Die irreduziblen Darstellungen abelscher Gruppen über beliebigen Körpern

GERHARD PAZDERSKI

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

Einleitung

Die irreduziblen Darstellungen einer endlichen abelschen Gruppe $\mathfrak{g}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K mit einer die Ordnung von $\mathfrak{g}$ nicht teilenden Charakteristik sind wohlbekannt. Ist $a_1, \ldots, a_r$ eine Basis von $\mathfrak{g}$, so wähle man zu jedem a_i in K eine Einheitswurzel ζ_i, deren Ordnung mit der Ordnung h_i von a_i übereinstimmt. Dann durchläuft

$$a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_r^{x_r} \to \zeta_1^{t_1 x_1} \zeta_2^{t_2 x_2} \cdots \zeta_r^{t_r x_r} \tag{1}$$

alle irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{g}$ über K und jede genau einmal, wenn $t_1, t_2 \ldots, t_r$ alle n-Tupel ganzer rationaler Zahlen mit $0 \leqq t_i < h_i$ für $i = 1, \ldots, r$ durchläuft. Nun führen gewisse Anwendungen der Darstellungstheorie auf endliche Gruppen häufig zu Darstellungen über solchen Grundkörpern, die entweder nicht algebraisch abgeschlossen sind oder eine die Gruppenordnung teilende Charakteristik haben. Das typische Beispiel hierfür sind Gruppen mit einem elementar abelschen p-Normalteiler. Die Faktorgruppe nach diesem Normalteiler erfährt auf ihm als Darstellungsmodul in bekannter Weise (vgl. auch § 2) eine Darstellung über $GF(p)$. Diese Darstellung spiegelt die Transformationswirkung der Gesamtgruppe auf den Normalteiler wider. Hierbei kann p die Ordnung der Faktorgruppe teilen. Bei Betrachtung der Darstellung im Zusammenhang mit der Gruppenstruktur ist es prinzipiell unmöglich, den Grundkörper $GF(p)$ durch einen umfassenderen, etwa einen algebraisch abgeschlossenen Oberkörper, zu ersetzen. Somit scheint die Zugrundelegung eines möglichst allgemeinen Grundkörpers bei der Untersuchung von Gruppendarstellungen angebracht. § 1 enthält eine vollständige Aufzählung der inäquivalenten irreduziblen Darstellungen einer endlichen abelschen Gruppe über einem beliebigen Körper. Sie leiten sich ab aus der regulären Darstellung gewisser Kreisteilungskörper über dem Grundkörper in Anlehnung an die Abbildung (1). Die Äquivalenzfrage hängt naturgemäß eng mit den Automorphismen der genannten Körpererweiterungen zusammen. In § 2 liefern wir als Anwendung der gewonnenen Erkenntnisse eine Klassifikation der endlichen Gruppen mit folgender Eigenschaft:

$\mathscr{E}$: Die Gruppe ist zerfallende Erweiterung ihrer Ableitung, welche ihrerseits direkt zerfällt in abelsche minimale Normalteiler der ganzen Gruppe.

Solche Gruppen werden charakterisiert durch abelsche Gruppen und Systeme irreduzibler Darstellungen derselben über endlichen Primkörpern.

Bezeichnungen

$\mathfrak{g}$ = Gruppe (alle vorkommenden Gruppen seien endlich); $|\mathfrak{g}|$ = Ordnung von $\mathfrak{g}$; $\exp \mathfrak{g}$ = Exponent von $\mathfrak{g}$ (= kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches der Ordnungen aller Elemente von $\mathfrak{g}$); $\mathfrak{g}'$ = Kommutatorgruppe von $\mathfrak{g}$ = Ableitung von $\mathfrak{g}$; Frattinigruppe von $\mathfrak{g}$ = Durchschnitt aller maximalen Untergruppen von $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{g}$ (bzw. $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$): $\mathfrak{h}$ ist Untergruppe (bzw. echte Untergruppe) von $\mathfrak{g}$; $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ = die aus den Gruppenelementen $a_1, \ldots, a_k$ erzeugte Untergruppe; $\operatorname{ord} a$ = Ordnung des Gruppenelementes a; p, q (auch mit Index und Stern) bezeichnen stets Primzahlen; K = (kommutativer) Körper; $\operatorname{char} K$ = Charakteristik von K, $\sqrt[n]{1}$ = primitive n-te Einheitswurzel in einem Oberkörper von K, falls $\operatorname{char} K \nmid n$.

Ist Λ endlichdimensionale Algebra über K, so bezeichnet $a \to (a)_{\Lambda|K}$ die rechtsreguläre Darstellung von Λ über K. Wir wollen sie als Matrixdarstellung auffassen, so daß also nach Wahl einer Basis $u_1, \ldots, u_n$ von Λ über K gilt $(a)_{\Lambda|K} = ||\alpha_{ij}||$ mit Elementen α_{ij} aus K, welche gemäß

$$u_i a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} u_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

zu bestimmen sind. Mit $\operatorname{aut}(\Lambda|K)$ wird die Gruppe der K elementweise festlassenden Automorphismen von Λ bezeichnet. Jedes $\sigma \in \operatorname{aut}(\Lambda|K)$ ist eine K-lineare Transformation und kann in bezug auf die Basis $u_1, \ldots, u_n$ durch eine Matrix $(\sigma)_{\Lambda|K} = ||\beta_{ij}||$ beschrieben werden mit Elementen β_{ij} von K, die sich aus

$$u_i^{\sigma} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} u_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ergeben. $\sigma \to (\sigma)_{\Lambda|K}$ ist eine Darstellung von $\operatorname{aut}(\Lambda|K)$ über K. Wird für die Darstellungen $(a)_{\Lambda|K}$ $(a \in \Lambda)$ und $(\sigma)_{\Lambda|K}$ $\big(\sigma \in \operatorname{aut}(\Lambda|K)\big)$ dieselbe Basis zugrunde gelegt — wie es hier geschehen ist und auch im folgenden angenommen werden soll —, so gilt

$$(\sigma)_{\Lambda|K}^{-1} (a)_{\Lambda|K} (\sigma)_{\Lambda|K} = (a^{\sigma})_{\Lambda|K}.$$

Der Grad der Matrizen $(a)_{\Lambda|K}$, $(\sigma)_{\Lambda|K}$ ist die Dimension n von Λ bezüglich K, die auch mit $|\Lambda : K|$ bezeichnet wird. Für eine Teilmenge $\Lambda_1 \subseteqq \Lambda$ sei $(\Lambda_1)_{\Lambda|K} = \{(a)_{\Lambda|K} \mid a \in \Lambda_1\}$.

Für zwei Darstellungen $\partial_1 : s \to A_1(s)$, $\partial_2 : s \to A_2(s)$ von $\mathfrak{g}$ bedeutet $\partial_1 \sim \partial_2$ die Äquivalenz von ∂_1 und ∂_2 über dem gemeinsamen Grundkörper, d. h. die Existenz einer Matrix T mit $T^{-1} A_1(s) T = A_2(s)$ für alle $s \in \mathfrak{g}$. Ist π ein Homomorphismus von $\mathfrak{g}$ in die Gruppe $\mathfrak{g}^*$ und $\partial^* : s^* \to A^*(s^*)$ eine Darstellung von $\mathfrak{g}^*$, so bezeichne $\partial^{*\pi}$ die Darstellung $s \to A^*(s^{\pi})$ $(s \in \mathfrak{g})$ von $\mathfrak{g}$ · $\operatorname{grad} \partial$ = Grad der Darstellung ∂; $\ker \partial$ = Kern der Darstellung ∂; triviale Darstellung = Darstellung durch eine Einheitsmatrix.

