \leftrightarrow i$) isomorph sind.

In den primitiven Klassen der additiven Gruppen, Ringe oder Multioperatorgruppen stimmen die 0-Erweiterungen von A durch S mit den bekannten Schreierschen bzw. Everettschen Erweiterungen überein. Hier ist jede exakte Folge sogar stark exakt im folgenden Sinne: Eine exakte Folge von Algebren A_j aus $\mathcal{K}$ und Homomorphismen α_j

$$A_0 \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_k} A_k \qquad (k \geqq 2)$$

heißt *stark exakt*, wenn

3. $\mu(\operatorname{im}\alpha_j) = \alpha_{j+1}^{\#}$ gilt, d. h., wenn die durch die normale Unteralgebra $\operatorname{im}\alpha_j$ auf der Algebra A_j induzierte Kongruenz mit der durch den Homomorphismus α_{j+1} induzierten übereinstimmt $(j = 1, \ldots, k-1)$.

Also ist eine Folge von Algebren $A_j \in \mathcal{K}$ $(j = 0, \ldots, k)$ und Homomorphismen α_j: $A_{j-1} \to A_j$ genau dann exakt, wenn jede Algebra A_j mit $j \geqq 2$ eine einelementige Unteralgebra $\{i_j\}$ enthält, so daß

$$\operatorname{im}\alpha_j = i_{j+1}\text{-}\ker\alpha_{j+1} \quad\text{und}\quad A_j/\operatorname{im}\alpha_j \cong \operatorname{im}\alpha_{j+1}$$

für $j = 1, \ldots, k-1$ gilt.

Zum Beispiel ist für die Verbände A und E aus Abb. 2 die Folge

$$A \xrightarrow{1_A} E \xrightarrow{\text{kan}} E/A$$

nicht nur exakt, sondern sogar stark exakt. Dasselbe gilt für jede normale Unteralgebra A einer beliebigen Algebra $E \in \mathcal{K}$, d. h., es ist stets die Folge

$$A \xrightarrow{1_A} E \xrightarrow{\mathrm{kan}} E/A \longrightarrow \{\bar{A}\}$$

stark exakt.

Definition 2. Eine Algebra E aus $\mathcal{K}$ heißt eine *stark Schreiersche Erweiterung der Algebra A durch S bezüglich* $\{i\} \leqq S$, kurz eine *starke i-Erweiterung von A durch S*, wenn es eine stark exakte Folge

$$A \rightarrowtail^{\iota} E \xrightarrow{\pi} S \longrightarrow \{i\}$$

in $\mathcal{K}$ gibt, so daß $A\iota\pi = \{i\} \leqq S$ gilt.

Eine Schreiersche Erweiterung (E, ι, π) ist also genau dann eine stark Schreiersche Erweiterung von A durch S, wenn $E/A\iota \cong S$ gilt.

Das direkte Produkt $S \otimes A$ ist zwar stets eine i-Erweiterung von A durch S, aber, z. B. bei Verbänden, im allgemeinen keine stark Schreiersche Erweiterung. Jedoch in der primitiven Klasse der Gruppen, Ringe, Multioperatorgruppen, Quasigruppen bzw. Loops ist jede exakte Folge auch stark exakt und folglich jede Schreiersche Erweiterung eine stark Schreiersche Erweiterung. Dort ist jede Kongruenzklasse der durch π auf E induzierten kompatiblen Klasseneinteilung $E/\pi^{\#}$ eine Nebenklasse von $A\iota$. Dies soll im folgenden verallgemeinert werden.

Definition 3. Es bezeichne ω^* eine $(n+1)$-äre Operation aus Ω $(n \geqq 1)$. Eine Schreiersche Erweiterung $(E, 1_A, \pi)$ von A durch S bezüglich $\{i\}$ heißt *ω^*-regulär*, wenn sie stark ist und wenn jede Kongruenzklasse bei der durch A bzw. π auf E induzierten Kongruenz eine Darstellung

$$e_1 \cdots e_n A\omega^* = \{e_1 \cdots e_n a\omega^* \mid a \in A\}$$

besitzt, wobei $e_1, \ldots, e_n$ Elemente aus E sind und die Darstellung der Elemente der Klasse im folgenden Sinne eindeutig ist:

$$e_1 \cdots e_n a_1 \omega^* = e_1 \cdots e_n a_2 \omega^* \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ in } A.$$

Die Tatsache, daß in der Definition die $(n+1)$-te Stelle ausgezeichnet ist, bedeutet offensichtlich keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit.

In den primitiven Klassen der additiven Gruppen, Ringe oder Multioperatorgruppen ist jede Schreiersche Erweiterung $+$-regulär. In der primitiven Klasse der Quasigruppen ist sowohl jede Stelle bei der Multiplikation als auch jede Stelle bei der Linksdivision $\setminus$ sowie bei der Rechtsdivision $/$ geeignet, d. h., jede Schreiersche Erweiterung ist $\cdot$-regulär, $\setminus$-regulär und $/$-regulär. — Nähere Untersuchungen über ω^*-reguläre Schreiersche Erweiterungen universaler Algebren wird der zweite Teil dieser Arbeit enthalten.

Wir wenden uns wieder beliebigen Schreierschen Erweiterungen zu. Es sei $(E, 1_A, \pi)$ eine Schreiersche Erweiterung von A durch S bezüglich $\{i\}$ in $\mathcal{K}$. Dann existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "1_A"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] & S \arrow[r] & \{i\} \\
A \arrow[r, tail, "1_A"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\text{kan}"] \arrow[d, equal] & E/\pi^{\sharp} \arrow[r] \arrow[u, tail, "\alpha"'] & \{\bar{A}\} \\
A \arrow[r, tail, "1_A"] & E \arrow[r, "\text{kan}"] & E/A \arrow[r] \arrow[u, "\beta"'] & \{\bar{A}\}
\end{tikzcd} \quad \text{mit } \alpha = \pi^{\flat} \text{ und } \beta = \mu^{\pi^{\sharp}}$$

in dem sämtliche Reihen exakte Folgen sind. Die dritte Reihe ist sogar stark exakt; also stellt die Algebra E eine stark Schreiersche Erweiterung von A durch E/A dar. Auch die Folge

$$\{\bar{A}\} \overset{1_A}{\rightarrowtail} E/A \xrightarrow{\gamma} S \longrightarrow \{i\} \quad \text{mit } \gamma = \alpha \circ \beta$$

ist exakt, und folglich ist die Faktoralgebra E/A eine Schreiersche Erweiterung der einelementigen Algebra $\{\bar{A}\}$ durch die Algebra S bezüglich $\{i\} \leqq S$. Es gilt

Satz 1. *Jede Schreiersche i-Erweiterung von A durch S ist eine stark Schreiersche i_0-Erweiterung von A durch eine Algebra S_0, die selbst eine Schreiersche i-Erweiterung ihrer einelementigen Unteralgebra $\{i_0\}$ durch S ist.*

