Bemerkungen zur Theorie der formal p-adischen Körper

PETER ROQUETTE

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

§ 1. Einleitung und Problemstellung

KOCHEN[1]) hat kürzlich eine Theorie der formal p-adischen Körper entwickelt, in Analogie zu der Artinschen Theorie der formal reellen Körper. Hauptziel der Kochenschen Arbeit ist eine Charakterisierung der p-adisch ganz definiten Funktionen, analog zur Charakterisierung der positiv definiten Funktionen in der reellen Theorie. Nach ARTIN ist jede positiv-definite Funktion eine Summe von Quadraten, sie läßt sich also durch den Quadratoperator $Q(x) = x^2$ in gewisser Weise (nämlich durch Substitution und Summenbildung) ausdrücken. In der p-adischen Theorie tritt an die Stelle des Quadratoperators der Operator

$$\gamma(x) = \frac{1}{p}\left(\wp x - \frac{1}{\wp x}\right)^{-1}$$

wobei wir

$$\wp(x) = x^p - x$$

gesetzt haben. Nach Kochen läßt sich nun jede p-adisch ganz-definite Funktion in gewisser Weise durch den γ-Operator ausdrücken.

Was hierbei unter der Floskel „in gewisser Weise" zu verstehen ist, werden wir sogleich erläutern.

Es ist nämlich das Ziel des vorliegenden Note, das Kochensche Resultat in dieser Hinsicht zu verschärfen, indem nämlich für die p-adisch ganz definiten Funktionen eine einfachere Darstellung angegeben wird, als es bei Kochen geschieht.

Zunächst wollen wir an die einschlägigen Begriffsbildungen und Resultate aus der Theorie der formal p-adischen Körper erinnern. Es sei p eine Primzahl und K ein

---

[1]) S. KOCHEN, Integer valued rational functions over the p-adic numbers: A p-adic analogue of the theory of real fields; Proc. Symp. Pure Math., vol. XII, Number theory, p. 57—73.

Körper der Charakteristik 0. Eine Bewertung[1]) V von K heißt eine *p-Bewertung*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. der Restklassenkörper $\bar{K}$ von K bezüglich V besitzt p Elemente;
2. die Wertgruppe $V(K)$ von K bezüglich V besitzt ein kleinstes positives Element, und zwar $V(p)$.

Dieser Begriff der p-Bewertung ist das p-adische Analogon zum Begriff der *Ordnung* eines Körpers in der reellen Theorie. Dort beweist man: Ein Körper besitzt dann und nur dann eine Ordnung, wenn er formal reell ist in dem Sinne, daß sich -1 nicht als Summe von Quadraten in dem Körper darstellen läßt. Ein entsprechender Satz gilt auch im p-adischen. Dabei wird der Begriff des formal p-adischen Körpers wie folgt gefaßt.

Es sei K ein Körper der Charakteristik 0. Wir betrachten den bereits oben angegebenen Kochen-Operator

$$\gamma(x) = \frac{1}{p}\left(\wp x - \frac{1}{\wp x}\right)^{-1},$$

welcher für $\wp x \neq 0, \pm 1$ definiert ist. Es bedeute $\mathbf{Z}[\gamma K]$ den von den Elementen γx (mit $x \in K$ und $\wp x \neq 0, \pm 1$) über $\mathbf{Z}$ erzeugten Teilring. Nach KOCHEN nennt man nun K *formal p-adisch*, wenn

$$\frac{1}{p} \notin \mathbf{Z}[\gamma K],$$

d. h. wenn sich $\frac{1}{p}$ nicht als ganzzahliges Polynom von Elementen γx mit $x \in K$ darstellen läßt. Es gilt dann der

Satz I. *K besitzt dann und nur dann eine p-Bewertung, wenn K formal p-adisch ist.*[2])

Ein Element $x \in K$ eines formal p-adischen Körpers K heißt *total p-adisch ganz*, wenn $V(x) \geqq 0$ für alle p-Bewertungen V von K. Es ist klar, daß die total p-adisch ganzen Elemente aus K einen Teilring I von K bilden, nämlich der Durchschnitt der Bewertungsringe

$$I = \bigcap \mathfrak{O}_V$$

zu den p-Bewertungen V von K. Es entsteht die Frage nach einer expliziten Beschreibung von I.

In der analogen Situation der reellen Theorie handelt es sich um total positive Elemente, welche bei jeder Ordnung $\geqq 0$ sind. Dort beweist man: Die total positiven Elemente sind genau die Quadratsummen. Der entsprechende Satz im p-adischen lautet:

---

[1]) Alle hier betrachteten Bewertungen sind nichtarchimedisch und werden additiv geschrieben. Die Wertgruppe ist eine total geordnete Gruppe, nicht notwendig vom Rang 1.

[2]) Für einen Beweis von Satz I und auch von Satz II vgl. die Bemerkungen in § 3, im Anschluß an die Folgerungen zu Satz 6.

Satz II. *Es sei K formal p-adisch. Ein Element $x \in K$ ist dann und nur dann total p-adisch ganz, wenn sich x in der Form*

$$x = \frac{f}{1 + p g}$$

mit $f, g \in \mathbf{Z}[\gamma K]$ darstellen läßt.

Mit anderen Worten:

Der Ring I der total p-adisch ganzen Elemente aus K läßt sich als Quotientenring

$$I = \mathrm{Quot}_T\, \mathbf{Z}\,[\gamma K]$$

darstellen, wobei T die multiplikative Halbgruppe

$$T = 1 + p \cdot \mathbf{Z}[\gamma K]$$

bedeutet.

Es ist dieses Ergebnis, das wir meinten, als wir eingangs von einer Verschärfung des Kochenschen Resultats sprachen. Kochen beweist nämlich nur, daß I die ganzabgeschlossene Hülle von $\mathrm{Quot}_T\, \mathbf{Z}[\gamma K]$ ist. Unser Ergebnis läßt sich also auch wie folgt zusammenfassen:

Der Kochen-Ring $\mathrm{Quot}_T\, \mathbf{Z}[\gamma K]$ *ist ganzabgeschlossen in K.*

Der Nachweis dieser Tatsache ist das Hauptziel der vorliegenden Note. Er beruht auf einem einfachen algebraischen Lemma, das in § 2 dargestellt wird, und zwar werden wir dieses Lemma gleich in einer etwas allgemeineren Fassung formulieren und beweisen, um uns bei späterer Gelegenheit darauf beziehen zu können.
Interessant ist, daß sich als Nebenergebnis noch eine Reihe von weiteren Strukturaussagen über den Kochen-Ring

$$R = \mathrm{Quot}_T\, \mathbf{Z}[\gamma K]$$

und damit auch über I ergeben. Und zwar:
Erstens können wir das *Primidealspektrum* von R vollständig mit Hilfe von Bewertungen beschreiben. Kurz gesagt: R verhält sich in bezug auf die über R liegenden Bewertungen ähnlich wie ein Dedekindscher Ring, obwohl die über R liegenden Bewertungen im allgemeinen keine diskrete Wertgruppe von Rang 1 besitzen und R daher kein Dedekindscher Ring ist. Die über R liegenden Bewertungen von K sind einerseits die p-Bewertungen von K (diese besitzen auf R ein maximales Ideal als Zentrum), und andererseits diejenigen Bewertungen von K, deren Restklassenkörper formal p-adisch ist (diese besitzen auf R ein nichtmaximales Ideal als Zentrum). Für Einzelheiten verweisen wir auf unsere Diskussion in § 3.