§ 1

Hilfssatz 1. *Sei* $\mathfrak{g}$ *abelsch. Ist* $h \mid \exp \mathfrak{g}$, $\operatorname{char} K \nmid h$, $\Lambda = K\left(\sqrt[h]{1}\right)$ *und* $s \to \zeta(s)$ $(s \in \mathfrak{g})$ *eine homomorphe Abbildung von* $\mathfrak{g}$ *auf* $\langle\sqrt[h]{1}\rangle$, *dann ist*

$$s \to \left(\zeta(s)\right)_{\Lambda|K} \qquad (s \in \mathfrak{g})$$

eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{g}$ *über* K. *Umgekehrt kann jede irreduzible Darstellung von* $\mathfrak{g}$ *über* K *bis auf Äquivalenz auf diese Weise gewonnen werden.*

Beweis. Die über K gebildete lineare Hülle aller $\zeta(s)$ $(s \in \mathfrak{g})$ ist ganz Λ. Wäre $\left(\zeta(\mathfrak{g})\right)_{\Lambda|K}$ reduzibel, so wäre auch $(\Lambda)_{\Lambda|K}$ reduzibel, wonach Λ ein von sich selbst und dem Nullideal verschiedenes Rechtsideal haben müßte, was nicht der Fall ist.
Sei umgekehrt $s \to A(s)$ eine beliebige irreduzible Darstellung von $\mathfrak{g}$ über K. Da die lineare Hülle $\mathfrak{A}$ von $A(\mathfrak{g})$ über K eine einfache Matrixalgebra ist, gibt es zu ihr eine Divisionsalgebra $\Delta \mid K$ und eine natürliche Zahl n, so daß $\mathfrak{A}$ nach geeigneter Transformation mit der Gesamtheit aller Matrizen

$$\begin{Vmatrix} (a_{11})_{\Delta|K} & \cdots & (a_{1n})_{\Delta|K} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{n1})_{\Delta|K} & \cdots & (a_{nn})_{\Delta|K} \end{Vmatrix}$$

übereinstimmt, wo die a_{ij} beliebige Elemente aus Δ sind (vgl. etwa Weyl [4], S. 91). Wegen der Kommutativität von $A(\mathfrak{g})$ muß $n = 1$ und $\Delta \mid K$ eine Körpererweiterung sein. Es wird dann $A(s) = \left(\zeta(s)\right)_{\Delta|K}$ mit $\zeta(s) \in \Delta$. Die Elemente $\zeta(s)$ $(s \in \mathfrak{g})$ bilden eine zu $\mathfrak{g}$ homomorphe Untergruppe der multiplikativen Gruppe von Δ. Diese Untergruppe muß zyklisch sein, wird also aus einer Einheitswurzel η erzeugt. Ist h deren Ordnung, so gilt $\operatorname{char} K \nmid h$, und wir können $\eta = \sqrt[h]{1}$ schreiben. Da die über K gebildete lineare Hülle $\mathfrak{A}$ aller $\left(\zeta(s)\right)_{\Delta|K}$ mit $s \in \mathfrak{g}$ ganz $(\Delta)_{\Delta|K}$ ist, muß die lineare Hülle der η-Potenzen über K ganz Δ sein. Daher ist $\Delta = K(\eta) = K\left(\sqrt[h]{1}\right)$. Schließlich haben wir $h \mid \exp \mathfrak{g}$, weil die zyklische Gruppe $\langle\eta\rangle$ der Ordnung h homomorphes Bild von $\mathfrak{g}$ ist.

Satz 1. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine abelsche Gruppe mit der Basis* $a_1, \ldots, a_r$, *weiter* h_i *der größte nicht durch* $\operatorname{char} K$ *teilbare Teiler von* $\operatorname{ord} a_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ *sowie* h *das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von* $h_1, \ldots, h_r$. *Mit* ζ *werde eine fest gewählte primitive* h-*te Einheitswurzel bezeichnet. Dann ist durch jedes Zahlensystem* $t_1, \ldots, t_r$ *mit* $\frac{h}{h_i} \Big| t_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ *gemäß*

$$a_1 \to (\zeta^{t_1})_{K(\zeta^d)|K}, \ldots, a_r \to (\zeta^{t_r})_{K(\zeta^d)|K}, \tag{2}$$

wo $d = (t_1, \ldots, t_r, h)$, *eine irreduzible Darstellung von* $\mathfrak{g}$ *über* K *gegeben, und man erhält so alle irreduziblen Darstellungen von* $\mathfrak{g}$ *über* K.
Die durch das System $t_1, \ldots, t_r$ *bestimmte Darstellung* (2) *ist genau dann zu der durch das System* $t_1', \ldots, t_r'$ *bestimmten Darstellung äquivalent, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $(t_1, \ldots, t_r, h)$ *und* $(t_1', \ldots, t_r', h)$ *sind dieselbe Zahl* d.
2. *Es gibt ein* $\sigma \in \operatorname{aut}\left(K(\zeta^d) \mid K\right)$ *mit* $(\zeta^{t_i})^\sigma = \zeta^{t_i'}$ *für* $i = 1, \ldots, r$.

Beweis. Beim Nachweis der Irreduzibilität und Vollständigkeit der angegebenen Darstellungen benutzen wir Hilfssatz 1. Danach erhält man stets irreduzible und auch sämtliche irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{g}$ über K durch

$$s \to (\zeta(s))_{K(\zeta^d)|K} \qquad (s \in \mathfrak{g}),$$

wenn dabei d alle Teiler von h und jeweils $s \to \zeta(s)$ alle Homomorphismen von $\mathfrak{g}$ auf $\langle\zeta^d\rangle$ durchläuft. Offenbar wird durch $a_1 \to \zeta^{t_1}, \ldots, a_r \to \zeta^{t_r}$ genau dann ein Homomorphismus von $\mathfrak{g}$ auf $\langle\zeta^d\rangle$ vermittelt, wenn $\zeta^{t_i h_i} = 1$, d. h. $h \mid t_i h_i$ oder $\left.\frac{h}{h_i}\right| t_i$ für $i = 1, \ldots, r$ sowie $\langle\zeta^{t_1}, \ldots, \zeta^{t_r}\rangle = \langle\zeta^d\rangle$, was bei $d \mid h$ mit $(t_1, \ldots, t_r, h) = d$ gleichwertig ist.
Sind die Bedingungen 1. und 2. erfüllt, so gilt

$$(\sigma)^{-1}(\zeta^{t_i})(\sigma) = (\zeta^{t_i'}) \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

wo $(\ ) = (\ )_{K(\zeta^d)|K}$ zu setzen ist, und wir haben damit Äquivalenz der zu $t_1, \ldots, t_r$ und $t_1', \ldots, t_r'$ gehörenden Darstellungen.
Nun seien umgekehrt die zu $t_1, \ldots, t_r$ und $t_1', \ldots, t_r'$ gehörenden Darstellungen äquivalent. Dann haben $\langle\zeta^{t_1}, \ldots, \zeta^{t_r}\rangle$ und $\langle\zeta^{t_1'}, \ldots, \zeta^{t_r'}\rangle$ dieselbe Ordnung, woraus 1. folgt. Weiter gibt es eine nichtsinguläre Matrix T über K vom Grad $|K(\zeta^d) : K|$ mit

$$T^{-1}(\zeta^{t_i})_{K(\zeta^d)|K}\, T = (\zeta^{t_i'})_{K(\zeta^d)|K} \qquad (i = 1, \ldots, r). \tag{3}$$

Beachten wir, daß die lineare Hülle über K von $\langle\zeta^{t_1}, \ldots, \zeta^{t_r}\rangle$ und auch die von $\langle\zeta^{t_1'}, \ldots, \zeta^{t_r'}\rangle$ gleich $K(\zeta^d)$ ist, so ergibt sich aus (3), daß die Abbildung $\zeta^{t_i} \to \zeta^{t_i'}$ $(i = 1, \ldots, r)$ fortgesetzt werden kann zu einem Automorphismus σ von $K(\zeta^d)$ bezüglich K. Damit ist 2. gezeigt.