Es bezeichnet $\mathcal{M}on$ die primitive Klasse der Monoide, d. h. der Halbgruppen mit Einselement 1. In $\mathcal{M}on$ ist jede Schreiersche Erweiterung eine 1-Erweiterung, da $\{1\}$ die einzige einelementige Unterstruktur eines Monoids ist. Für diese primitive Klasse gilt die

Folgerung 1. *Jede Schreiersche Erweiterung E eines Monoids A durch eine Gruppe S in $\mathcal{M}on$ ist eine stark Schreiersche Erweiterung von A durch S in $\mathcal{M}on$.*

Beweis. Nach Satz 1 ist E eine stark Schreiersche Erweiterung von A durch ein Monoid S_0. Dieses Monoid S_0 läßt sich auf die Gruppe S epimorph abbilden vermöge eines Epimorphismus π_0, so daß 1-Ker $\pi_0 = \{1\}$ ist. Dann gibt es zu jedem Element $x \in S_0$ ein Element $x^* \in S_0$, so daß $x^* x = 1$ ist. Folglich ist S_0 auch eine Gruppe, woraus sich wegen 1-Ker $\pi_0 = \{1\}$ ergibt, daß π_0 ein Isomorphismus von S_0 auf S ist. Auf diese Weise erhalten wir auch die Aussage des folgenden Satzes.

Folgerung 2. *Es sei E ein Monoid. Jedes Untermonoid von E, das 1-Kern bei einem Epimorphismus von E auf eine Gruppe ist, ist Kongruenzklasse bei einer und nur einer Kongruenz auf E.*

Wie das Beispiel von S. LJAPIN ([9], Seite 382) zeigt, ist die entsprechende Aussage für Gruppoide mit Einselement, die keine Monoide sind, im allgemeinen nicht richtig.

Als Folgerung aus Satz 1 ergibt sich natürlich auch der Satz 2.2 aus [14], der die Anregung zur Formulierung des obigen Satzes gab.

§ 3. Die Kategorie der Schreierschen Erweiterungen in einer primitiven Klasse

Es bezeichne $\mathcal{K}$ eine primitive Klasse von universalen Algebren. Ebenso wie in der Theorie der R-Moduln folgt, daß die Schreierschen Erweiterungen in $\mathcal{K}$ eine Kategorie bilden; Objekte sind die exakten Sequenzen

$$(E, \iota, \pi)\colon \ A \overset{\iota}{\rightarrowtail} E \xrightarrow{\pi} S \longrightarrow \{i\}$$

von Algebren A, E und S aus $\mathcal{K}$ mit $A\iota\pi = \{i\}$, und Morphismen sind die Tripel $(\alpha, \varphi, \sigma)$ von Homomorphismen, für welche die Diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} A & \overset{\iota}{\rightarrowtail} & E & \overset{\pi}{\longrightarrow} & S & \longrightarrow & \{i\} \\ \uparrow \alpha & & \uparrow \varphi & & \uparrow \sigma & & \\ A' & \overset{\iota'}{\rightarrowtail} & E' & \overset{\pi'}{\longrightarrow} & S' & \longrightarrow & \{i'\} \end{array}$$

jeweils kommutativ sind. Diese Kategorie wird mit $\mathcal{E}$ bezeichnet.

Definition 4. Die Schreierschen i-Erweiterungen (E, ι, π) und (E', ι', π') von A durch S heißen *assoziiert*, in Zeichen $E \equiv E'$, wenn es einen Morphismus $(1_A, \varepsilon, 1_S)$: $(E', \iota, \pi') \to (E, \iota, \pi)$ in Mor $\mathcal{E}$ gibt, wobei ε ein Isomorphismus von E' auf E ist.

Offensichtlich ist $\equiv$ eine Äquivalenzrelation in $\mathcal{E}$. Jede Schreiersche Erweiterung (E, ι, π) ist zu einer Schreierschen Erweiterung $(E_0, 1_A, \pi_0)$ äquivalent, die A als normale Unteralgebra enthält; dabei geht E_0 aus E durch Identifizieren der Elemente $a\iota \in E$ mit den entsprechenden Elementen $a \in A$ hervor, und es ist $\pi_0 = \operatorname{kan} \pi^{\sharp} \circ \pi^{\flat}$ (vgl. § 2). Auch die folgende Relation ist offenbar eine Äquivalenzrelation.

Definition 5. Die Schreierschen i-Erweiterungen (E, ι, π) und (E', ι', π') von A durch S heißen *äquivalent*, wenn $\mathcal{E}$ es in Morphismen

$$(1_A, \varphi, 1_S): (E', \iota', \pi') \to (E, \iota, \pi)$$

und

$$(1_A, \psi, 1_S): (E, \iota, \pi) \to (E', \iota', \pi')$$

gibt.

Je zwei assoziierte Erweiterungen sind auch äquivalent, aber nicht umgekehrt.
Sind A und S Algebren aus $\mathcal{K}$, so bildet die Gesamtheit der Schreierschen Erweiterungen von A durch S bezüglich $\{i\} \leqq S$ mit den zugehörigen Morphismen eine volle Unterkategorie $\mathcal{E}_i(A, S)$ von $\mathcal{E}$. Die Menge der Klassen äquivalenter Schreierscher Erweiterungen aus $\mathcal{E}_i(A, S)$ wird mit $\operatorname{Ext}_i(A, S)$ bezeichnet. Wir zeigen, daß $\operatorname{Ext}_i(A, S)$ ein kontravarianter Funktor der Kategorie der Algebren S mit einelementiger Unteralgebra $\{i\}$ in die Kategorie $\mathcal{E}_{ns}$ der Mengen ist.

Es bezeichne $\mathcal{K}_i$ die Kategorie, deren Objekte diejenigen Algebren aus $\mathcal{K}$ sind, welche die einelementige Algebra $\{i\}$ umfassen, und deren Morphismen diejenigen Homomorphismen σ: $S' \to S$ mit S', $S \in |\mathcal{K}_i|$ sind, welche die einelementige Unteralgebra $\{i\} \leqq S'$ auf die einelementige Unteralgebra $\{i\} \leqq S$ abbilden.

Es sei A eine beliebige Algebra aus der primitiven Klasse $\mathcal{K}$. Es bezeichne $\mathcal{E}(A, \mathcal{K}_i)$ die volle Unterkategorie von $\mathcal{E}$, deren Objekte die i-Erweiterungen von A durch S mit $S \in |\mathcal{K}_i|$ sind, und $\operatorname{Ext}(A, \mathcal{K}_i)$ die Gesamtheit der Klassen äquivalenter Schreierscher Erweiterungen aus $\mathcal{E}(A, \mathcal{K}_i)$. Zu jedem $S \in |\mathcal{K}_i|$ gehört eine Menge $\operatorname{Ext}_i(A, S) \subset \operatorname{Ext}(A, \mathcal{K}_i)$ von Äquivalenzklassen.