Als Folge aus diesen Resultaten stellt sich heraus, daß nicht nur R, sondern auch jeder Oberring von R in K ganzabgeschlossen ist (vgl. § 3, Folgerung 3 zu Satz 5); damit lassen sich auch die Ergebnisse von Kochen über relativ total p-adisch ganze Elemente verschärfen (relativ in bezug auf eine vorgegebene Teilmenge S von K).
Auch das Jacobsonsche Radikal von R läßt sich explizit beschreiben, nämlich als das von p erzeugte Hauptideal pR. Das war zu erwarten. Bemerkenswert ist, daß für die p-Bewertungen von K der *verschärfte Annäherungssatz* gilt (vgl. § 3, Satz 7); da es

sich im allgemeinen um unendlich viele Bewertungen handelt (mit nichtdiskreter Wertgruppe), ist dieser Satz nichttrivial.

Ein formal p-adischer Körper K heißt *p-adisch abgeschlossen*, wenn er keinen echten algebraischen und formal p-adischen Erweiterungskörper besitzt. Dann besitzt K nur eine einzige p-Bewertung V; dies entspricht der bekannten Tatsache aus der reellen Theorie, daß ein reell abgeschlossener Körper nur eine einzige Ordnung gestattet.

Es sei nun K_0 ein p-adisch abgeschlossener Körper, und es sei $K = K_0(x_1, \ldots, x_n) = K_0(x)$ rationaler Funktionenkörper in n Variablen über K_0. Eine rationale Funktion $f(x) \in K$ heißt *p-adisch ganz-definit*, wenn $V(f(a)) \geqq 0$ für alle $a = (a_1, \ldots, a_n) \in K_0^n$, für welche $f(a)$ definiert ist, d. h. welche nicht Nullstellen des Nenners von $f(x)$ sind. Nach KOCHEN gilt nun der

Satz III. *Es sei K_0 p-adisch abgeschlossen. Eine rationale Funktion $f(x) \in K_0(x)$ ist genau dann p-adisch ganz-definit, wenn $f(x)$ total p-adisch ganz ist in $K_0(x)$.*

Zusammen mit unserem Satz II ergibt sich daraus eine Charakterisierung der p-adisch ganz-definiten Funktionen, welche im angegebenen Sinne schärfer ist als das entsprechende Resultat bei KOCHEN.

Auf den Beweis von Satz III werden wir in dieser Note nicht eingehen. Es sei dazu jedoch folgendes bemerkt: KOCHEN benutzt an wesentlicher Stelle die Ergebnisse der Modelltheorie im Sinne der Logik, und zwar genauer den Satz, daß die Theorie der p-adisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 modell-vollständig ist. Er erwähnt, daß bisher noch kein direkter, von der Modelltheorie unabhängiger Beweis gefunden sei. Ein solcher direkter, auf der Bewertungstheorie fußender Beweis läßt sich nun unter Benutzung unserer Resultate in § 3 in der Tat aufstellen. Hierauf und auf mögliche Verallgemeinerungen in Charakteristik > 0 beabsichtigen wir an anderer Stelle einzugehen.

Bezeichnungen.

Ist V eine Bewertung des Körpers K, so bezeichnen wir mit

$\mathfrak{O}_V$ den Bewertungsring von V in K;
$\mathfrak{M}_V$ das maximale Ideal von $\mathfrak{O}_V$;
$\bar{K}_V$ $= \mathfrak{O}_V/\mathfrak{M}_V$ den zugehörigen Restklassenkörper;
$\bar{x}$ das Bild in $\bar{K}_V$ des Elements $x \in \mathfrak{O}_V$;
$V(K)$ die Wertgruppe von V.

Wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, um welche Bewertung es sich handelt, so lassen wir den Index V der Einfachheit halber fort und schreiben $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{M}$, $\bar{K}$ statt $\mathfrak{O}_V$, $\mathfrak{M}_V$, $\bar{K}_V$.

§ 2. Ganzabgeschlossenheit des Kochen-Ringes

Wir betrachten die folgende allgemeine körpertheoretische Situation, welche die in §1 geschilderte Situation bei formal p-adischen Körpern imitiert:

Es sei K ein Körper, q eine natürliche Zahl > 1, π ein Element $\neq 0$ aus K. Wir definieren den zu q gehörigen *Artin-Schreier-Operator* auf K durch

$$\wp(x) = x^q - x \qquad (x \in K)$$

sowie den zu q und π gehörigen *Kochen-Operator* durch

$$\gamma(x) = \frac{1}{\pi}\left(\wp x - \frac{1}{\wp x}\right)^{-1} \qquad (x \in K),$$

wobei noch $\wp(x) \neq 0, \pm 1$ vorausgesetzt wird.
Es sei ferner $\mathfrak{o}$ ein Teilring von K, der π enthält. Wir betrachten den Ring

$$\mathfrak{o}[\gamma K],$$

der von Elementen γx (mit $x \in K$ und $\wp x \neq 0, \pm 1$) über $\mathfrak{o}$ erzeugt wird. Es sei T die multiplikative Halbgruppe

$$T = 1 + \pi \cdot \mathfrak{o}[\gamma K]$$

aus $\mathfrak{o}[\gamma K]$. Wir bilden den zu T gehörigen Quotientenring

$$R = \mathrm{Quot}_T\, \mathfrak{o}[\gamma K]$$

und nennen R den zu q und π gehörigen *Kochen-Ring* über $\mathfrak{o}$. Damit R definiert ist, hat man vorauszusetzen, daß T nicht die Null enthält, das bedeutet:

Voraussetzung. *π ist keine Einheit in $\mathfrak{o}[\gamma K]$, d. h., es gilt*

$$\frac{1}{\pi} \notin \mathfrak{o}[\gamma K].$$

Es ist klar, wie sich die in §1 geschilderte Theorie der formal p-adischen Körper als Spezialfall hier einordnet: Man hat dazu den Fall $\mathrm{char}(K) = 0$ zu betrachten und nimmt nun $q = \pi = p$ sowie $\mathfrak{o} = \mathbf{Z}$. Die obige Voraussetzung besagt in diesem Fall gerade, daß K formal p-adisch ist.

In unserer allgemeinen Situation gilt nun das

Lemma 1. *Der Kochen-Ring R ist ganzabgeschlossen in K.*

Dazu haben wir zu zeigen, daß sich R als Durchschnitt von Bewertungsringen von K darstellen läßt.