Wir wollen dem Satz 1 noch eine andere Formulierung geben, die sich mehr an (1) anschließt.

Satz 1'. *Seien $\mathfrak{g}, a_1, \ldots, a_r, h_1, \ldots, h_r$ wie in Satz 1 erklärt. Mit ζ_i werde eine fest gewählte primitive h_i-te Einheitswurzel bezeichnet. Dann ist für beliebige $t_1, \ldots, t_r$ durch*

$$a_1 \to (\zeta_1^{t_1})_{\Lambda|K}, \ldots, a_r \to (\zeta_r^{t_r})_{\Lambda|K}, \tag{4}$$

wo $\Lambda = K(\zeta_1^{t_1}, \ldots, \zeta_r^{t_r})$, eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{g}$ über K gegeben, und man erhält so alle irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{g}$ über K.
Die durch das System $t_1, \ldots, t_r$ bestimmte Darstellung (4) ist genau dann mit der durch $t_1', \ldots, t_r'$ bestimmten Darstellung äquivalent, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. *(t_i, h_i) und (t_i', h_i) sind dieselbe Zahl d_i für $i = 1, \ldots, r$.*
2. *Es gibt ein $\sigma \in \mathrm{aut}\,(K(\zeta_1^{d_1}, \ldots, \zeta_r^{d_r}) \mid K)$ mit $(\zeta_i^{t_i})^\sigma = \zeta_i^{t_i'}$ für $i = 1, \ldots, r$.*

Beweis. Sei ζ die in Satz 1 gewählte primitive h-te Einheitswurzel. Dann gilt $\zeta_i = \zeta^{\frac{h}{h_i} g_i}$ mit einer gewissen ganzen rationalen Zahl g_i, die notwendigerweise zu h_i teilerfremd ist $(i = 1, \ldots, r)$. Wir betrachten die Kongruenzen

$$\frac{h}{h_i} g_i t_i \equiv \bar{t}_i\ (h) \qquad \text{für } i = 1, \ldots, r. \tag{5}$$

Diese sind bei gegebenen $t_1, \ldots, t_r$ nach $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r$ auflösbar, und dann ist $\frac{h}{h_i} \mid \bar{t}_i$ für $i = 1, \ldots, r$, sowie umgekehrt bei gegebenen $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r$ mit $\frac{h}{h_i} \mid \bar{t}_i$ nach $t_1, \ldots, t_r$ auflösbar. Setzen wir $(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r, h) = d$, dann wird $K(\zeta_1^{t_1}, \ldots, \zeta_r^{t_r}) = K(\zeta^{\bar{t}_1}, \ldots, \zeta^{\bar{t}_r}) = K(\zeta^d)$. Denken wir uns in Satz 1 überall $\bar{t}_i$ statt t_i geschrieben, so erkennen wir auf Grund von (5), daß jede Darstellung (2) in die Form (4) und jede Darstellung (4) in die Form (2) umgesetzt werden kann.
Wir müssen noch zeigen, daß die Eigenschaften 1. und 2. von Satz 1 für Systeme $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r$ und $\bar{t}_1', \ldots, \bar{t}_r'$ an Stelle von $t_1, \ldots, t_r$ und $t_1', \ldots, t_r'$ gleichwertig sind mit den Eigenschaften 1. und 2. in Satz 1′ für die gemäß (5) zugeordneten Systeme $t_1, \ldots, t_r$ und $t_1', \ldots, t_r'$. Setzen wir zunächst erstere voraus. Aus 2. folgt $(\bar{t}_i, h) = (\bar{t}_i', h)$ und daraus mit (5) weiter $(g_i t_i, h_i) = (g_i t_i', h_i)$. Wegen $(g_i, h_i) = 1$ ist dann $(t_i, h_i) = (t_i', h_i)$. Ferner haben wir zufolge 2. und (5) $(\zeta_i^{t_i})^\sigma = \zeta_i^{t_i'}$. Seien nun umgekehrt die Bedingungen 1. und 2. von Satz 1′ erfüllt. Aus 2. folgt $\left(\zeta^{\frac{h}{h_i} g_i t_i}\right)^\sigma = \zeta^{\frac{h}{h_i} g_i t_i'}$, d. h. $(\zeta^{\bar{t}_i})^\sigma = \zeta^{\bar{t}_i'}$ und daraus weiter $(\bar{t}_i, h) = (\bar{t}_i', h)$ $(i = 1, \ldots, r)$. Damit ist auch $(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r, h) = (\bar{t}_1', \ldots, \bar{t}_r', h)$.

Es sei bemerkt, daß in den Sätzen 1 und 1′ jeweils die Bedingung 1. dazu dient, die Bedingung 2. formulieren zu können. In Fällen, bei denen 2. unabhängig von 1. formulierbar ist, folgt natürlich 1. aus 2. Ein Beispiel hierfür enthält der

Zusatz zu den Sätzen 1 und 1′. Im Falle $K = GF(p^f)$ können die Bedingungen 1. und 2. in Satz 1 (bzw. Satz 1′) ersetzt werden durch die einzige Bedingung: Es gibt ein x mit $t_i p^{fx} \equiv t_i' \mod h$ (bzw. $\bmod\ h_i$) für $i = 1, \ldots, r$.

Wir zeigen dies für Satz 1; hinsichtlich Satz 1′ schließt man analog. Man hat $K(\zeta^d) = GF(p^{fg})$, wo g minimal ist mit $\frac{h}{d} \mid p^{fg} - 1$. Die Automorphismen von $GF(p^{fg})$ über $GF(p^f)$ sind gegeben durch $\xi \to \xi^{p^{fx}}$ $(x = 1, \ldots, g)$. Aus 2. folgt $t_i p^{fx} \equiv t_i'(h)$ mit geeignetem x und aus diesem umgekehrt 2. sowie 1. wegen $p \nmid h$.

Als Anwendung betrachten wir die irreduziblen Darstellungen der zyklischen Gruppe $\mathfrak{g} = \langle a \rangle$ über dem rationalen Zahlkörper K und über $K = GF(p^f)$. Wir wenden Satz 1 an mit $r = 1$, $a_1 = a$, $t_1 = t$.

a) $K =$ rationaler Zahlkörper. Mit $h = \operatorname{ord} a$, $\zeta = \sqrt[h]{1}$ erhält man die Darstellungen in der Form $a \to (\zeta^{dt})_{K(\zeta^d)|K}$, wo d alle positiven Teiler von h und t bei festem d alle zu $\frac{h}{d}$ primen Zahlen durchläuft. Offenbar sind hier ζ^{dt} gerade die Nullstellen des $\frac{h}{d}$-ten Kreisteilungspolynoms über K. Wegen dessen Irreduzibilität können sie alle durch Automorphismen aus $\operatorname{aut}(K(\zeta^d) \mid K)$ ineinander übergeführt werden. Daher sind sämtliche inäquivalenten irreduziblen Darstellungen von $\langle a \rangle$ über K gegeben durch

$$a \to (\zeta^d)_{K(\zeta^d)|K},$$

wo d alle positiven Teiler von h durchläuft.