Lemma 1. *Es sei* $A \in \mathcal{K}$ *und* S', $S \in |\mathcal{K}_i|$. *Zu jeder Schreierschen Erweiterung* $(E, \iota, \pi) \in \mathcal{E}_i(A, S)$ *und zu jedem Homomorphismus* σ ($\in$ Mor $\mathcal{K}_i$) *von* S' *in* S *gibt es eine Schreiersche Erweiterung* $(E_\sigma, \iota_\sigma, \pi_\sigma) \in \mathcal{E}_i(A, S')$ *und einen Morphismus*

$(1_A, \varphi_\sigma, \sigma) \in \operatorname{Mor} \mathscr{E}$, *so daß das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccc} A & \overset{\iota}{\rightarrowtail} & E & \overset{\pi}{\longrightarrow} & S & \longrightarrow & \{i\} \\ \| & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_\sigma} & & \uparrow{\scriptstyle \sigma} & & \\ A & \overset{\iota_\sigma}{\rightarrowtail} & E_\sigma & \overset{\pi_\sigma}{\longrightarrow} & S' & \longrightarrow & \{i\} \end{array}$$

kommutativ ist.

Beweis. Es bezeichne E_σ die aus den Elementen (s', e) mit $s'\sigma = e\pi$ $(s' \in S'$, $e \in E)$ bestehende Unteralgebra des direkten Produktes $S' \otimes E$. (Im Fall $S' = S$ und $\sigma = 1_S$ besteht E_σ aus den Elementen (s, e) mit $s = e\pi$ und ist folglich zu E isomorph.) Die Abbildungen

$$\iota_\sigma\colon\ a \mapsto (i, a) \quad \forall a \in A \quad \text{und} \quad \pi_\sigma\colon\ (s', e) \mapsto s' \quad \forall (s', e) \in E_\sigma)$$

bestätigen, daß $(E_\sigma, \iota_\sigma, \pi_\sigma)$ eine Schreiersche Erweiterung von A durch S' bezüglich $\{i\}$ ist. Die natürliche Abbildung

$$\varphi_\sigma\colon\ (s', e) \mapsto e \qquad \forall (s', e) \in E_\sigma$$

von E_σ in E (auf E, falls σ ein Epimorphismus von S' auf S ist) ergibt offensichtlich einen Morphismus

$$(1_A, \varphi_\sigma, \sigma)\colon\ (E_\sigma, \iota_\sigma, \pi_\sigma) \mapsto (E, \iota, \pi).$$

Ist die i-Erweiterung (E^*, ι^*, π^*) von A durch S zu (E, ι, π) äquivalent, so ist auch die entsprechende Erweiterung $(E^*_\sigma, \iota^*_\sigma, \pi^*_\sigma)$ von A durch S' zu $(E_\sigma, \iota_\sigma, \pi_\sigma)$ äquivalent.

Auf Grund dieser Überlegungen folgt, daß die Zuordnung

$$S \to \operatorname{Ext}_i(A, S) \qquad \forall S \in |\mathscr{K}_i|,$$

$$\big(\sigma\colon S' \to S\big) \to \operatorname{Ext}_i(A, S) \xrightarrow{[\sigma]} \operatorname{Ext}_i(A, S')\big) \quad \forall \quad \sigma \in \operatorname{Mor} \mathscr{K}_i$$

mit $[\sigma_\sigma]$: $(E, \iota, \pi) \mapsto (E_\sigma, \iota_\sigma, \pi_\sigma) \quad \forall (E, \iota, \pi) \in \mathscr{E}_i(A, S)$

ein kontravarianter Funktor von $\mathscr{K}_i$ in die Kategorie $\mathscr{E}ns$ der Mengen ist.

Satz 2. *Es bezeichne A eine beliebige Algebra aus der primitiven Klasse $\mathscr{K}$. Dann ist* $\operatorname{Ext}_i(A, S)$ *ein kontravarianter Funktor der Kategorie $\mathscr{K}_i$ der Algebren S mit einelementiger Unteralgebra $\{i\}$ in die Kategorie $\mathscr{E}ns$ der Mengen.*

Aus unseren obigen Überlegungen ergibt sich insbesondere auch der folgende Satz.

Satz 3. *Ist A eine beliebige Algebra aus $\mathscr{K}$ und die Algebra $S\,(\in |\mathscr{K}_i|)$ ein homomorphes Bild der Algebra S' $(\in |\mathscr{K}_i|)$ bei einem Epimorphismus σ, dann ist jede Schreiersche i-Erweiterung (E, ι, π) von A durch S ein morphes Bild einer Schreierschen i-Erweiterung $(E_\sigma, \iota_\sigma, \pi_\sigma)$ von A durch S', so daß für einen geeigneten Epimorphismus φ_σ das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccc} A & \overset{\iota}{\rightarrowtail} & E & \overset{\pi}{\longrightarrow} & S & \longrightarrow & \{i\} \\ \| & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_\sigma} & & \uparrow{\scriptstyle \sigma} & & \\ A & \overset{\iota_\sigma}{\rightarrowtail} & E_\sigma & \overset{\pi_\sigma}{\longrightarrow} & S' & \longrightarrow & \{i\} \end{array}$$

kommutativ ist.

Im Spezialfall der Gruppen, Multioperatorgruppen oder Quasigruppen sind sogar sämtliche Schreierschen Erweiterungen $(E', \iota', \pi') \in E_i(A, S')$, für die ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\iota"] & E \arrow[r, "\pi"] & S \arrow[r] & \{i\} \\
A \arrow[u, equal] \arrow[r, tail, "\iota'"] & E' \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\pi'"] & S' \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r] & \{i\}
\end{tikzcd}$$

existiert, zueinander assoziiert. Die entsprechende Aussage ist z. B. für Verbände im allgemeinen nicht richtig (siehe Abb. 3; dort ist die Abbildung φ ein Monomorphismus, aber kein Isomorphismus). Es gilt jedoch das folgende

Lemma 2. *Es sei* (E', ι', π') *eine Schreiersche Erweiterung von* A *durch* S' *bezüglich* $\{i\}$. *Unter den Voraussetzungen des Lemmas 1 kann jeder Morphismus* $(1_A, \varphi, \sigma)$: $(E', \iota', \pi') \to (E, \iota, \pi)$ *faktorisiert werden, d. h., es existiert ein Homomorphismus* φ' *von* E' *in* E_σ, *so daß*

$$(1_A, \varphi, \sigma) = (1_A, \varphi', 1_S) \circ (1_A, \varphi_\sigma, \sigma)$$

gilt.

Beweis. Die Abbildung φ': $e' \mapsto (e'\pi', e'\varphi)$ ist ein Homomorphismus von E' in E_σ, denn es gilt $e'\pi'\sigma = e'\varphi\pi \ \forall\, e' \in E'$. Offenbar ist dann das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\iota"] & E \arrow[r, "\pi"] & S \arrow[r] & \{i\} \\
A \arrow[u, equal] \arrow[r, tail, "\iota_\sigma"] & E_\sigma \arrow[u, "\varphi_\sigma"] \arrow[r, "\pi_\sigma"] & S' \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r] & \{i\} \\
A \arrow[u, equal] \arrow[r, tail, "\iota'"] & E' \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\pi'"] & S' \arrow[u, equal] \arrow[r] & \{i\}
\end{tikzcd}$$

kommutativ, q. e. d.