Es durchlaufe P die *maximalen Ideale* von R. Jedenfalls ist R, wie jeder Integritätsbereich, als Durchschnitt der Quotientenringe zu seinen maximalen Idealen P darstellbar:

$$R = \bigcap_P \mathrm{Quot}_P\,(R)$$

Lemma 1 wird also bewiesen sein, wenn wir zeigen können:

Lemma 2. *Für jedes maximale Ideal P von R ist* $\mathrm{Quot}_P(R)$ *ein Bewertungsring von K.*

Es sei V eine Bewertung von K. Wenn $V(R) \geqq 0$, d. h. wenn $R \subset \mathfrak{O}_V$, so sagt man: *V liegt über R.*
Ist das der Fall, so bestimmt V ein Primideal von R, nämlich das Ideal $R \cap \mathfrak{M}_V$, bestehend aus allen $x \in R$ mit $V(x) > 0$. Man nennt $R \cap \mathfrak{M}_V$ das *Zentrum* von V auf R; es ist nur definiert, wenn V über R liegt.

Zu jedem Primideal P von R gibt es mindestens eine über R liegende Bewertung V von K, welche P als Zentrum besitzt. Das ist der Inhalt des wohlbekannten Existenzsatzes für Bewertungen. Insbesondere gibt es also auch zu jedem maximalem Ideal P von R eine Bewertung V von K, die über R liegt und auf R das Zentrum P besitzt.

Demnach läßt sich Lemma 2 nun auch wie folgt aussprechen:

Lemma 3. *Es sei V eine über R liegende Bewertung von K, welche auf R ein maximales Ideal P als Zentrum besitzt. Dann ist* $\mathfrak{O}_V = \mathrm{Quot}_P(R)$.

Lemma 3 wird sich aus einem allgemeinen Hilfssatz der Bewertungstheorie ergeben (vgl. Lemma 4). Zuvor wollen wir zeigen, daß die dortigen Voraussetzungen im Fall eines Kochen-Ringes erfüllt sind. Die in Lemma 3 benutzten Bezeichnungen werden dabei ohne nochmalige Erklärung beibehalten, d. h., V bezeichnet eine über R liegende Bewertung von K und P das Zentrum von V auf R; es wird vorausgesetzt, daß P ein maximales Ideal von R ist. Wir beginnen mit folgender Feststellung:

$$V(\pi) > 0. \tag{1}$$

Diese Aussage bedeutet: $\pi \in P$. Nun ist P maximal in R. Wäre daher $\pi \notin P$, so wäre π eine Einheit modulo P, es gäbe also ein Element $x \in R$ mit $\pi x \equiv 1 \bmod P$. Nach Definition von $R = \mathrm{Quot}_T\, \mathfrak{o}[\gamma K]$ läßt sich x in der Form $x = f/1 + \pi g$ mit $f, g \in \mathfrak{o}[\gamma K]$ darstellen. Multiplikation mit $1 + \pi g$ ergibt

$$\pi f \equiv 1 + \pi g \mod P,$$

$$1 + \pi(g - f) \equiv 0 \mod P.$$

Das Element $1 + \pi(g - f)$ liegt in $T = 1 + \pi \cdot \mathfrak{o}[\gamma K]$, ist also eine Einheit in R. Daher liefert die Division mit $1 + \pi(g - f)$ die Relation

$$1 \equiv 0 \bmod P,$$

d. h. $P = R$, was absurd ist. Also ist $\pi \in P$, d. h., es gilt (1).

Bevor wir weitergehen, wollen wir die relevanten bewertungstheoretischen Eigenschaften des Kochen-Operators γ zusammenstellen. Es sei $x \in K$. Wegen $\wp x = x^q - x$ ergibt sich aus den elementaren Bewertungsregeln

$$V(x) > 0 \Rightarrow V(\wp x) = V(x) > 0,$$

$$V(x) < 0 \Rightarrow V(\wp x) = q\,V(x) < 0,$$

$$V(x) = 0 \Rightarrow V(\wp x) \geqq 0.$$

Ist $\wp x \neq 0$, so gilt ferner

$$V(\wp x) > 0 \Rightarrow V\left(\wp x - \frac{1}{\wp x}\right) = -V(\wp x) < 0,$$

$$V(\wp x) < 0 \Rightarrow V\left(\wp x - \frac{1}{\wp x}\right) = V(\wp x) < 0,$$

$$V(\wp x) = 0 \Rightarrow V\left(\wp x - \frac{1}{\wp x}\right) \geqq 0.$$

Zusammengenommen ergibt sich für

$$\gamma x = \frac{1}{\pi}\left(\wp x - \frac{1}{\wp x}\right)^{-1}$$

im Fall $\wp x \neq 0, \pm 1$ die folgende Werteverteilung:

$$V(x) > 0 \Rightarrow V(\gamma x) = V(x) - V(\pi), \tag{2a}$$

$$V(x) < 0 \Rightarrow V(\gamma x) = -q\,V(x) - V(\pi), \tag{2b}$$

$$V(\wp x) > 0 \Rightarrow V(\gamma x) = V(\wp x) - V(\pi), \tag{2c}$$

$$V(\wp x) = 0 \Rightarrow V(\gamma x) \leqq -V(\pi). \tag{2d}$$

Diese Formeln gelten ihrer Herleitung nach für eine beliebige Bewertung V von K. Nun benutzen wir unsere Voraussetzung, daß V über R liegt und daher

$$V(\gamma x) \geqq 0$$

wegen $\gamma x \in R$. Ferner besitzt V auf R das maximale Ideal P als Zentrum; daher entnehmen wir aus (1), daß *der Fall* (2d) *nicht vorkommt*. Es gilt daher

$$V(x) \geqq 0 \Rightarrow V(\wp x) > 0.$$

Für die Restklasse $\bar{x}$ von x im Restklassenkörper $\bar{K}$ bedeutet das:

$$\wp\bar{x} = \bar{x}^q - \bar{x} = 0. \tag{3}$$

Diese Relation gilt für *alle* Elemente $\bar{x} \in \bar{K}$. Wir hatten bei der Herleitung zwar vorausgesetzt, daß $\wp x \neq 0, \pm 1$. Andererseits gibt es zu vorgegebener Restklasse $\bar{x} \in \bar{K}$ *unendlich viele* Urbilder $x \in K$ (mit x sind nämlich auch die Elemente $x + \pi^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, Urbilder von $\bar{x}$, was aus (1) folgt). Wir können daher zu vorgegebener Restklasse $\bar{x} \in \bar{K}$ ein Urbild $x \in K$ finden, das die endlich vielen Ungleichungen $\wp x \neq 0, \pm 1$ erfüllt, für $\bar{x}$ gilt demnach (3).

Jedes Element $\bar{x} \in \bar{K}$ ist also Nullstelle des Polynoms $\wp(X) = X^q - X \in \bar{K}[X]$. Daraus folgt: $\bar{K}$ ist endlich, von einer Elementezahl $|\bar{K}| \leqq q$. Genauer gilt für die Elementezahl $|\bar{K}^\times|$ der multiplikativen Gruppe von $\bar{K}$:

$$|\bar{K}^\times| \textit{ ist Teiler von } q - 1. \tag{4}$$

Denn jedes Element $\bar{x} \in \bar{K}^\times$ ist Nullstelle des Polynoms $\dfrac{\wp(X)}{X} = X^{q-1} - 1$, also eine $(q-1)$-te Einheitswurzel.