b) $K = GF(p^f)$. Wir verwenden wieder Satz 1 und berücksichtigen den angefügten Zusatz. Sei h der größte zu p prime Teiler von ord a und $\zeta = \sqrt[h]{1}$. Dann sind mit

$$a \to (\zeta^{dt})_{K(\zeta^d)|K} \tag{6}$$

sämtliche inäquivalenten irreduziblen Darstellungen von $\langle a\rangle$ über K gegeben, wenn d alle positiven Teiler von h sowie t bei festem d ein Vertretersystem für die aus p^f erzeugte Untergruppe in der primen Restklassengruppe mod $\frac{h}{d}$ durchläuft. Die Anzahl dieser Darstellungen ist

$$\sum_{d/h} \frac{\varphi(d)\,(p(d), f)}{p\,(d)},$$

wobei φ die Eulersche Funktion und $p(n)$ für $p \nmid n$ die Ordnung von p mod n bezeichnet. Ist die prime Restklassengruppe mod h zyklisch (d. h. $h = 2, 4$, ungerade Primzahlpotenz oder Doppeltes einer solchen) und etwa w eine Primitivwurzel mod h, so gilt $p^f \equiv w^k$, (h) mit geeignetem k, und man kann für t in (6) die Zahlen w^i mit $i = 1, \ldots, \left(k, \varphi\left(\frac{h}{d}\right)\right)$ nehmen.

Wie im konkreten Einzelfall die dargelegte Methode zur Bestimmung irreduzibler Darstellungen rechnerisch zu handhaben ist, zeigen wir an folgendem

Beispiel. $\mathfrak{g} = \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle$, ord $a_1 = 6$, ord $a_2 = 9$, $K = GF(13)$. Wir wenden Satz 1 an. Es ist $h_1 = 6$, $h_2 = 9$, $h = 18$, $K\left(\sqrt[18]{1}\right) = GF(13^3) = GF(13)(\vartheta)$ mit $\vartheta^3 - 2 = 0$. Man kann $\zeta = \vartheta^2$ wählen, ferner $1, \vartheta, \vartheta^2$ als Basis von $K(\zeta)$ über K. Dann wird

$$(\zeta)_{K(\zeta)|K} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Für $d = 1, 2$ ist $K(\zeta^d) = K(\zeta)$, und für $3\,|d|\,18$ haben wir $K(\zeta^d) = K$. Die irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{g}$ über K sind

$$\partial(t_1, t_2): a_1^{x_1} a_2^{x_2} \to \begin{cases} (\zeta)_{K(\zeta)|K}^{x_1 t_1 + x_2 t_2} & \text{für } (t_1, t_2, 18) \mid 2, \\ 2^{x_1 \frac{t_1}{3} + x_2 \frac{t_2}{3}} & \text{für } 3 \mid (t_1, t_2, 18). \end{cases}$$

Dabei sind nur Paare t_1, t_2 mit $3|t_1$, $2|t_2$ zugelassen. Zu $\partial(t_1, t_2)$ äquivalent sind genau die $\partial(t_1', t_2')$ mit $t_1' = 13^x t_1$, $t_2' = 13^x t_2$ mod 18, wo $x = 0, 1, 2, \ldots$ ist. Somit ergeben sich folgende inäquivalenten irreduziblen Darstellungen $\partial(t_1, t_2)$, geordnet nach $d = (t_1, t_2, 18)$:

$d = 1$: $\partial(3, 2)$, $\partial(3, 4)$, $\partial(9, 2)$, $\partial(9, 4)$, $\partial(15, 2)$, $\partial(15, 4)$;

$d = 2$: $\partial(6, 2)$, $\partial(6, 4)$, $\partial(12, 2)$, $\partial(12, 4)$, $\partial(18, 2)$, $\partial(18, 4)$;

$d = 3$: $\partial(3, 6)$, $\partial(3, 12)$, $\partial(3, 18)$, $\partial(9, 6)$, $\partial(9, 12)$, $\partial(15, 6)$, $\partial(15, 12)$, $\partial(15, 18)$;

$d = 6$: $\partial(6, 6)$, $\partial(6, 12)$, $\partial(6, 18)$, $\partial(12, 6)$, $\partial(12, 12)$, $\partial(12, 18)$, $\partial(18, 6)$, $\partial(18, 12)$;

$d = 9$: $\partial(9, 18)$;

$d = 18$: $\partial(18, 18)$.

Während die zu $d = 1, 2$ gehörenden Darstellungen den Grad 3 haben, sind die übrigen linear. In jedem Fall ist $3d$ die Ordnung des Kerns.

§ 2

In der Gruppe $\mathfrak{G}$ sei $\mathfrak{g}$ Untergruppe, $\mathfrak{m}$ elementar abelscher Normalteiler mit der Ordnung q^n, und es gelte

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{g}\mathfrak{m}, \qquad \mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 1. \tag{7}$$

Wählen wir eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von $\mathfrak{m}$, so gilt für $s \in \mathfrak{g}$

$$s^{-1} b_j s = b_1^{\alpha_{j1}(s)} \cdots b_n^{\alpha_{jn}(s)} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

mit ganzen rationalen Zahlen $\alpha_{jk}(s)$. Die α_{jk} sind nur mod q bestimmt und können als Elemente von $GF(q)$ angesehen werden. Dann ist

$$\partial : s \to \|\alpha_{jk}(s)\| = A(s) \qquad (s \in \mathfrak{g}) \tag{9}$$

eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ über $GF(q)$ mit $\mathfrak{m}$ als Darstellungsmodul. Läßt man $b_1, \ldots, b_n$ alle Basen von $\mathfrak{m}$ durchlaufen, so durchläuft ∂ eine volle Klasse einander äquivalenter Darstellungen von $\mathfrak{g}$ über $GF(q)$.

Sei nun umgekehrt eine Gruppe $\mathfrak{g}$ und eine Darstellung (9) von $\mathfrak{g}$ über $GF(q)$ gegeben. Ist $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis des zugehörigen Darstellungsmoduls $\mathfrak{m}$ und b_j^s die rechte Seite von (8), so kann die Abbildung $b_j \to b_j^s$ $(j = 1, \ldots, n)$ in eindeutiger Weise zu einem Automorphismus von $\mathfrak{m}$ fortgesetzt werden, den wir dem Element $s \in \mathfrak{g}$ zuordnen wollen. Die auf Grund dieser Automorphismenzuordnung gebildete zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{g}$ ist eine Gruppe $\mathfrak{G}$, in der die Beziehungen (7) und (8) gelten. Bei Zugrundelegung einer zu ∂ äquivalenten Darstellung oder einer anderen Basis von $\mathfrak{m}$, was ja beides im Grunde dasselbe bedeutet, ergibt sich eine zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe. Unter Beachtung dieses Sachverhaltes wollen wir die konstruierte Gruppe L auch mit $(\mathfrak{g}, \partial)$ bezeichnen.

Die Irreduzibilität bzw. vollständige Reduzibilität von ∂ ist gleichwertig mit der Minimalität des Normalteilers $\mathfrak{m}$ bzw. seinem vollständigen Zerfall in minimale Normalteiler von $\mathfrak{G} = (\mathfrak{g}, \partial)$.

Wir wollen nun feststellen, wann

$$(\mathfrak{g}, \partial) \cong (\mathfrak{g}^*, \partial^*) \tag{10}$$

gilt, wobei $\mathfrak{g}^*$ eine Gruppe mit der Darstellung $\partial^* : s \to A^*(s)$ $(s \in \mathfrak{g}^*)$ über $GF(q^*)$ bezeichnen möge. Der Vergleich von (10) mit folgender Eigenschaft liegt nahe:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Es ist } q = q^*, \text{ und es existiert ein Isomorphismus } \pi \text{ von } \mathfrak{g} \\ \text{auf } \mathfrak{g}^*, \text{ so daß } \partial \sim \partial^{*\pi} \text{ über } GF(q).\end{array}\right\} \tag{11}$$

S a t z 2. (11) *ist hinreichend für* (10).