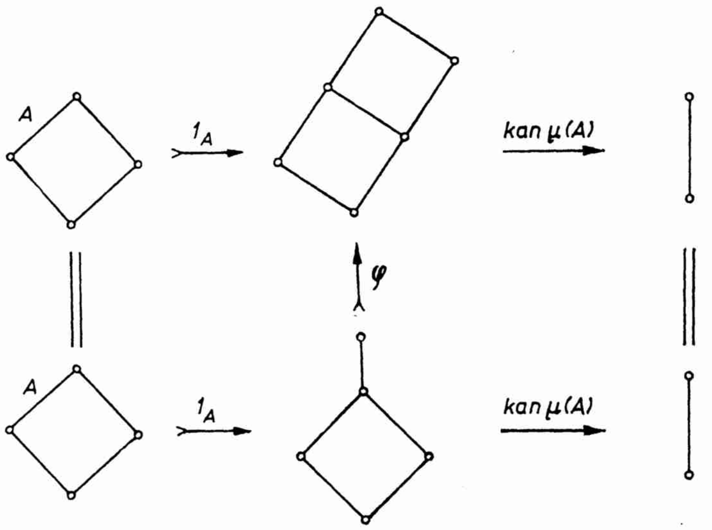

Abb. 3

In der Theorie der R-Moduln wird gezeigt, daß $\mathrm{Ext}_0(A, S)$ bei festem S ein kovarianter Funktor der Kategorie $\mathfrak{K}$ sämtlicher R-Moduln A in die Kategorie $\mathfrak{Ens}$ ist. In welchen primitiven Klassen die analoge Aussage richtig ist, steht noch offen.

§ 4. Eine Beschreibung der Schreierschen Erweiterungen in einer primitiven Klasse

Aus schreibtechnischen Gründen wird in diesem Paragraphen für eine n-äre Operation $\omega \in \Omega$ statt $x_1 \cdots x_n \omega$ häufig $\overset{\omega}{\prod} x_k$ geschrieben.

Es sei A eine beliebige Algebra aus der primitiven Klasse $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\Omega, I)$. $\mathcal{E}ns$ bezeichnet die Kategorie der Mengen (aus dem Universum $\mathfrak{U}$). Wir denken uns zu jeder Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ eine Menge $B(\mathfrak{m})$ mit der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ aus $\mathcal{E}ns$ ausgewählt, insbesondere werde der Kardinalzahl $|A|$ die Grundmenge A der Algebra A zugeordnet.

Es sei (E, ι, π) eine beliebige Schreiersche i-Erweiterung von A durch S in $\mathcal{K}$. Jede Klasse $s(\pi^\flat)^{-1}$ der durch den Epimorphismus π in der Algebra E induzierten Klasseneinteilung besitzt eine wohlbestimmte von Null verschiedenen Mächtigkeit $\mathfrak{m}_s$ $\forall s \in S$. Insbesondere gilt $i(\pi^\flat)^{-1} = i\text{-ker}\,\pi = A$. (Für Gruppen, Ringe, Multioperatorgruppen, Quasigruppen u. ä. gilt stets $\mathfrak{m}_s = |A|$.) Dann gibt es eine eineindeutige Abbildung δ_s von $s(\pi^\flat)^{-1}$ auf die Menge $B_s = B(\mathfrak{m}_s)$. Wir betrachten nun die Menge

$$P = \{[s, b] \mid s \in S,\ b \in B_s\}.$$

Durch die eineindeutige Abbildung

$$\delta\colon\ e \mapsto [s, e\delta_s] \text{ bei } e\pi = s \quad \forall e \in E$$
$$\text{mit } \delta|A\iota\colon\ a\iota \mapsto [i, a] \qquad \forall a \in A$$

wird auf P eine zu E isomorphe Algebra aus $\mathcal{K}$ induziert. Dann induziert der Epimorphismus π einen Epimorphismus

$$\pi_0 = \delta^{-1}\pi\colon\ [s, b] \mapsto s \qquad \forall [s, b] \in P$$

von P auf S, und die Abbildung

$$\iota_0 = \iota\delta\colon\ a \mapsto [i, a] \qquad \forall a \in A$$

ist ein Monomorphismus von A in P.

Eine nulläre Operation $\nu \in \Omega$ zeichnet in P das Element $[i, 0_\nu]$ aus, wobei 0_ν das durch ν in A ausgezeichnete Element ist.

Für eine n-äre Operation $\omega \in \Omega$ $(n \geqq 1)$ gilt

$$\overset{\omega}{\prod} [s_k, b_k] = [s, b] \text{ mit } s = \overset{\omega}{\prod} s_k \in S,$$

da π_0 ein Epimorphismus ist; b ist ein Element aus B_s, das von $b_1, \ldots, b_n$, ω und $s_1, \ldots, s_n$ abhängt; wir schreiben b als Funktion von $b_1, \ldots, b_n$ in der Form

$$b = \overset{\omega}{\underset{s_k}{\prod}} b_k \qquad \forall b_k \in B_{s_k}, \qquad \forall s_k \in S\ (k = 1, \ldots, n).$$

Insbesondere ist

$$\overset{\omega}{\underset{i}{\prod}} a_k = \overset{\omega}{\prod} a_k = a_1 \cdots a_n \omega \text{ in } A \qquad \forall a_k \in A.$$

Diese Algebra P bildet mit dem Monomorphismus ι_0 und dem Epimorphismus π_0 eine zu (E, ι, π) assoziierte Schreiersche i-Erweiterung von A durch S; denn das

Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} A & \overset{\iota_0}{\rightarrowtail} & P & \overset{\pi_0}{\longrightarrow} & S & \longrightarrow & \{i\} \\ \| & & \uparrow\delta & & \uparrow & & \\ A & \overset{\iota}{\rightarrowtail} & E & \overset{\pi}{\longrightarrow} & S & \longrightarrow & \{i\} \end{array}$$

ist kommutativ.

Wird ein anderes System $\delta_s' : s(\pi^\flat)^{-1} \to B_s$ von eineindeutigen Abbildungen gewählt, so ist die auf der Grundmenge P dadurch induzierte Schreiersche i-Erweiterung von A durch S ebenfalls zu (E, ι, π) und damit auch zu der obigen Erweiterung (P, ι_0, π_0) assoziiert. Es sei jetzt $\langle\delta_s\rangle$ fest gewählt.

Die Schreiersche Erweiterung (P, ι_0, π_0) ist durch die Angabe der Algebren A, S, $\{i\} \leqq S$, des Systems $\langle\mathfrak{m}_s\rangle_{s\in S}$ von Kardinalzahlen und des Funktionensystems $\left\langle \overset{\omega}{\underset{s_k}{\Pi}} \right\rangle$ eindeutig bestimmt; deshalb wird sie auch mit $E_i\left(S, A; \langle\mathfrak{m}_s\rangle; \left\langle \overset{\omega}{\underset{s_k}{\Pi}} \right\rangle\right)$ bezeichnet.