Nebenbei ergeben unsere obigen Überlegungen, daß der Fall $\wp x = \pm 1$ gar nicht vorkommen kann, d. h., daß

$$\wp x \neq \pm 1 \tag{5}$$

für alle $x \in K$. Wäre nämlich $\wp x = 1$ oder $\wp x = -1$, so wäre $\wp\bar{x} = \pm 1 \neq 0$, was der Aussage (3) widerspricht.[1])

[1]) Man beachte dazu, daß es nach dem Existenzsatz für Bewertungen sicherlich Bewertungen von K gibt, die über R liegen, und die auf R ein maximales Ideal als Zentrum besitzen. Demnach ist die Aussage (3), die sich auf eine solche Bewertung V bezieht, nichtleer.

Die Restklassenabbildung bezüglich V induziert in R einen Homomorphismus $R \to \bar{K}$ mit dem Kern P. Demnach ist $R/P \subset \bar{K}$; wir behaupten nun, daß sogar

$$R/P = \bar{K}. \tag{6}$$

Dazu haben wir zu jedem Element $z \in K$ mit $V(z) \geqq 0$ ein Element $a \in R$ nachzuweisen mit

$$z \equiv a \bmod \mathfrak{M}. \tag{7}$$

Wir setzen a in der Form

$$a = \gamma(x)$$

mit geeignet zu wählendem $x \in K$ an. Nach Definition von γ ist

$$(\pi a)^{-1} = \wp x - \frac{1}{\wp x}$$

und daher

$$\pi a \cdot \wp(x)^2 - \wp(x) - \pi a = 0 \qquad (a = \gamma x). \tag{8}$$

Gemäß der Herleitung dieser Formel ist dabei $\wp(x) \neq 0$ vorauszusetzen, damit $\gamma(x)$ definiert ist. Die Gleichung (8) gilt jedoch trivialerweise auch, falls $\wp x = 0$ ist, wenn man dann $a = 0$ interpretiert.

Wir setzen nun

$$x = \pi z.$$

Dann ist $x \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}$, also auch $\wp x \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}$. Demnach ergibt sich aus (8) nach Division durch π

$$a \equiv -\frac{\wp(x)}{\pi} \equiv -(\pi^{q-1}z - z) \equiv z \bmod \mathfrak{M},$$

also gilt (7). Damit ist (6) bewiesen.
Die beim Beweis benutzte Formel (8) besagt, daß jedes Element $x \in K$ Nullstelle des Polynoms

$$\varphi(X) = \pi a \cdot \wp(X)^2 - \wp(X) - \pi a \in R[X]$$

ist, wobei $a = \gamma x$.

Es bedeute $\bar{\varphi}(X)$ das Bild von $\varphi(X)$ bei der natürlichen Abbildung $R[X] \to \bar{K}[X]$, die durch die Restklassenabbildung $R \to \bar{K}$ gegeben wird. Wegen $\pi a \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}$ ergibt sich

$$\bar{\varphi}(X) = -\wp(X)$$

und damit insbesondere $\bar{\varphi}'(0) = 1 \neq 0$. Die damit bewiesenen Relationen

$$\varphi(x) = 0, \quad \bar{\varphi}'(0) \neq 0 \tag{9}$$

merken wir uns für später an.

Nun zeigen wir:

V ist die einzige über R liegende Bewertung von K mit dem Zentrum P.[1]) (10)

Sei nämlich $W \neq V$ eine weitere, über R liegende Bewertung von K, die auf R ein maximales Ideal Q als Zentrum besitzt. Wir haben zu zeigen, daß $P \neq Q$.

Wegen $V \neq W$ ist $\mathfrak{O}_V \neq \mathfrak{O}_W$. Wäre $\mathfrak{O}_W \subset \mathfrak{O}_V$, so wäre das Bild von $\mathfrak{O}_W$ im Restklassenkörper $\bar{K}_V$ ein echter Bewertungsring von $\bar{K}_V$. Da jedoch $\bar{K}_V$ nach (4) endlich ist, besitzt $\bar{K}_V$ keine echten Bewertungsringe. Folglich ist $\mathfrak{O}_W \not\subset \mathfrak{O}_V$ und entsprechend $\mathfrak{O}_V \not\subset \mathfrak{O}_W$. Es gibt demnach Elemente $y, z \in K$ mit

$$V(y) \geqq 0, \qquad W(y) < 0,$$

$$V(z) < 0, \qquad W(z) \geqq 0.$$

Ist hierbei $V(y) > 0$, so ersetzen wir y durch $y - 1$ und können demnach $V(y) = 0$ annehmen. Entsprechend können wir $W(z) = 0$ annehmen. Setzen wir nun $x = y/z$, so sehen wir: Es gibt ein Element $x \in K$ mit

$$V(x) > 0, \quad W(x) < 0.$$

Aus der ersten dieser Relationen ergibt sich im Hinblick auf Formel (2a)

$$V(\gamma x) = V(x) - V(\pi) \geqq 0,$$

also

$$V(x) \geqq V(\pi). \tag{11}$$

Ist hierbei $V(x) > V(\pi)$, soersetzen wir x durch $x + \pi$ und schreiben wieder x statt $x + \pi$. Wir haben jetzt

$$V(x) = V(\pi) > 0, \quad W(x) < 0.$$

Nach den Formeln (2a) und (2b) ergibt sich hieraus

$$V(\gamma x) = V(x) - V(\pi) = 0, \quad W(\gamma x) = -q\,W(x) - W(\pi) \geqq 0.$$

In der zweiten dieser Relationen gilt dabei das $>$ Zeichen. Denn es ist ja $W(x^{-1}) > 0$; demnach gilt (11) für W und x^{-1} statt V und x. Das ergibt

$$-W(x) \geqq W(\pi)$$

und daher

$$-q\,W(x) \geqq q\,W(\pi) > W(\pi)$$

wegen $q > 1$. Wir haben nun

$$V(\gamma x) = 0, \qquad W(\gamma x) > 0.$$

Demnach liegt das Element $\gamma x \in R$ zwar in Zentrum Q von W, nicht aber im Zentrum P von V; es ist also in der Tat $P \neq Q$.

Wir formulieren nun ein allgemeines Lemma aus der Bewertungstheorie, in dessen Voraussetzungen die oben erhaltenen Informationen über V, P eingehen und dessen Behauptung gerade die Aussage von Lemma 3 ist.

[1]) Äquivalente Bewertungen werden als nicht verschieden betrachtet.

Lemma 4. *Es sei K ein Körper, $R \subset K$ Integritätsbereich, V eine über R liegende Bewertung von K und P das Zentrum von V auf R.*

Voraussetzungen.