B e w e i s. Man kann durch geeignete Basiswahl in $\mathfrak{m}$ oder der entsprechenden Untergruppe $\mathfrak{m}^*$ von $(\mathfrak{g}^*, \partial^*)$ erreichen, daß $A(s) = A^*(s^\pi)$ ist für $s \in \mathfrak{g}$. Ist dabei $b_1, \ldots, b_n$ Basis von $\mathfrak{m}$, $b_1^*, \ldots, b_n^*$ Basis von $\mathfrak{m}^*$, so läßt sich offenbar die Abbildung $s \to s^\pi$, $b_i \to b_i^*$ $(s \in \mathfrak{g};\ i = 1, \ldots, n)$ zu einem Isomorphismus von $(\mathfrak{g}, \partial)$ auf $(\mathfrak{g}^*, \partial^*)$ fortsetzen.

Folgerungen. 1. *Für jeden Isomorphismus π von $\mathfrak{g}$ ist* $(\mathfrak{g}, \partial) \cong (\mathfrak{g}^{\pi}, \partial^{\pi^{-1}})$.
2. $(\mathfrak{g}, \partial) \cong (\mathfrak{g}, \partial^*)$ *gilt sicher dann, wenn ein Automorphismus π von $\mathfrak{g}$ existiert mit* $\partial \sim \partial^{*\pi}$.

Unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen ist (11) auch notwendig für (10). Dabei spielt es eine Rolle, wie der Normalteiler $\mathfrak{m}$ bei einem Isomorphismus von $(\mathfrak{g}, \partial)$ abgebildet wird. Im folgenden Satz nutzen wir die Tatsache aus, daß die Kommutatorgruppenbildung gegenüber Isomorphismen invariant ist.

Satz 3. *Seien $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*$ abelsche Gruppen und ∂, ∂^* vollständig reduzible Darstellungen derselben über Galoisfeldern $GF(q)$, $GF(q^*)$ ohne die Einsdarstellung als Bestandteil. Dann folgt aus* (10) *die Eigenschaft* (11).

Beweis. Es ist $(\mathfrak{g}, \partial)' \leqq \mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{m}$, aufgefaßt als $\mathfrak{g}$-Modul, vollständig reduzibel und $(\mathfrak{g}, \partial)'$ eine $\mathfrak{g}$-zulässige Untergruppe von $\mathfrak{m}$ ist, gilt $\mathfrak{m} = (\mathfrak{g}, \partial)' \times \mathfrak{n}$ mit einem Normalteiler $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{g}$. Die Untergruppe $\mathfrak{g}\mathfrak{n}$ ist wegen $\mathfrak{g}\mathfrak{n} \cap (\mathfrak{g}, \partial)' = 1$ abelsch. Wäre $\mathfrak{n} \neq 1$, so würde $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{n}$ trivial dargestellt werden. Dann enthielte ∂ die Einsdarstellung von $\mathfrak{g}$ als Bestandteil, gegen die Voraussetzung. Also ist $(\mathfrak{g}, \partial)' = \mathfrak{m}$. Entsprechend ergibt sich $(\mathfrak{g}^*, \partial^*)' = \mathfrak{m}^*$. Wir nehmen nun an, $x \to x^*$ sei ein Isomorphismus von $(\mathfrak{g}, \partial)$ auf $(\mathfrak{g}^*, \partial^*)$. Dabei geht die Ableitung der einen Gruppe in die der anderen über, also $\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}^*$. Hieraus folgt $q = q^*$ sowie die Gleichheit der Ränge von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}^*$. Für $s \in \mathfrak{g}$ besitzt s^* eine eindeutige Zerlegung $s^* = s^{\pi} b$ mit $s^{\pi} \in \mathfrak{g}^*$, $b \in \mathfrak{m}^*$. Die Abbildung $s \to s^{\pi}$ ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{g}^*$. Beruht die Darstellung $\partial : s \to A(s)$ auf der Basiswahl $b_1, \ldots, b_n$ von $\mathfrak{m}$ und beziehen wir die Darstellung $\partial^* : s^* \to A^*(s^*)$ auf die Basis $b_1^*, \ldots, b_n^*$ von $\mathfrak{m}^*$, so gilt $A(s) = A^*(s^{\pi})$. Bezüglich einer beliebigen Basis von $\mathfrak{m}^*$ haben wir jedenfalls Äquivalenz der Darstellungen ∂ und $\partial^{*\pi}$ von $\mathfrak{g}$.

Die bisherigen Betrachtungen dieses Paragraphen übertragen sich ohne weiteres auf den etwas allgemeineren Fall, daß an die Stelle von $\mathfrak{m}$ ein direktes Produkt $\mathfrak{m}_1 \times \cdots \times \mathfrak{m}_r$ von elementar abelschen Gruppen $\mathfrak{m}_i$ mit paarweise teilerfremden Ordnungen $|\mathfrak{m}_i| = q_i^{n_i}$ $(i = 1, \ldots, r)$ tritt. In der Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{g}(\mathfrak{m}_1 \times \cdots \times \mathfrak{m}_r)$ erfährt $\mathfrak{g}$ für jedes $i = 1, \ldots, r$ auf $\mathfrak{m}_i$ eine Darstellung

$$\partial_i : s \to ||\alpha_{jk}^{(i)}(s)|| = A_i(s) \qquad (s \in \mathfrak{g})$$

über $GF(q_i)$. Liegen umgekehrt solche Darstellungen einer beliebig gegebenen Gruppe $\mathfrak{g}$ vor und gehört zu ∂_i der Darstellungsmodul $\mathfrak{m}_i$ mit der Basis $b_1^{(i)}, \ldots, b_{n_i}^{(i)}$, dann kann man die zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{m}_1 \times \cdots \times \mathfrak{m}_r$ mit $\mathfrak{g}$ so bilden, daß analog zu (8)

$$s^{-1} b_j^{(i)} s = b_1^{(i)\alpha_{j1}^{(i)}(s)} \cdots b_{n_i}^{(i)\alpha_{jn_i}^{(i)}(s)}$$

gilt für $s \in \mathfrak{g}$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, n_i$. Diese Erweiterung bezeichnen wir mit $(\mathfrak{g}, \partial_1, \ldots, \partial_r)$. Hierbei spielt die Anordnung der ∂_i sowie deren Ersetzung durch äquivalente Darstellungen keine Rolle.

Über das Bestehen einer Isomorphie

$$(\mathfrak{g}, \partial_1, \ldots, \partial_r) \cong (\mathfrak{g}^*, \partial_1^*, \ldots, \partial_r^*) \tag{12}$$

kann man analoge Aussagen machen wie in den Sätzen 2 und 3. Vergleichseigenschaft ist

$$\left.\begin{array}{l}\text{Es ist } r = r^*, \text{ und bei geeigneter Indizierung der } \partial_i \text{ bzw. } \partial_i^* \text{ gilt} \\ q_i = q_i^*,\ \partial_i \sim \partial_i^{*\pi} \text{ über } GF(q_i) \text{ für } i = 1, \ldots, r \text{ mit einem ge-} \\ \text{wissen Isomorphismus } \pi \text{ von } \mathfrak{g} \text{ auf } \mathfrak{g}^*.\end{array}\right\} \tag{13}$$

Satz 4. (13) *ist hinreichend für* (12).