Wir suchen nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß bei vorgegebenen Algebren A, S, $\{i\}$ und Kardinalzahlen $\mathfrak{m}_s$ zu den Funktionen $\overset{\omega}{\underset{s_k}{\Pi}}$ in der primitiven Klasse $\mathcal{K}$ eine Algebra und damit eine i-Erweiterung P von A durch S existiert.

Es sei $w(\mathfrak{x}) = w(x_1, \ldots, x_m)$ ein beliebiges Wort der von den Symbolen $x_1, \ldots, x_m$ frei erzeugten Algebra aus $\mathcal{K}$. Dann gilt in der Algebra P

$$w([\mathfrak{s}, \mathfrak{b}]) = w([s_1, b_1], \ldots, [s_m, b_m]) = [s, w^*(\mathfrak{s}; \mathfrak{b})],$$

wobei $s = w(\mathfrak{s}) = w(s_1, \ldots, s_m) \in S$ ist (auf Grund des natürlichen Epimorphismus π_0).

1. Fall. $w(x) = x_j$ mit $1 \leqq j \leqq m$. Dann ist $w([\mathfrak{s}, \mathfrak{b}]) = [s_j, b_j]$ und also

$$w^*(\mathfrak{s}; \mathfrak{b}) = b_j \in B_{s_j}.$$

2. Fall. $w(x) = 0_\nu$, d. h., $w(\mathfrak{x})$ bezeichnet das durch die nulläre Operation $\nu \in \Omega^{(0)}$ ausgezeichnete Element, also in P das Element $[i, 0_\nu]$. Folglich ist

$$w^*(\mathfrak{s}; \mathfrak{b}) = 0_\nu \in A.$$

3. Fall. $w(\mathfrak{x}) = w_1(\mathfrak{x}) \cdots w_n(\mathfrak{x})\,\omega = \overset{\omega}{\Pi} w_k(\mathfrak{x})$, wobei ω eine n-äre Operation aus Ω ist $(n \geqq 1)$. Ist $w_k([\mathfrak{s}, \mathfrak{b}]) = [w_k(\mathfrak{s}), w_k^*(\mathfrak{s}; \mathfrak{b})]$ für $k = 1, \ldots, n$ bereits bekannt, so ist in P

$$w([\mathfrak{s}, \mathfrak{b}]) = \overset{\omega}{\Pi} [w_k(\mathfrak{s}), w_k^*(\mathfrak{s}; \mathfrak{b})] = \left[w(\mathfrak{s}), \overset{\omega}{\underset{w_k(\mathfrak{s})}{\Pi}} (s)\, w_k^*(\mathfrak{s}; \mathfrak{b})\right]$$

und also

$$w^*(\mathfrak{s}; \mathfrak{b}) = \overset{\omega}{\underset{w_k(\mathfrak{s})}{\Pi}} (s)\, w_k^*(\mathfrak{s}; \mathfrak{b}) \in B_{w(\mathfrak{s})}.$$

Wir erhalten durch Anwenden von 1., 2., 3. aus jedem Wort $w(\mathfrak{x})$ eine zusammengesetzte Funktion $w^*(\mathfrak{s}; \mathfrak{b})$ von $\mathfrak{b}$.

Es sei $w(\mathfrak{x}) = v(\mathfrak{x})$ eine Identität aus der Identitätenmenge I. Dann gelten in der Algebra $P \in \mathcal{K}(\Omega, I)$

$$w^*(\mathfrak{s}; \mathfrak{b}) = v^*(\mathfrak{s}; \mathfrak{b}) \qquad \forall \mathfrak{s} \subseteqq S$$

als Identitäten für die Funktionen $\prod\limits_{s_k}^{\omega}$ und die Indexmengen B_s.

In der primitiven Klasse $\mathcal{H}$ der Halbgruppen ergeben sich aus der Identität

$$(xy)z = x(yz)$$

bei $[s, b]\,[t, c] \overset{\text{def}}{=} \left(s\cdot t, b \underset{s,\,t}{\bigcirc} c\right)$ in P die Identitäten

$$\left(b \underset{s,\,t}{\bigcirc} c\right) \underset{st,\,u}{\bigcirc} d = b \underset{s,\,tu}{\bigcirc} \left(c \underset{t,\,u}{\bigcirc} d\right) \qquad \forall s, t, u \in S \;\; (b \in B_s,\;\; c \in B_t,\;\; d \in B_u).$$

Die Gesamtheit der Identitäten, die sich auf oben beschriebene Weise aus der Identitätsmenge I für das Funktionssystem $\left\langle \prod\limits_{s_k}^{\omega} \right\rangle$ ergeben, sei mit I^* bezeichnet.

Wir fassen zusammen: Sind A und S beliebige Algebren aus der primitiven Klasse $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\Omega, I)$ und ist $\{i\}$ eine einelementige Unteralgebra von S, so existiert zu jeder Schreierschen i-Erweiterung von A durch S eine Vorschrift, die

a) jedem Element $s \in S$ eine von 0 verschiedene Kardinalzahl $\mathfrak{m}_s$ und eine — nach unserer Vereinbarung eindeutig bestimmte — Menge $B_s = B(\mathfrak{m}_s)$ der Mächtigkeit $\mathfrak{m}_s$ zuordnet, insbesondere dem Element i die Menge $B_i = B(|A|) = A$;

b) jeder nullären Operation $\nu \in \Omega^{(0)}$ das durch ν in A ausgezeichnete Element 0_ν zuordnet,

c) jeder n-ären Operation $\omega \in \Omega^{(n)}$ und jedem n-Tupel $(s_1, \ldots, s_n) \in S^n$ eine Funktion

$$\prod_{s_k}^{\omega} : B_{s_1} \times \cdots \times B_{s_n} \to B_s, \text{ wobei } s = \prod^{\omega} s_k \in S,$$

zuordnet, insbesondere dem n-Tupel $(i, \ldots, i)$ die Funktion

$$\prod_{i}^{\omega} a_k = a_1 \cdots a_n \omega \in A \qquad \forall a_k \in A,$$

so daß die Funktionen $\prod\limits_{s_k}^{\omega}$ die Identitäten aus I^* erfüllen.