(i) *Der Restklassenkörper $\bar{K}$ von V ist gleich R/P.* (Vgl. (6).)
(ii) *Jedes Element $x \in K$ mit $V(x) > 0$ ist Nullstelle eines Polynoms $\varphi(X) \in R[X]$ mit $\bar{\varphi}'(0) \neq 0$.* (Vgl. (9).)
(iii). *V ist die einzige über R liegende Bewertung von K, die auf R das Zentrum P besitzt.* (Vgl. (10).)

Behauptung. *Der Bewertungsring $\mathfrak{O}$ von V läßt sich als Quotientenring von R bezüglich P darstellen:*

$$\mathfrak{O} = \mathrm{Quot}_P(R).$$

Beweis. Die Voraussetzungen übertragen sich von R auf $\mathrm{Quot}_P(R)$. Demnach können wir zum Beweis von Lemma 4 annehmen, daß $R = \mathrm{Quot}_P(R)$, d. h., daß P das *einzige* maximale Ideal von R ist. Wir haben dann zu zeigen, daß $R = \mathfrak{O}$.

Aus (i) folgt $\mathfrak{O} = R + \mathfrak{M}$. Demnach haben wir zu zeigen, daß $\mathfrak{M} \subset R$. Es sei demgemäß $x \in \mathfrak{M}$. Wir setzen

$$R' = R[x]$$

und haben zu zeigen, daß $R' = R$.

Da P das einzige maximale Ideal von R ist, folgt aus (iii), daß $\mathfrak{O}$ ganz ist über R.[1]) Insbesondere ist x ganz über R, und daher ist R' ein endlicher R-Modul. Nach dem Lemma von KRULL-AZUMAYA[2]) genügt es daher zu zeigen, daß

$$R' = R + PR'.$$

Nun ist offenbar $R' = R[x] = R + xR'$. Wir haben demnach zu zeigen, daß

$$x \in PR'. \tag{12}$$

Es sei $P' = R' \cap \mathfrak{M}$ das Zentrum von V auf R'. Dann ist P' ein Primideal von R', welches PR' enthält. Wir behaupten, daß P' das *einzige* Primideal von R' ist, welches PR' enthält. Sei nämlich $Q' \subset R'$ ein Primoberideal von PR'. Nach dem Existenzsatz für Bewertungen gibt es eine über R' liegende Bewertung W von K mit dem Zentrum Q' auf R'. Diese Bewertung W liegt auch über R und besitzt dort das Zentrum $R \cap Q' \supset P$. Da P maximal ist in R, folgt $R \cap Q' = P$. Also besitzt W auf R das Zentrum P. Nach (iii) ergibt sich nun $W = V$ und somit $Q' = P'$.

Da also P' das einzige Primoberideal von PR' ist, ist jedes Element aus P' nilpotent modulo PR'. Insbesondere gilt wegen $x \in P'$

$$x^n \in PR' \tag{13}$$

mit geeignetem $n > 0$. Unsere Behauptung (12) besagt, daß dies sogar für $n = 1$ gilt. Das ergibt sich nun folgendermaßen: Aus (13) folgt für x^n eine Darstellung der Form

$$x^n = p_0 + p_1 x + \cdots + p_r x^r = h(x),$$

---

[1]) O. ZARISKI and P. SAMUEL, Commutative Algebra II. New York 1960, S. 17, Theorem 8.
[2]) NAGATA, Local Rings. S. 12, Nr. 4.

wobei $p_i \in P$. Setzt man $g(X) = X^n - h(X)$, so folgt

$$g(x) = 0, \qquad \bar{g}(X) = X^n. \tag{14}$$

Es sei nun N das Relationenideal von x über R, bestehend aus *allen* Polynomen $f(X) \in R[X]$ mit $f(x) = 0$. Es bedeute $\bar{N}$ das Bild von N bei der natürlichen Abbildung $R[X] \to \bar{K}[X]$. Wegen (i) ist diese Abbildung surjektiv; mithin ist $\bar{N}$ ein Ideal von $\bar{K}[X]$. Die Relationen (14) besagen, daß $X^n \in \bar{N}$.
Andererseits enthält $\bar{N}$ das in (ii) erwähnte Polynom $\bar{\varphi}(X)$. Es ist $\varphi(0) = \overline{\varphi(x)} = 0$, d. h., 0 ist eine Nullstelle von $\bar{\varphi}(X)$. Nach (ii) ist $\bar{\varphi}'(0) \neq 0$, d. h., 0 ist eine *einfache* Nullstelle von $\bar{\varphi}(X)$. Es ist daher

$$ggT(\bar{\varphi}(X), X^n) = X.$$

Da $\bar{N}$ mit je zwei Polynomen auch ihren größten gemeinsamen Teiler enthält, folgt

$$X \in \bar{N}.$$

Es gibt also ein Polynom $f(X) \in R[X]$ mit

$$f(x) = 0, \quad \bar{f}(X) = X.$$

Die letzte Relation kann auch in der Form

$$X \equiv f(X) \bmod P \cdot R[X]$$

geschrieben werden. Die Substitution $X \to x$ liefert nun

$$x \equiv 0 \bmod P \cdot R[x] = PR'$$

und damit die Behauptung (12). Q.e.d.

§ 3. Das Primidealspektrum des Kochen-Ringes

Wir betrachten weiterhin die zu Beginn von § 2 geschilderte Situation und übernehmen die dortigen Voraussetzungen und Bezeichnungen. Insbesondere ist

$$R = \mathrm{Quot}_T\, \mathfrak{o}[\gamma K]$$

der zu q und π gehörige Kochen-Ring von K über $\mathfrak{o}$.

Satz 5. *Die Primideale P des Kochen-Ringes R entsprechen umkehrbar eindeutig den über R liegenden Bewertungen V von K; dabei ist P das Zentrum von V auf R, und der Bewertungsring $\mathfrak{O}_V$ stellt sich dar als Quotientenring von R bezüglich P:*

$$P = R \cap \mathfrak{M}_V, \quad \mathfrak{O}_V = \mathrm{Quot}_P\,(R).$$[1]

Beweis. Für *maximale* Ideale von R ist das gerade der Inhalt von Lemma 3. Nun sei P ein beliebiges Primideal von R. Nach dem Zornschen Lemma gibt es ein maximales Ideal Q von R mit $P \subset Q$. Es folgt

$$\mathrm{Quot}_Q(R) \subset \mathrm{Quot}_P(R).$$

Hierbei ist $\mathrm{Quot}_Q(R)$ nach Lemma 2 ein Bewertungsring von K. Also ist auch $\mathrm{Quot}_P(R)$ ein Bewertungsring von K. (Jeder Oberring eines Bewertungsringes in seinem Quo-

[1]) R ist also ein sogenannter *Prüferscher Ring*.

tientenkörper ist ebenfalls ein Bewertungsring.) Es gibt also eine Bewertung V von K derart, daß

$$\mathrm{Quot}_P(R) = \mathfrak{O}_V.$$

Hieraus folgt

$$P = R \cap \mathfrak{M}_V,$$

und V ist offenbar die einzige Bewertung von K mit dem Zentrum P auf R. Q.e.d.