Satz 5. *Sei* $\mathfrak{g}$ *abelsch und* ∂_i *für* $i = 1, \ldots, r$ *eine vollständig reduzible Darstellung von* $\mathfrak{g}$ *über* $GF(q_i)$ *ohne die Einsdarstellung als Bestandteil; Entsprechendes gelte für die Gruppe* $\mathfrak{q}^*$ *und ihre Darstellungen* ∂_i^* *über* $GF(q_i^*)$ *für* $i = 1, \ldots, r^*$. *Dann folgt* (13) *aus* (12).

Die Sätze 4 und 5, deren Beweise denen der Sätze 2 und 3 entsprechen, leisten die Klassifikation aller endlichen Gruppen mit der in der Einleitung genannten Eigenschaft $\mathscr{E}$. In der Tat decken sich offenbar die $\mathscr{E}$-Gruppen genau mit den Gruppen $(\mathfrak{g}, \partial_1, \ldots, \partial_r)$, wo $\mathfrak{g}, \partial_1, \ldots, \partial_r$ den Voraussetzungen des Satzes 5 genügen. Zu den $\mathscr{E}$-Gruppen gehören unter anderem diejenigen Gruppen, die ihre Ableitung als Hallsche abelsche Untergruppe mit quadratfreier Ordnung enthalten.

Wir können die Klassifikation noch prägnanter formulieren, wenn wir den folgenden Begriff einführen:

Zwei Systeme $(\partial_1, \ldots, \partial_r)$, $(\partial_1^*, \ldots, \partial_{r^*}^*)$ einer Gruppe $\mathfrak{g}$ heißen konjugiert bezüglich $\mathfrak{g}$, wenn $r = r^*$ ist und die Indizierung der ∂_i bzw. ∂_i^* so gewählt werden kann, daß ∂_i und ∂_i^* denselben Grundkörper haben sowie $\partial_i \sim \partial_i^{*\pi}$ gilt für $i = 1, \ldots, r$ mit einem geeigneten Automorphismus π von $\mathfrak{g}$.

Natürlich ist diese Konjugiertheit eine Äquivalenzrelation. Nun haben wir:

Durchläuft $\mathfrak{g}$ *alle nichtisomorphen endlichen abelschen Gruppen und* $(\partial_1, \ldots, \partial_r)$ *für jedes* $\mathfrak{g}$ *ein Vertretersystem der Konjugiertheitsklassen bezüglich* $\mathfrak{g}$ *derjenigen Darstellungssysteme, deren Komponenten vollständig reduzible Darstellungen von* $\mathfrak{g}$ *ohne die Einsdarstellung als Bestandteil über verschiedenen endlichen Primkörpern sind, dann durchläuft* $(\mathfrak{g}, \partial_1, \ldots, \partial_r)$ *alle* $\mathscr{E}$*-Gruppen, jede genau einmal.*

Die hier gegebene Klassifikation der $\mathscr{E}$-Gruppen wird geleistet durch die abelschen Gruppen, ihre Automorphismen und ihre irreduziblen Darstellungen über den endlichen Primkörpern, welche aus § 1 bekannt sind. Man kann sie der Klassifikation der abelschen Gruppen durch Invarianten zur Seite stellen. Zum einen ist es nämlich möglich, Struktureigenschaften der Gruppen $(\mathfrak{g}, \partial_1, \ldots, \partial_r)$ aus den „Invarianten" $\mathfrak{g}, \partial_1, \ldots, \partial_r$ abzulesen; so ist z. B. $\mathfrak{g}$ die Kommutatorfaktorgruppe und zugleich größte nilpotente Faktorgruppe, $r = 1$ gleichwertig damit, daß die Ableitung Primzahlpotenzordnung besitzt, $\operatorname{grad} \partial_i = 1$ für $i = 1, \ldots, r$ gleichwertig mit der Zyklizität der Ableitung. Zum anderen ist im konkreten Einzelfall die zahlenmäßige Berechnung ohne Schwierigkeiten möglich.

Wenn wir von einer $\mathscr{E}$-Gruppe $(\mathfrak{g}, \partial_1, \ldots, \partial_r)$ sprechen, so meinen wir immer, daß $\mathfrak{g}$ deren Kommutatorfaktorgruppe sein soll, d. h., $\mathfrak{g}$ ist abelsch und jedes ∂_i vollständig reduzibel ohne die Einsdarstellung als Bestandteil.

Unter dem Kern eines Darstellungssystems $(\partial_1, \ldots, \partial_r)$, bezeichnet mit $\ker(\partial_1, \ldots, \partial_r)$, wollen wir den Durchschnitt der Kerne aller ∂_i verstehen.

Der Durchschnitt des Zentrums einer Gruppe $(\mathfrak{g}, \partial_1, \ldots, \partial_r)$ mit $\mathfrak{g}$ ist offenbar $\ker(\partial_1, \ldots, \partial_r)$. Das Zentrum einer $\mathscr{E}$-Gruppe $(\mathfrak{g}, \partial_1, \ldots, \partial_r)$ ist $\ker(\partial_1, \ldots, \partial_r)$.

Es gilt

$$(\mathfrak{g}, \partial_1, \ldots, \partial_r) = \mathfrak{g}_1 \times (\mathfrak{g}_2, \bar{\partial}_1, \ldots, \bar{\partial}_r), \tag{14}$$

wenn $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ ist und $\mathfrak{g}_1$ in $\ker(\partial_1, \ldots, \partial_r)$ liegt; dabei bezeichnet $\bar{\partial}_i$ die Beschränkung von ∂_i auf $\mathfrak{g}_2$. Ist z. B. $\mathfrak{g}_1$ q-Sylowgruppe von $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ und ∂_1 vollständig reduzible Darstellung von $\mathfrak{g}$ über $GF(q)$, so gilt stets (14) mit $r = 1$. $\mathfrak{g}_1$ liegt nämlich im Kern von ∂_1, da einerseits nach Clifford [1], S. 534 und 535, die Beschränkung von ∂_1 auf $\mathfrak{g}_1$ vollständig in irreduzible Bestandteile zerfällt und andererseits eine q-Gruppe über einem Körper der Charakteristik q nur die Einsdarstellung als einzige irreduzible Darstellung besitzt (vgl. etwa Huppert [2], S. 483).

Haben die k ($\geqq 1$) Untergruppen $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_k$ einer abelschen Gruppe $\mathfrak{g}$ zyklische Faktorgruppen $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_i$ ($i = 1, \ldots, k$), so gilt $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$, wo $\mathfrak{g}_1 \leqq \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{h}_i$ und $\mathfrak{g}_2$ zerlegbar ist in ein direktes Produkt aus höchstens k zyklischen Gruppen. Man kann dies mittels Induktion nach $k|\mathfrak{g}|$ folgendermaßen einsehen: Ist $k|\mathfrak{g}| = 1$ oder überhaupt $\mathfrak{g}$ zyklisch, so ist die Behauptung klar. Sei fortan $\mathfrak{g}$ nicht zyklisch. Dann liegt $\mathfrak{h}_1$ nicht in der Frattinigruppe von $\mathfrak{g}$ und umfaßt daher einen von der Einheit verschiedenen direkten Faktor $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{g}$. Auf den Kofaktor $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ und seine Untergruppe $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}_1$ kann die Induktionsvoraussetzung angewendet werden. Sie liefert eine Zerlegung $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2$ mit $\mathfrak{b}_1 \leqq \mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}_1$ und zyklischem Faktor $\mathfrak{b}_2$. Nun haben wir $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{b}_2$ mit $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_1 \leqq \mathfrak{h}_1$. Nochmalige Anwendung der Induktionsvoraussetzung, und zwar auf $\mathfrak{c}$ und die Untergruppen $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{h}_i$ ($i = 2, \ldots, k$), ergibt $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_2$, wo $\mathfrak{c}_1 \leqq \mathfrak{c} \cap \mathfrak{h}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{h}_k$ und $\mathfrak{c}_2$ direktes Produkt aus höchstens $k - 1$ zyklischen Gruppen ist. Mit $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{c}_2 \times \mathfrak{b}_2$ haben wir nun in $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ die behauptete Zerlegung erreicht.