Wenn zu A und S mit $\{i\} \leqq S$ ein System von Mächtigkeiten $\mathfrak{m}_s$ und ein Funktionensystem $\left\langle \prod\limits_{s_k}^{\omega} \right\rangle$ (siehe a), b), c)) existiert, für das die Identitäten aus I^* erfüllt sind, so sagen wir: $\langle \mathfrak{m}_s \rangle, \left\langle \prod\limits_{s_k}^{\omega} \right\rangle$ ist ein zugehöriges *$\mathcal{K}$-Schreiersches System*. Offensichtlich folgt durch Rückschluß, daß diese Eigenschaft nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend dafür ist, daß die Systeme $\langle \mathfrak{m}_s \rangle, \left\langle \prod\limits_{s_k}^{\omega} \right\rangle$ zu einer Algebra P aus $\mathcal{K}$ gehören und diese eine Schreiersche i-Erweiterung von A durch S ist. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 4. *Zu den gegebenen Algebren A, $S \in \mathcal{K}$ mit $\langle i \rangle \leqq S$ existiere ein $\mathcal{K}$-Schreiersches System $\langle \mathfrak{m}_s \rangle, \left\langle \prod\limits_{s_k}^{\omega} \right\rangle$ von Kardinalzahlen und Funktionen.*

(I) *Dann bildet die Menge*

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \{[s, b] \mid s \in S, b \in B_s\}$$

mit den Operationen

$$\overset{\omega}{\Pi}[s_k, b_k] \stackrel{\text{def}}{=} \left[\overset{\omega}{\Pi}\, s_k, \underset{s_k}{\overset{\omega}{\Pi}}\, b_k\right] \qquad \forall\, \omega \in \Omega^{(n)} \qquad (n \geqq 1)$$

und

$$(\nu)_P \stackrel{\text{def}}{=} [i, 0_\nu] \qquad \forall \nu \in \Omega^{(0)}$$

eine Algebra aus der primitiven Klasse $\mathcal{K}$.

(II) *Diese Algebra $P \in \mathcal{K}$ stellt eine Schreiersche Erweiterung von A durch S bezüglich $\{i\}$ dar: Mit dem Monomorphismus ι_0: $a \mapsto [i, a]$ $\forall a \in A$ und dem Epimorphismus π_0: $[s, b] \mapsto s$ $\forall [s, b] \in P$ ist die Sequenz*

$$A \xrightarrow{\iota_\sigma} P \xrightarrow{\pi_\sigma} S \longrightarrow \{i\}$$

exakt.

Diese Schreiersche Erweiterung (P, ι_0, π_0) von A durch S bezüglich $\{i\}$ wird mit $E_i\left(A, S; \langle \mathfrak{m}_s\rangle; \left\langle \underset{s_k}{\overset{\omega}{\Pi}} \right\rangle\right)$ bezeichnet und heißt *$\mathcal{K}$-Schreiersches i-Produkt von A mit S.*

Bemerkung 1. Für Gruppen, Ringe, Multioperatorgruppen, Quasigruppen, Loops und ähnliche algebraische Strukturen (wie für sämtliche ω^*-regulären Schreierschen Erweiterungen) gilt stets in jeder Schreierschen Erweiterung $\mathfrak{m}_s = |A|$ $\forall\, s \in S$.

Bemerkung. 2. In jeder primitiven Klasse gibt es für beliebige Algebren A und S zu dem System $\mathfrak{m}_s = |A|$ und damit $B_s = A$ $\forall\, s \in S$ mindestens eine Schreiersche Erweiterung von A durch S bezüglich $\{i\} \leqq S$, das direkte Produkt $S \otimes A$, d. h. $E_i\left(A, S; \langle |A| \rangle; \left\langle \overset{\omega}{\Pi} \right\rangle\right)$.

Bemerkung 3. Es sei $\mathcal{K} = V$ die primitive Klasse der Verbände. Ist A ein beschränkter Verband und bezeichnet i ein beliebiges Element des Verbandes S, so existiert zu jedem System von Kardinalzahlen $\mathfrak{m}_s \neq 0$ $(s \in S;\ \mathfrak{m}_i = |A|)$ eine Schreiersche Erweiterung von A durch S bezüglich i. Zum Beispiel kann auf jeder Menge $B_s = B(\mathfrak{m}_s)$ ein beschränkter Verband V_s definiert werden, insbesondere sei $V_i = A$. Dann wird die Menge P der Paare $[s, b]$ vermöge der Halbordnungsrelation

$$[s, b] \leqq [t, c] \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (s < t \text{ in } S) \vee (s = t \wedge b \leqq c \text{ in } V_s)$$

ein Verband, der eine Schreiersche i-Erweiterung von A durch S darstellt.

Es seien A und S Algebren aus einer beliebigen primitiven Klasse $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\Omega, I)$. Die assoziierten Schreierschen Erweiterungen werden durch den folgenden Satz charakterisiert, so daß uns die Sätze 4 und 5 ein volles Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen aus $\operatorname{Ext}_i(A, S)$ liefern.

Satz 5. (III) *Jede Schreiersche Erweiterung von A durch S bezüglich $\{i\} \leqq S$ ist zu einem $E_i\left(A, S; \langle \mathfrak{m}_s\rangle; \left\langle \underset{s_k}{\overset{\omega}{\Pi}} \right\rangle\right)$ assoziiert.*

(IV) *Zwei Schreiersche Erweiterungen* $P = E_i\left(A, S;\ \langle \mathfrak{m}_s\rangle;\ \left\langle \overset{\omega}{\prod_{s_k}} \right\rangle\right)$ *und* $P' = E_i\left(A, S;\ \langle \mathfrak{m}_s'\rangle;\ \left\langle \overset{\omega}{\prod_{s_k}}{}' \right\rangle\right)$ *sind genau dann assoziiert, wenn*

1. $\mathfrak{m}_s' = \mathfrak{m}_s$ *ist und folglich* $B(\mathfrak{m}_s') = B(\mathfrak{m}_s) = B_s$ *für jedes* $s \in S$ *und*
2. *für ein geeignetes System von Permutationen* ε_s *der Menge* B_s $(s \in S)$, *wobei insbesondere* $\varepsilon_i = 1_A$ *ist,*

$$\overset{\omega}{\prod_{s_k}}{}' b_k = \left(\overset{\omega}{\prod_{s_k}} b_k \varepsilon_{s_k}\right) \varepsilon_s^{-1} \quad \textit{mit } s = \overset{\omega}{\prod} s_k \in S$$

$\forall s_k \in S,\ \forall b_k \in B_{s_k},\ \forall \omega \in \Omega$ *gilt.*

Beweis. (III) wurde schon gezeigt.

Zu (IV): Es seien P und P' assoziierte i-Erweiterungen von A durch S und

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\iota} & P & \xrightarrow{\pi} & S & \longrightarrow & \{i\} \\ \| & & \uparrow{\scriptstyle\varepsilon} & & \| & & \\ A & \xrightarrow{\iota'} & P' & \xrightarrow{\pi'} & S & \longrightarrow & \{i\} \end{array}$$

das zugehörige kommutative Diagramm. Da ε eine eineindeutige Abbildung ist und $[s, b']\,\varepsilon\pi = [s, b']\pi' = s$, also $[s, b']\varepsilon = [s, b]$ für ein eindeutig bestimmtes $b \in B(\mathfrak{m}_s)$ für jedes $b' \in B(\mathfrak{m}_s')$ gilt, induziert ε eine eineindeutige Abbildung ε_s: $b' \mapsto b$ von $B(\mathfrak{m}_s')$ in $B(\mathfrak{m}_s)$, die auf Grund der Assoziiertheit von P und P' sogar $B(\mathfrak{m}_s')$ auf $B(\mathfrak{m}_s)$ abbildet. Folglich gilt $\mathfrak{m}_s' = \mathfrak{m}_s$ und (nach unserer Vereinbarung zu Beginn dieses Paragraphen) $B(\mathfrak{m}_s') = B(\mathfrak{m}_s) = B_s$, und ε_s ist eine Permutation von B_s für jedes $s \in S$. Insbesondere ist $\varepsilon_i = 1_A$.