Folgerung 1. *K ist der Quotientenkörper von R.*

Dazu wende man Satz 5 auf die triviale Bewertung von K an. Diese hat K als ihren Bewertungsring, und sie besitzt das Nullideal als Zentrum auf R; also ist $K = \mathrm{Quot}(R)$.

Folgerung 2. *Es sei P ein Primideal von R. Die Menge der Primunterideale von P ist vermöge Inklusion total geordnet; ihre Anzahl ist gleich dem Rang der Wertgruppe der zu P gehörigen Bewertung V von K.*

Denn die Relation $Q \subset P$ ist gleichbedeutend mit $\mathrm{Quot}_P(R) \subset \mathrm{Quot}_Q(R)$, d. h. mit $\mathfrak{O}_V \subset \mathfrak{O}_W$, wenn V, W die zu P, Q gehörigen Bewertungen von K bedeuten. Die Menge der Oberringe des Bewertungsringes $\mathfrak{O}_V$ in K ist nun bekanntlich total geordnet, und ihre Anzahl ist gleich dem Rang von $V(K)$.

Folgerung 3. *Der Satz 5 bleibt richtig, wenn man dort R durch irgendeinen Oberring R' von R in K ersetzt. Insbesondere ist jeder solche Oberring ganzabgeschlossen.*

Denn jede über R' liegende Bewertung V von K liegt auch über R. Es seien $P' = R' \cap \mathfrak{M}_V$ und $P = R \cap \mathfrak{M}_V$ die Zentren von V auf R' bzw. R. Dann gilt $P = R \cap P'$ und somit

$$\mathrm{Quot}_P(R) \subset \mathrm{Quot}_{P'}(R') \subset \mathfrak{O}_V.$$

Nach Satz 5 ist jedoch $\mathrm{Quot}_P(R) = \mathfrak{O}_V$; das ergibt

$$\mathrm{Quot}_{P'}(R') = \mathfrak{O}_V,$$

und insbesondere ist V durch P' eindeutig bestimmt. Durchläuft P' ist die maximalen Ideale von R', so ist

$$R' = \bigcap_{P'} \mathrm{Quot}_{P'}(R');$$

somit ist R' als Durchschnitt von Bewertungsringen darstellbar und daher ganzabgeschlossen in seinem Quotientenkörper K.

Durch Satz 5 wird das Primidealspektrum von R durch die über R liegenden Bewertungen von K beschrieben. Es entsteht die Frage: Wie lassen sich die über R liegenden Bewertungen von K charakterisieren?

Definition. Eine Bewertung V von K heißt eine *(q, π)-Bewertung*, wenn

1. der Restklassenkörper $\bar{K}$ endlich ist und die Ordnung $|\bar{K}^{\times}|$ seiner multiplikativen Gruppe ein Teiler von $q-1$ ist; und
2. die Wertgruppe $V(K)$ ein kleinstes positives Element besitzt, nämlich $V(\pi)$.

Im Fall der Theorie der formal p-adischen Körper ist $q = \pi = p$, und es handelt sich gerade um die p-Bewertungen im Sinne von § 1.

Im folgenden Satz bezeichnet das Symbol $V \mid \mathfrak{o}$ eine *über* $\mathfrak{o}$ *liegende* Bewertung von K. Es ist klar, daß jede über R liegende Bewertung auch über $\mathfrak{o}$ liegt, denn wir haben ja den Grundring $\mathfrak{o}$ zur Definition von R benutzt; demzufolge ist $\mathfrak{o} \subset R$. Im Fall der Theorie der formal p-adischen Körper nimmt man $\mathfrak{o} = \mathbf{Z}$; jede Bewertung liegt über $\mathbf{Z}$, und die Bedingung, daß V über $\mathbf{Z}$ liegt, kann daher weggelassen werden.

Satz 6. *Eine Bewertung $V \mid \mathfrak{o}$ liegt genau dann über R, wenn entweder V eine (q, π)-Bewertung ist, oder wenn $V(\pi) = 0$ ist und der Restklassenkörper $\bar{K}$ eine $(q, \bar{\pi})$-Bewertung über $\bar{\mathfrak{o}}$ besitzt.*[1])

Im ersten Fall besitzt V auf R ein maximales Ideal als Zentrum, im zweiten Fall besitzt V ein nichtmaximales Zentrum auf R.

Beweis. (i) Wenn V über R liegt und auf R ein *maximales* Ideal P als Zentrum besitzt, so ist V eine (q, π)-Bewertung: Denn nach § 2 (4) ist $|\bar{K}^\times|$ ein Teiler von $q - 1$; nach § 2 (1) ist $V(\pi) > 0$, und nach § 2 (11) ist $V(x) \geqq V(\pi)$ für jedes positive Element $V(x) > 0$ der Wertgruppe $V(K)$.

(ii) Nun werde umgekehrt angenommen, $V \mid \mathfrak{o}$ sei eine (q, π)-Bewertung. Zunächst zeigen wir, daß V über $\mathfrak{o}[\gamma K]$ liegt, und haben dazu nachzuweisen, daß $V(\gamma x) \geqq 0$ für $x \in K$. Aus der Bedingung 1 für (q, π)-Bewertungen folgt $\bar{x}^{q-1} - 1 = 0$ für jedes Element $\bar{x} \in \bar{K}^\times$; also ist $\wp(\bar{x}) = \bar{x}^q - \bar{x} = 0$ für jedes $\bar{x} \in \bar{K}$. Das bedeutet: $V(\wp x) > 0$ für jedes $x \in K$ mit $V(x) \geqq 0$. Betrachten wir daher die Formeln (2) aus §2, so sehen wir, daß der Fall (2d) nicht vorkommt. In den Fällen (2a) bis (2c) hat man zufolge der Bedingung 2 einer (q, π)-Bewertung:

$$V(x) > 0 \Rightarrow V(x) \geqq V(\pi),$$

$$V(x) < 0 \Rightarrow -q\,V(x) \geqq V(\pi),$$

$$V(\wp x) > 0 \Rightarrow V(\wp x) \geqq V(\pi).$$

In jedem Fall ergibt sich nach (2a) bis (2c)

$$V(\gamma x) \geqq 0.$$

Also liegt V über $\mathfrak{o}[\gamma K]$; dabei ist noch $V(\pi) > 0$.[2]) Jedes Element $t = 1 + \pi f$ aus T ist demnach $\equiv 1 \bmod \mathfrak{M}_V$, also eine Einheit in $\mathfrak{O}_V$. Es folgt

$$R = \mathrm{Quot}_T\, \mathfrak{o}[\gamma K] \subset \mathfrak{O}_V.$$

Mithin liegt V über R. Ist P das Zentrum von V auf R, so ist $R/P \subset \bar{K}$. Da $\bar{K}$ endlich ist, so ist also auch R/P endlich; als endlicher Integritätsbereich ist R/P ein Körper. Mithin ist P *maximal* in R.