Wenden wir das soeben Gezeigte auf die Kerne irreduzibler Darstellungen einer abelschen Gruppe an, so erhalten wir den

Satz 6. *Sei eine Gruppe* $\mathfrak{G} = (\mathfrak{g}, \partial_1, \ldots, \partial_r)$ *gegeben, wo* $\mathfrak{g}$ *abelsch und jedes* ∂_i *vollständig reduzibel ist. Die Gesamtzahl der von der Einsdarstellung verschiedenen inäquivalenten irreduziblen Bestandteile aller* ∂_i *sei* k. *Dann besteht mit einer gewissen Untergruppe* $\mathfrak{g}_1$ *von* $\ker(\partial_1, \ldots, \partial_r)$ *und einem direkten Produkt aus höchstens* k *zyklischen Gruppen* $\mathfrak{g}_2$ *die Zerlegung* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ *und folglich für* $\mathfrak{G}$ *die Zerlegung* (14).

Folgerung. *Die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *in Satz* 6 *spaltet sicher dann einen von der Einheit verschiedenen abelschen direkten Faktor ab, wenn* k *durch die Minimalzahl der Erzeugenden von* $\mathfrak{g}$ *übertroffen wird.*

Eine in bezug auf $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ symmetrisch aufgebaute Verallgemeinerung von (14) ist die Beziehung

$$(\mathfrak{g}, \partial_1, \ldots, \partial_r) = (\mathfrak{g}_1, \bar{\partial}_1, \ldots, \bar{\partial}_r) \times (\mathfrak{g}_2, \bar{\bar{\partial}}_1, \ldots, \bar{\bar{\partial}}_r), \tag{15}$$

welche gilt, wenn $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ und ∂_i für $i = 1, \ldots, r$ Summe von zwei Darstellungen ist, deren erste (bzw. zweite) $\mathfrak{g}_2$ (bzw. $\mathfrak{g}_1$) trivial darstellt und bei Beschränkung auf $\mathfrak{g}_1$ (bzw. $\mathfrak{g}_2$) mit $\bar{\partial}_i$ (bzw. $\bar{\bar{\partial}}_i$) übereinstimmt. Um volle Allgemeinheit zu erzielen, müssen wir in dieser Formulierung bei $\bar{\partial}_i$ bzw. $\bar{\bar{\partial}}_i$ auch die Nulldarstellung zulassen, die dann aber ohne weiteres gestrichen werden darf.

Satz 7. *Die Formel* (15) *liefert alle und nur die direkten Zerlegungen der* $\mathscr{E}$*-Gruppen in zwei Faktoren, wenn man auf der rechten Seite entweder beide Gruppen als* $\mathscr{E}$*-Gruppen oder die eine als* $\mathscr{E}$*-Gruppe und die andere als abelsche Gruppe wählt.*

Beweis. Sei $\mathfrak{G} = (\mathfrak{g}, \partial_1, \ldots, \partial_r)$ $\mathcal{E}$-Gruppe, ferner $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ eine direkte Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in zwei Untergruppen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$. Es ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{g}\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{m} = \mathfrak{G}'$. Wir setzen $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{G}_i'$ $(i = 1, 2)$ und haben $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \times \mathfrak{m}_2$. Für $g \in \mathfrak{G}$ gilt $g = g_1 g_2$ mit eindeutig durch g bestimmten Elementen $g_1 \in \mathfrak{G}_1$, $g_2 \in \mathfrak{G}_2$. Unter Beachtung dieser Bezeichnungsweise setzen wir $\mathfrak{g}_i = \{g_i \mid g \in \mathfrak{g}\}$ für $i = 1, 2$. Dann ist $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ eine $\mathfrak{g}$ umfassende abelsche Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Wäre $\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2 > \mathfrak{g}$, so wäre $\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{m}$ eine von 1 verschiedene durch $\mathfrak{g}$ zentralisierte Untergruppe von $\mathfrak{m}$, die es jedoch nicht geben darf. Also ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$. ∂_i ruft auf $\mathfrak{m}_1$ (bzw. $\mathfrak{m}_2$) als Darstellungsmodul eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ hervor, deren Beschränkung auf $\mathfrak{g}_1$ (bzw. $\mathfrak{g}_2$) wir mit $\bar{\partial}_i$ (bzw. $\bar{\bar{\partial}}_i$) bezeichnen. Dann haben wir $\mathfrak{G}_1 = (\mathfrak{g}_1, \bar{\partial}_1, \ldots, \bar{\partial}_r)$, $\mathfrak{G}_2 = (\mathfrak{g}_2, \bar{\bar{\partial}}_1, \ldots, \bar{\bar{\partial}}_r)$, und zwischen $\partial_i, \bar{\partial}_i, \bar{\bar{\partial}}_i$ besteht der bei (15) beschriebene Zusammenhang.

Sind umgekehrt zwei Gruppen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ gegeben, und zwar beide mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$ oder eine als $\mathcal{E}$-Gruppe und die andere als abelsche Gruppe, so kann man schreiben $\mathfrak{G}_1 = (\mathfrak{g}_1, \bar{\partial}_1, \ldots, \bar{\partial}_r)$, $\mathfrak{G}_2 = (\mathfrak{g}_2, \bar{\bar{\partial}}_1, \ldots, \bar{\bar{\partial}}_r)$, wo $\bar{\partial}_i$ und $\bar{\bar{\partial}}_i$ jeweils Darstellungen über demselben Körper sind, von denen eine die Nulldarstellung sein kann $(i = 1, \ldots, r)$. Wir setzen $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ und können ohne weiteres die Darstellungen $\partial_1, \ldots, \partial_r$ so konstruieren, daß (15) gilt. Die erhaltene Gruppe $(\mathfrak{g}, \partial_1, \ldots, \partial_r)$ hat die Eigenschaft $\mathcal{E}$.

Folgerung. *Eine $\mathcal{E}$-Gruppe* $(\mathfrak{g}, \partial_1, \ldots, \partial_r)$ *ist sicher dann direkt unzerlegbar, wenn bei jeder Zerfällung* $\partial_i = \partial_i' \dotplus \partial_i''$ *von* ∂_i *in zwei Darstellungen* $\partial_i', \partial_i''$ *stets gilt* $\ker(\partial_i', \ldots, \partial_r') \ker(\partial_1'', \ldots, \partial_r'') < \mathfrak{g}$.

Wir beschäftigen uns noch etwas eingehender mit solchen Gruppen $(\mathfrak{g}, \partial)$, bei denen $\mathfrak{g}$ zyklisch ist.

Bezüglich einer zyklischen Gruppe $\mathfrak{g}$ haben konjugierte Darstellungssysteme stets denselben Kern, denn in $\mathfrak{g}$ sind alle Untergruppen charakteristisch. Bei irreduziblen Darstellungen gilt auch die Umkehrung.