Da die Abbildung ε operationstreu ist, ergibt sich ferner aus

$$\left(\overset{\omega}{\prod} [s_k, b_k]\right) \varepsilon = \overset{\omega}{\prod} [s_k, b_k]\varepsilon \quad \forall s_k \in S,\ \forall b_k \in B_{s_k},\ \forall \omega \in \Omega$$

die Beziehung

$$\left[\overset{\omega}{\prod} s_k, \overset{\omega}{\prod_{s_k}}{}' b_k\right] \varepsilon = \overset{\omega}{\prod} [s_k, b_k \varepsilon_{s_k}]$$

und weiter für $s = \overset{\omega}{\prod} s_k$

$$\left[s, \left(\overset{\omega}{\prod_{s_k}}{}' b_k\right)\varepsilon_s\right] = \left[s, \overset{\omega}{\prod_{s_k}} b_k \varepsilon_{s_k}\right],$$

woraus die Behauptung 2. folgt.

Sind umgekehrt für zwei Schreiersche Erweiterungen

$$P = E_i\left(A, S; \langle \mathfrak{m}_s\rangle; \left\langle \overset{\omega}{\prod_{s_k}} \right\rangle\right) \text{ und } P' = E_i\left(A, S; \langle \mathfrak{m}_s\rangle, \left\langle \overset{\omega}{\prod_{s_k}}{}' \right\rangle\right)$$

Permutationen ε_s bekannt, die der Bedingung 2. genügen, so folgt durch Rückwärtsschluß, daß beide Schreierschen Erweiterungen vermöge der Abbildung

$$\varepsilon\colon [s, b] \mapsto [s, b\varepsilon_s] \quad \forall\ [s, b] \in P'$$

assoziiert sind. Damit ist der Satz bewiesen.

Es bezeichnet $\mathcal{H}$ die primitive Klasse der Halbgruppen. Es sei $A, S \in \mathcal{H}$, und S enthalte ein idempotentes Element i. Wird jedem Element $s \in S$ eine Kardinalzahl $\mathfrak{m}_s \neq 0$ und eine Menge $B_s = B(\mathfrak{m}_s)$ der Mächtigkeit $\mathfrak{m}_s$ zugeordnet, insbesondere dem idempotenten Element i die Menge $B_i = B(|A|) = A$, und gibt es dann ein System von Funktionen $\underset{s,t}{\bigcirc}$ mit Werten $b \underset{s,t}{\bigcirc} c$ in B_{st} $\forall\, b \in B_s$, $\forall\, c \in B_t$, so daß

$$\left(b \underset{s,t}{\bigcirc} c\right) \underset{st,u}{\bigcirc} d = b \underset{s,tu}{\bigcirc} \left(c \underset{t,u}{\bigcirc} d\right) \quad \forall\, s, t, u \in S$$

und

$$a_1 \underset{i,i}{\bigcirc} a_2 = a_1 a_2 \in A \quad \forall\, a_1, a_2 \in A$$

gilt, so sagen wir: Das System $\langle \mathfrak{m}_s \rangle, \left\langle \underset{s,t}{\bigcirc} \right\rangle$ ist $\mathcal{H}$-Schreiersch.

Ist für ein (beliebiges) Element $s \in S$ in S $is = i$, so ist für jedes $b \in B_s$ die Zuordnung

$$a \mapsto a \underset{i,s}{\bigcirc} b = a^b \in A \quad \forall\, a \in A$$

eine Abbildung von A in sich. Aus der „Assoziativität" der Verknüpfung $\underset{i,s}{\bigcirc}$ folgt

$$(a_1 a_2) \underset{i,s}{\bigcirc} b = a_1 \left(a_2 \underset{i,s}{\bigcirc} b\right) \quad \forall\, a_1, a_2 \in A, \text{ d. h. } (a_1 a_2)^b = a_1 (a_2{}^b).$$

Clifford [1] nennt eine solche Abbildung a^b eine Rechtstranslation der Halbgruppe A.

Ist für ein (beliebiges) Element $s \in S$ in S $is = s$, so ist für jedes $a \in A$ die Zuordnung

$$b \mapsto a \underset{i,s}{\bigcirc} b = {}^a b \in B_s \quad \forall b \in B_s$$

eine Abbildung von B_s in sich. Dabei folgt hier aus der Assoziativitätsbedingung

$$(a_1 a_2) \underset{i,s}{\bigcirc} b = a_1 \underset{i,s}{\bigcirc} \left(a_2 \underset{i,s}{\bigcirc} b\right), \text{ d. h. } {}^{a_1 a_2} b = {}^{a_1}({}^{a_2} b) \quad \forall\, a_1, a_2 \in A.$$

Aus den Sätzen 4 und 5 ergeben sich für A und S die beiden Folgerungen 1 und 2.

Folgerung 1. *Zu den Halbgruppen A und S und dem idempotenten Element $i \in S$ sei ein $\mathcal{H}$-Schreiersches System von Kardinalzahlen $\mathfrak{m}_s$ und Funktionen $\underset{s,t}{\bigcirc}$ gegeben.*

(I) *Dann bildet die Menge*

$$P \overset{\text{def}}{=} \{[s, b] \mid s \in S, b \in B_s\}$$

mit der Verknüpfung

$$[s, b] \circ [t, c] \overset{\text{def}}{=} \left[st, b \underset{s,t}{\bigcirc} c\right]$$

eine Halbgruppe.

(II) *Diese Halbgruppe $(P, \circ)$ stellt eine Schreiersche i-Erweiterung von A durch S in $\mathcal{H}$ dar: Mit dem Monomorphismus ι_0: $a \mapsto [i, a]$ von A in P und dem Epimorphismus π_0: $[s, b] \mapsto s$ von P auf S ist die Sequenz*

$$A \overset{\iota_0}{\rightarrowtail} P \overset{\pi_0}{\longrightarrow} S \longrightarrow \{i\}$$

exakt.

Diese Schreiersche Erweiterung (P, ι_0, π_0) wird mit $E_i(S, A; \langle \mathfrak{m}_s \rangle, \langle \underset{s,t}{\bigcirc} \rangle)$ bezeichnet.
Neben dem Spezialfall $m_s = |A| \ \forall\, s \in S$, zu dem neben dem direkten Produkt $S \otimes A$ sämtliche o-regulären Schreierschen Erweiterungen (vgl. [11]) gehören, ist der Fall $\mathfrak{m}_s = 1 \ \ \forall\, s \neq i$ von besonderem Interesse. Dies sind die sogenannten Unionserweiterungen [15]. Gilt insbesondere, $i = 0$ ist das Nullelement in der Halbgruppe S, so erhalten wir die Idealerweiterungen [1]. Betrachten wir zum Beispiel die unendliche zyklische Halbgruppe A und die multiplikative Halbgruppe S der Restklassen der ganzen Zahlen modulo m $(m > 1)$, so existiert genau dann eine Idealerweiterung von A durch S, wenn m eine Primzahl ist.
Die assoziierten Schreierschen Erweiterungen in $\mathcal{H}$ werden in Folgerung 2 charakterisiert.