---

[1]) Wie üblich bezeichnen wir mit $\bar{\pi}$, $\bar{\mathfrak{o}}$ die Bilder von π, $\mathfrak{o}$ im Restklassenkörper $\bar{K}$ von V.

[2]) Bemerkung. In § 2 hatten wir als Generalvoraussetzung angegeben: π ist keine Einheit in $\mathfrak{o}[\gamma K]$. Diese Voraussetzung wurde jedoch bei diesem Schluß nicht benutzt. Wir haben nämlich bewiesen: Wenn K eine (q, π)-Bewertung $V/\mathfrak{o}$ besitzt, so liegt V über $\mathfrak{o}[\gamma K]$; wegen $V(\pi) > 0$ folgt daraus, daß π keine Einheit in $\mathfrak{o}[\gamma K]$ ist, d. h., daß die Voraussetzung von §2 erfüllt ist. Vgl. die Bemerkung im Anschluß an Folgerung 1.

(iii) Nun diskutieren wir die über R liegenden Bewertungen mit *nichtmaximalem* Zentrum auf R. Es sei V eine solche Bewertung und P ihr Zentrum auf R. Es gibt ein maximales Ideal Q von R, das P enthält:

$$P \subset Q, \quad P \neq Q.$$

Es sei W die zu Q gehörige Bewertung von K im Sinne von Satz 5. Es ist dann

$$\mathfrak{O}_W \subset \mathfrak{O}_V, \qquad \mathfrak{O}_W \neq \mathfrak{O}_V. \tag{15}$$

Nach (i) ist hierbei $W \mid \mathfrak{o}$ eine (q, π)-Bewertung.

Hiervon gilt auch die Umkehrung: Ist $V \mid \mathfrak{o}$ irgendeine Bewertung von K und gibt es eine (q, π)-Bewertung $W \mid \mathfrak{o}$ derart, daß (15) gilt, so liegt W nach (ii) über R und daher liegt auch V über R; für die Zentren P, Q von V, W auf R gilt dann $P \subset Q$, $P \neq Q$, und daher ist P nicht maximal in R.

Wir haben demnach die Relationen (15) weiter zu diskutieren.

Es bedeute $\bar{K} = \bar{K}_V$ den Restklassenkörper zu V, und es seien $\bar{\pi}$, $\bar{\mathfrak{o}}$ die Bilder von π, $\mathfrak{o}$ in $\bar{K}$.

Diejenigen Bewertungen $W \mid \mathfrak{o}$, die die Relationen (15) erfüllen, entsprechen umkehrbar eindeutig den *nichttrivialen* Bewertungen $\bar{W} \mid \bar{\mathfrak{o}}$ von $\bar{K}$; dabei ist der Bewertungsring $\bar{\mathfrak{O}}$ von $\bar{W}$ das Bild von $\mathfrak{O}_W$ in $\bar{K}$, und umgekehrt ist $\mathfrak{O}_W$ das volle Urbild von $\bar{\mathfrak{O}}$ in K. Man sagt, W entsteht durch *Komposition* der Bewertung V von K mit der Bewertung $\bar{W}$ von $\bar{K}$.[1])

W und $\bar{W}$ besitzen denselben Restklassenkörper: wenn demnach W die Bedingung 1 für (q, π)-Bewertungen erfüllt, so erfüllt auch $\bar{W}$ diese Bedingung, und umgekehrt.

Die Wertgruppe $\bar{W}(\bar{K})$ ist eine *isolierte Untergruppe* der Wertgruppe $W(K)$, und zwar besteht sie aus allen Werten $W(x)$, wobei $x \in K$ und $V(x) = 0$. Für diese x gilt dann

$$\bar{W}(\bar{x}) = W(x).$$

Und zwar handelt es sich um eine *nichttriviale* isolierte Untergruppe; wenn daher W die Bedingung 2 für (q, π)-Bewertungen erfüllt, so enthält $\bar{W}(\bar{K})$ das kleinste positive Element $W(\pi)$ von $W(K)$. Für dieses gilt

$$W(\pi) = \bar{W}(\bar{\pi}),$$

und $\bar{W}(\bar{\pi})$ ist demnach kleinstes positives Element von $\bar{W}(\bar{K})$. Insbesondere ist $\bar{\pi} \neq 0$, d. h. $V(\pi) = 0$.

Hiervon gilt auch die Umkehrung: Wenn $\bar{\pi} \neq 0$ und $\bar{W}(\bar{\pi})$ kleinstes positives Element von $\bar{W}(\bar{K})$ ist, so ist $W(\pi)$ kleinstes positives Element von $W(K)$, denn $\bar{W}(\bar{K})$ ist eine *isolierte* Untergruppe von $W(K)$.

Zusammengenommen ergibt sich: Wenn $W \mid \mathfrak{o}$ eine (q, π)-Bewertung ist, so ist $\bar{W} \mid \bar{\mathfrak{o}}$ eine (q, π)-Bewertung, und umgekehrt. Q. e. d.

Folgerung 1. *K besitzt mindestens eine (q, π)-Bewertung $V \mid \mathfrak{o}$.*

Denn R besitzt ja mindestens ein maximales Ideal P.

Bemerkung. Unseren Überlegungen liegt die in § 2 angegebene Voraussetzung zugrunde, daß π keine Einheit in $\mathfrak{o}[\gamma K]$ ist. In Analogie zum Fall der formal p-adischen Körper könnte man K einen *formal (q, π)-adischen Körper über $\mathfrak{o}$* nennen,

[1]) Für die hier und im folgenden verwendeten elementaren Tatsachen über die Komposition von Bewertungen verweisen wir etwa auf Zariski-Samuel, Commutative Algebra II. Chap. VI, § 10.

wenn diese Voraussetzung erfüllt ist. Demnach läßt sich Folgerung 1 auch so aussprechen: Wenn K formal (q, π)-adisch über $\mathfrak{o}$ ist, so besitzt K eine (q, π)-Bewertung $V \mid \mathfrak{o}$. Hiervon gilt nun auch die Umkehrung, wie wir in der Fußnote zu Teil (ii) des vorangegangenen Beweises bemerkt haben. Also folgt:

K ist dann und nur dann formal (q, π)-adisch über $\mathfrak{o}$, wenn K eine (q, π)-Bewertung $V \mid \mathfrak{o}$ besitzt.

Im Fall der formal p-adischen Körper ist das gerade der Inhalt von Satz I aus § 1.

Übrigens lassen sich jetzt auch die Bewertungen $V \mid R$ mit nichtmaximalem Zentrum P auf R wie folgt beschreiben:

Eine Bewertung $V \mid \mathfrak{o}$ liegt genau dann über R und besitzt auf R ein nichtmaximales Zentrum, wenn $V(\pi) = 0$ ist und wenn der Restklassenkörper $\bar{K}$ formal $(q, \bar{\pi})$-adisch über $\bar{\mathfrak{o}}$ ist.

Das ist nach dem Gezeigten nur eine Umformulierung der Bedingung aus Satz 6.