Hilfssatz 2. *Zwei irreduzible Darstellungen einer zyklischen Gruppe* $\mathfrak{g}$ *über demselben Körper sind genau dann konjugiert bezüglich* $\mathfrak{g}$, *wenn sie denselben Kern haben.*

Beweis. Wir müssen noch aus der Kerngleichheit die Konjugiertheit folgern. Dazu benutzen wir Satz 1 mit $r = 1$, $a_1 = a$ und $t_1 = t$. Kerngleichheit der Darstellungen $\partial : a \to (\zeta^t)_{K(\zeta^d)|K}$ mit $d = (t, h)$ und $\partial^* : a \to (\zeta^{t^*})_{K(\zeta^{d^*})|K}$ mit $d^* = (t^*, h)$ ist gleichwertig mit $d = d^*$. Wir setzen $d = d^*$ voraus und können die Kongruenz $t = xt^*$, (h) in x lösen. Da x zu $\dfrac{h}{d}$ teilerfremd ist, gibt es in der arithmetischen Progression $x + k\dfrac{h}{d}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ eine zu $|\mathfrak{g}|$ teilerfremde Zahl y. Auch für sie gilt $t = yt^*$, (h). Bezeichnet π den Automorphismus $a \to a^y$ von $\mathfrak{g}$, so gilt $\partial \sim \partial^{*\pi}$ über K.

Aus Satz 2, Folgerung 2 und Hilfssatz 2 ergibt sich, daß die Gruppe $(\mathfrak{g}, \partial)$ bei Zyklizität von $\mathfrak{g}$ und Irreduzibilität von ∂ eindeutig bestimmt ist durch die Ordnung h von $\mathfrak{g}$, die Ordnung d des Kerns von ∂ und die Charakteristik q des zugrunde gelegten Primkörpers. Wir schreiben in diesem Fall auch $(h, d; q)$ statt $(\mathfrak{g}, \partial)$. Der Teiler d von h unterliegt hier der Nebenbedingung $q \nmid \dfrac{h}{d} > 1$, innerhalb der er beliebig gewählt werden kann.

Die Gruppen $(p^l, p^{l-1}; q)$ $(p \neq q,\ l \geqq 1)$ sind z. B. genau die einstufig nichtabelschen Gruppen im Sinne von RÉDEI [3], welche nicht Primzahlpotenzordnung haben.

Ist q^l die höchste in h aufgehende q-Potenz, so gilt übrigens, wie aus den Betrachtungen um Formel (14) hervorgeht,

$$(h, d; q) = (q^l) \times \left(\frac{h}{q^l}, \frac{d}{q^l}; q\right),$$

wo der Faktor (q^l) auf der rechten Seite die zyklische Gruppe der Ordnung q^l bezeichnen soll.

Wir beschließen auch diesen Paragraphen mit einem Beispiel, welches die rechnerische Durchführung der Klassifikation im Einzelfalle zeigen soll.

Beispiel. Gesucht sind die nichtisomorphen Gruppen, bei denen die Kommutatorfaktorgruppe den Typus 6,9 besitzt und die Kommutatorgruppe minimaler 13-Normalteiler ist. Die Gruppen der verlangten Struktur sind $(\mathfrak{g}, \partial)$, wo $\mathfrak{g}$ wie in Beispiel 1 beschaffen ist und ∂ alle nichttrivialen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{g}$ über $GF(13)$ durchläuft. Diese Darstellungen sind in Beispiel 1 bestimmt worden. Zur Klärung des Isomorphieproblems haben wir die Klassen unter $\mathfrak{g}$ konjugierter Darstellungen ∂ zu bestimmen. Dazu benötigen wir die Automorphismen von $\mathfrak{g}$, welche gegeben sind durch $a_1 \to a_1^{u_1} a_2^{u_2}$, $a_2 \to a_1^{v_1} a_2^{v_2}$ mit den Nebenbedingungen: $2 \nmid u_1$, $3 \mid u_2$, zugleich darf nicht $3 \mid u_1$ und $9 \mid u_2$ sein, $3 \nmid v_2$, $u_1 v_2 \not\equiv u_2 v_1 \bmod 3$. Zu $\partial(t_1, t_2)$ konjugiert sind dann alle Darstellungen $\partial(t_1', t_2')$ mit $t_1' \equiv 13^x(u_1 t_1 + u_2 t_2)$ und $t_2' \equiv 13^x(v_1 t_1 + v_2 t_2)$ mod 18, wo die u_i, v_i wie eben angegeben und $x = 0, 1, 2, \ldots$ zu wählen sind. Man stellt fest, daß außer bei $d = 3$ und 6 alle zum gleichen d gehörigen Darstellungen einander konjugiert sind bezüglich $\mathfrak{g}$. Bei $d = 3$ und 6 findet je ein Zerfall in zwei Klassen statt, und zwar bilden $\partial(9, 6)$, $\partial(9, 12)$ bei $d = 3$ eine Klasse für sich und ebenso $\partial(18, 6)$, $\partial(18, 12)$ bei $d = 6$. Diese Klassenzerteilung spiegelt sich auch im Kern wider. Während $\partial(9, 6)$, $\partial(9, 12)$, $\partial(18, 6)$, $\partial(18, 12)$ nichtzyklische Kerne besitzen, sind die Kerne der übrigen Darstellungen zu $d = 3$ oder 6 zyklisch. Die gesuchten Gruppen sind nunmehr

$$\begin{gathered}(\mathfrak{g}, \partial(3, 2)),\ (\mathfrak{g}, \partial(6, 2)),\ (\mathfrak{g}, \partial(3, 6)),\ (\mathfrak{g}, \partial(9, 6)),\ (\mathfrak{g}, \partial(6, 6)),\\ (\mathfrak{g}, \partial(18, 6)),\ (\mathfrak{g}, \partial(9, 18)).\end{gathered} \tag{16}$$

Die definierenden Relationen lassen sich ohne weiteres hinschreiben. Wir wollen dies nur für die erste und die letzte Gruppe tun.

$$\begin{aligned}(\mathfrak{g}, \partial(3, 2)):\ & a_1^6 = a_2^9 = b_1^{13} = b_2^{13} = b_3^{13} = 1, \\ & a_1^{-1} b_1 a_1 = b_1^4, \qquad a_2^{-1} b_1 a_2 = b_2^2, \\ & a_1^{-1} b_2 a_1 = b_2^4, \qquad a_2^{-1} b_2 a_2 = b_3^2, \\ & a_1^{-1} b_3 a_1 = b_3^4, \qquad a_2^{-1} b_3 a_2 = b_1^4, \\ & \text{sonst kommutativ;}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathfrak{g}, \partial(9, 18)):\ & a_1^6 = a_2^9 = b^{13} = 1, \\ & a_1^{-1} b a = b^8, \qquad a_2^{-1} b a_2 = b^{-1}, \\ & \text{sonst kommutativ.}\end{aligned}$$

Es sei bemerkt, daß sämtliche Gruppen (16) auf Grund der Folgerung aus Satz 6 einen nichttrivialen abelschen Faktor direkt abspalten. Unzerfällbare Gruppen findet man z. B. unter den Gruppen $(\mathfrak{g}, \partial_1, \partial_2)$ ($\mathfrak{g}$ wie bisher). So sind nach der Folgerung aus Satz 7 diejenigen Gruppen $\left(\mathfrak{g}, \partial(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}), \partial(t_1^{(2)}, t_2^{(2)})\right)$ direkt unzerfällbar, bei denen $(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, 18)\,(t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, 18) < 6$ ist.

LITERATUR

[1] Clifford, A. H.: Representations induced in an invariant subgroup. Annals of Math. *38* (1937) 533—550.
[2] Huppert, B.: Lineare auflösbare Gruppen. Math. Z. *67* (1957) 479—518.
[3] Rédei, L.: Das schiefe Produkt in der Gruppentheorie. Commentarii Math. Helvet. *20* (1947) 225—264.
[4] Weyl, H.: The classical groups. 2nd ed., London 1946.

Manuskripteingang: 12. 11. 1970

VERFASSER:
Gerhard Pazderski, Sektion Mathematik der Universität Rostock