Folgerung 2. (III) *Jede Schreiersche Erweiterung von A durch S bezüglich $i \in S$ in $\mathcal{H}$ ist zu einem $E_i \left(A, S; \langle \mathfrak{m}_s \rangle; \langle \underset{s,t}{\bigcirc} \rangle \right)$ assoziiert.*

(IV) *Zwei Schreiersche Erweiterungen $P = E_i \left(S, A; \langle \mathfrak{m}_s \rangle; \langle \underset{s,t}{\bigcirc} \rangle \right)$ und $P' = E_i \left(A, S; \langle \mathfrak{m}_s' \rangle; \langle \underset{s,t}{\square} \rangle \right)$ von A durch S bezüglich i in $\mathcal{H}$ sind genau dann assoziiert wenn*

1. $\mathfrak{m}_s' = \mathfrak{m}_s$ *und also* $B(\mathfrak{m}_s') = B(\mathfrak{m}_s) = B_s \ \forall\, s \in S$ *und*

2. *für jedes $s \in S$ eine Permutation ε_s von B_s existiert, so daß neben $\varepsilon_i = 1_A$*

$$b \underset{s,t}{\square} c = \left(b \varepsilon_s \underset{s,t}{\bigcirc} c \varepsilon_t\right) \varepsilon_{st}^{-1} \qquad \forall\, b \in B_s, \ \forall\, c \in B_s, \ \forall\, s, t \in S$$

gilt.

Es bezeichnet $\mathcal{V}$ die primitive Klasse der Verbände. Es seien A und S beliebige Verbände, und i bezeichne ein beliebiges Element aus S. Ein zugehöriges $\mathcal{V}$-Schreiersches System von Kardinalzahlen $\mathfrak{m}_s \neq 0$ mit $m_i = |A|$ und Funktionen

$$\underset{s,t}{\vee} : B_s \times B_t \to B_{s \smile t}; \qquad \underset{s,t}{\wedge} : B_s \times B_t \to B_{s \frown t} \quad (s, t \in S)$$

genügt sechs Bedingungen:

$$(1)\ b \underset{s,\, t \frown u}{\vee} \left(c \underset{t,u}{\vee} d\right) = \left(b \underset{s,t}{\vee} c\right) \underset{s \smile t,\, u}{\vee} d;$$

$$(2)\ b \underset{s,t}{\vee} c = c \underset{t,s}{\vee} b;$$

$$(3)\ b \underset{s,\, s \smile t}{\wedge} \left(b \underset{s,t}{\vee} c\right) = b;$$

die restlichen drei Bedingungen ergeben sich durch Vertauschen von $\vee$ und $\wedge$ aus (1) bis (3). Jede Menge B_s bildet mit den Operationen $\underset{s,s}{\vee}$ und $\underset{s,s}{\wedge}$ einen Verband V_s.

Aus den für Halbgruppen gemachten Erwägungen und den zusätzlichen obigen Identitäten ergibt sich: Für beliebige Elemente s, t mit $s \leqq i \leqq t$ in S gilt

$$a \underset{i,s}{\vee} b = a^b \in A \qquad \text{mit } (a_1 \vee a_2)^b = a_1 \vee a_2^b, \quad a \leqq a^b \text{ in } A$$

$$\text{und } b \underset{s,i}{\wedge} a^b = b;$$

$$a \underset{i,s}{\wedge} b = {}_a b \in B_s \qquad \text{mit } {}_{a_1 \wedge a_2} b = {}_{a_1}({}_{a_2} b),\ b \leqq {}_a b \text{ in } V_s$$
$$\qquad\qquad \text{und } a \underset{i,s}{\vee} {}_a b = a;$$

$$a \underset{i,t}{\wedge} c = a_c \in A \qquad \text{mit } (a_1 \wedge a_2)_c = a_1 \wedge (a_2)_c,\ a \geqq a_c \text{ in } A$$
$$\qquad\qquad \text{und } c \underset{t,i}{\vee} a_c = c;$$

$$a \underset{i,t}{\vee} c = {}^a c \in B_t \qquad \text{mit } {}^{a_1 \vee a_2} c = {}^{a_1}({}^{a_2} c),\ c \leqq {}^a c \text{ in } V_s$$
$$\qquad\qquad \text{und } a \underset{i,t}{\wedge} {}^a c = a.$$

Analog zu Folgerung 1 und 2 erhalten wir eine Beschreibung der i-Erweiterungen der Verbände A durch S in $\mathfrak{V}$.

LITERATUR

[1] Clifford, A. H.: Extensions of semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. *68* (1950) 165–173.
[2] Everett, C. J.: An extension theory for rings. Amer. J. Math. *64* (1942) 363–370.
[3] Fuchs, L.: Rédeian skew product of operatorgroups. Acta Sci. Math. Szeged *14* (1952) 228 to 238.
[4] Gécseg, F.: Шрейерово расширение мультиоператорных групп. Acta Sci. Math. Szeged *23* (1962) 58–68.
[5] Hancock, V. R.: Commutative Schreier semigroup extensions of a group. Acta Sci. Math. Szeged *25* (1964) 129–134.
[6] Инасаридзе, Х. Н.: Расширения регулярных полугрупп. Сообщения АН Груз ССР *39* (1965) 3–10.
[7] Инасаридзе, Х. Н.: Расширения полугрупп с нулем. Сообщения АН Груз ССР *41* (1966) 513–520.
[8] Kuroš, A. G.: Vorlesungen über allgemeine Algebra. B. G. Teubner, Leipzig 1964 (Übersetzung aus dem Russischen).
[9] Ляпин, Е. С.: Полугруппы. Физматгиз, Москва 1960.
[10] Łoš, J.: Normal subalgebras in general algebras. Coll. Math. *12* (1964) 151–153.
[11] Rédei, L.: Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie. Acta. Sci. Math. Szeged *14* (1952) 252–273.
[12] Schreier, O.: Über die Erweiterung von Gruppen I, II. Monatsh. Math. Phys. *34* (1926) 165–180; Abh. Math. Sem. Hamburg *4* (1926), 321–346.
[13] Schubert, H.: Kategorien I. Akademie-Verlag, Berlin 1970.
[14] Strecker, R.: Verallgemeinerte Schreiersche Halbgruppenerweiterungen. Monatsber. DAW Berlin *11* (1969) 325–328.
[15] Verbeek, L.: Semigroup extensions. Dissertationsschrift. Techn. Hochschule Delft 1968.

Manuskripteingang: 17. 11. 1970

VERFASSER:
Renate Kummer, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle–Wittenberg