Folgerung 2. *Der Kochen-Ring R läßt sich als Durchschnitt*

$$R = \bigcap \mathfrak{O}_V$$

von Bewertungsringen darstellen, wobei V die (q, π)-Bewertungen über $\mathfrak{o}$ durchläuft.

Denn diese Bewertungsringe $\mathfrak{O}_V$ sind ja nach Satz 6 und Satz 5 gerade die Quotientenringe $\mathrm{Quot}_P(R)$ von R zu seinen maximalen Idealen; andererseits ist R der Durchschnitt dieser Quotientenringe.

Bemerkung. In Analogie zum Fall der formal p-adischen Körper könnte man ein Element $x \in K$ *total (q, π)-adisch ganz über* $\mathfrak{o}$ nennen, wenn $V(x) \geqq 0$ für jede (q, π)-Bewertung $V \mid \mathfrak{o}$ ist. Dann läßt sich Folgerung 2 auch wie folgt aussprechen:

Der Kochen-Ring $R = \mathrm{Quot}_T\, \mathfrak{o}[\gamma K]$ besteht aus genau den total (q, π)-adisch ganzen Elementen über $\mathfrak{o}$. Mit anderen Worten: *Ein Element $x \in K$ ist genau dann total (q, π)-adisch ganz über $\mathfrak{o}$, wenn sich x in der Form*

$$x = \frac{f}{1 + \pi g}$$

mit $f, g \in \mathfrak{o}[\gamma K]$ darstellen läßt.

Im Fall der formal p-adischen Körper ist das gerade der Inhalt von Satz II aus § 1.

Folgerung 3. *Ein Primideal P von R ist dann und nur dann maximal, wenn $\pi \in P$.*

Ist nämlich V die zu P gehörige Bewertung, so folgt aus Satz 6: Es ist $V(\pi) > 0$ oder $V(\pi) = 0$, je nachdem, ob P maximal ist oder nicht.

Folgerung 4. *Das Jacobsonsche Radikal von R ist gleich dem von π erzeugten Hauptideal πR.*

Das Jacobsonsche Radikal J von R ist nämlich definiert als der Durchschnitt der maximalen Ideale P von R. Nach Satz 6 ist daher $J = \bigcap \mathfrak{M}_V$, wobei V die (q, π)-Bewertungen über $\mathfrak{o}$ durchläuft. Für eine solche Bewertung ist $V(\pi)$ kleinstes positives Element der Wertgruppe $V(K)$; das bedeutet: das maximale Ideal $\mathfrak{M}_V$ wird durch π erzeugt. Also folgt

$$J = \bigcap \pi\mathfrak{O}_V = \pi \cdot \bigcap \mathfrak{O}_V = \pi R,$$

im Hinblick auf Folgerung 2.

Nun wollen wir noch den *verschärften Annäherungssatz* für die (q, π)-Bewertungen $V \mid \mathfrak{o}$ besprechen:

Die Wertgruppe $V(K)$ jeder solchen Bewertung V besitzt ein kleinstes positives Element, nämlich $V(\pi)$. Die von $V(\pi)$ erzeugte Untergruppe von $V(K)$ ist *isoliert* und isomorph zur additiven Gruppe $\mathbf{Z}$; wir können und wollen $\mathbf{Z}$ mit dieser isolierten Untergruppe identifizieren. Insbesondere ist demnach jetzt $V(\pi) = 1$.
Ist $n \geqq 0$ eine natürliche Zahl, so wird durch die Bedingung

$$V(x) \geqq n$$

ein Ideal des Bewertungsringes $\mathfrak{O}$ von V definiert, und zwar handelt es sich gerade um die n-te Potenz $\mathfrak{M}^n$ des maximalen Ideals $\mathfrak{M} = \pi\mathfrak{O}$.
Ist $P = R \cap \mathfrak{M}$ das Zentrum von V auf R, so ist

$$P^n = R \cap \mathfrak{M}^n,$$

und P^n besteht aus allen $x \in R$ mit $V(x) \geqq n$. Da nun $\mathfrak{O} = \mathrm{Quot}_P(R)$ und da P maximal ist in R, folgt bekanntlich

$$R/P^n = \mathfrak{O}/\mathfrak{M}^n.$$

Mit anderen Worten: Zu jedem $a \in \mathfrak{O}$ und $n \geqq 0$ gibt es ein $b \in R$ derart, daß

$$V(b - a) \geqq n.$$

Nun seien $V_1, \ldots, V_s$ endlich viele vorgegebene, paarweise verschiedene (q, π)-Bewertungen über $\mathfrak{o}$. Ferner seien $a_1, \ldots, a_s$ vorgegebene Elemente aus den Bewertungsringen $\mathfrak{O}_1, \ldots, \mathfrak{O}_s$ der V_i, und $n_1, \ldots n_s$ seien natürliche Zahlen. Nach obigem gibt es dann Elemente $b_1, \ldots b_s \in R$ derart, daß

$$V_i(b_i - a_i) \geqq n_i \qquad (1 \leqq i \leqq s).$$

Die Zentren $P_1, \ldots, P_s$ der $V_1, \ldots, V_s$ auf R sind paarweise verschiedene maximale Ideale. Daraus folgt: Die Potenzen $P_i^{n_i}$ sind paarweise *komaximal*, d. h.

$$P_i^{n_i} + P_j^{n_j} = R \qquad (i \neq j).$$

Demnach lassen sich die Kongruenzbedingungen

$$x \equiv b_i \bmod P_i^{n_i} \qquad (1 \leqq i \leqq s)$$

sicherlich durch ein Element $x \in R$ lösen. Das bedeutet:

$$V_i(x - b_i) \geqq n_i \qquad (1 \leqq i \leqq s)$$

und daher auch

$$V_i(x - a_i) \geqq n_i \qquad (1 \leqq i \leqq s).$$

Wegen $x \in R$ ist nun aber auch

$$V(x) \geqq 0$$

für *jede* (q, π)-Bewertung $V|\mathfrak{o}$. Das ergibt den

Satz 7 (*Verschärfter Annäherungssatz*). *Es seien* $V_i|\mathfrak{o}$ $(1 \leqq i \leqq s)$ *endlich viele vorgegebene* (q, π)-*Bewertungen. Zu jedem* V_i *sei ein Element* $a_i \in K$ *mit* $V_i(a_i) \geqq 0$ *vorgegeben sowie eine natürliche Zahl* $n_i \geqq 0$. *Dann gibt es stets ein Element* $x \in K$, *das simultan die Approximationsforderungen*

$$V_i(x - a_i) \geqq n_i \qquad (1 \leqq i \leqq s)$$

erfüllt, zusammen mit der Ganzheitsforderung

$$V(x) \geqq 0$$

für jede (q, π)-*Bewertung* $V|\mathfrak{o}$.

Insbesondere gilt dieser Approximationssatz natürlich für p-Bewertungen im Rahmen der Theorie der formal p-adischen Körper.

Manuskripteingang: 12. 11. 1970

VERFASSER:

PETER ROQUETTE, Mathematisches Institut der Universität Heidelberg