Verallgemeinerung eines Satzes von Prüfer und Baer

REINER FRITZSCHE

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

Ein Satz von H. PRÜFER [4] und R. BAER [1] besagt, daß jede primäre abelsche Gruppe, deren Elemente von beschränkter Ordnung sind, eine direkte Summe zyklischer Gruppen ist. Ein Analogon zu diesem Satz läßt sich für eine Klasse algebraischer modularer Verbände, die die Klasse der Untergruppenverbände der primären abelschen Gruppen umfaßt, beweisen.

1. Es sei P ein algebraischer (d. h. kompakt erzeugter vollständiger) modularer Verband, $0 \in P$ sei das Nullelement, $1 \in P$ das Einselement von P. Für $a, b \in P$ mit $a \leqq b$ bilden alle $x \in P$ mit $a \leqq x \leqq b$ einen Unterverband von P, welcher mit b/a bezeichnet werden soll. Da P modular ist, gilt für beliebige Elemente $a, b \in P$ stets $(a \cap b)/a \cong b/(a \cap b)$ (siehe z. B. [3]).
Ein Element $z \in P$ heiße genau dann ein *ausgezeichnetes Element*, wenn z kompakt ist und wenn $z/0$ eine endliche Kette ist. Die Länge dieser Kette werde mit $O(z)$ bezeichnet und heiße die *Ordnung* des Elementes z. Z sei die Menge der ausgezeichneten Elemente von P. Ist $z \in Z$, so ist z' durch $z' \leqq z$ und $O(z') = O(z) - 1$ im Fall $z > 0$ bzw. $0' \overset{\text{def}}{=} 0$ eindeutig definiert. Für ein beliebiges Element $a \in P$ werde gesetzt:

$$a' \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{(\text{alle})\, z \leqq a} z' \qquad (z \in Z),$$

$$a^{(n)} \overset{\text{def}}{=} (a^{(n-1)})' \qquad (n \geqq 1),$$

$$a^{(0)} \overset{\text{def}}{=} a.$$

2. Ist P ein algebraischer modularer Verband, welcher die Eigenschaften

(I) $\quad a \in P \Rightarrow a = \bigcup_{\nu \in N} z_\nu, \qquad z_\nu \in Z;$

(II) $\quad z \leqq \bigcup_{\nu \in N} b_\nu \Rightarrow z' \leqq \bigcup_{\nu \in N} b_\nu' \quad (z \in Z, b_\nu \in P)$

besitzt, wobei N jeweils eine geeignete Indexmenge bezeichnet, so gelten die folgenden Hilfssätze.

Hilfssatz 1. $a \in P \Rightarrow a' \leqq a$.

Beweis. Es ist $a = \bigcup_{z \leqq a} z$ nach (I) und $a' = \bigcup_{z \leqq a} z'$ sowie $z' \leqq z$ nach Definition. Daher gilt $\bigcup_{z \leqq a} z' \leqq \bigcup_{z \leqq a} z$, also $a' \leqq a$, q.e.d.

Hilfssatz 2. $a \leqq \bigcup_{\nu \in N} b_\nu\ (a, b_\nu \in P) \Rightarrow a' \leqq \bigcup_{\nu \in N} b_\nu'$.

Beweis. $a = \bigcup_{z \leqq a} z \leqq \bigcup_{\nu \in N} b_\nu \Rightarrow z \leqq \bigcup_{\nu \in N} b_\nu$ für alle $z \leqq a \Rightarrow z' \leqq \bigcup_{\nu \in N} b_\nu'$ für alle $z \leqq a$ nach (II) $\Rightarrow \bigcup_{z \leqq a} z' = a' \leqq \bigcup_{\nu \in N} b_\nu'$, q.e.d.

Hilfssatz 3. $\left(\bigcup_{\nu \in N} a_\nu\right)^{(n)} = \bigcup_{\nu \in N} a_\nu^{(n)}$ für beliebige Elemente $a_\nu \in P\ (\nu \in N)$ und alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$.

Beweis. Es ist nach (I) $\bigcup_{\nu \in N} a_\nu = \bigcup_{\nu \in N}\left(\bigcup_{z \leqq a_\nu} z\right) = \bigcup_{z \leqq \bigcup_{\nu \in N} a_\nu} z$.

Falls $c = \bigcup_{z \leqq c} z \Rightarrow c^{(n)} = \bigcup_{z \leqq c} z^{(n)}$ für alle $n \geqq 1$ bewiesen ist, folgt $\left(\bigcup_{\nu \in N} a_\nu\right)^{(n)} = \bigcup_{z \leqq \bigcup_{\nu \in N} a_\nu} z^{(n)}$ $= \bigcup_{\nu \in N}\left(\bigcup_{z \leqq a_\nu} z^{(n)}\right) = \bigcup_{\nu \in N} a_\nu^{(n)}$ für alle $n \geqq 1$, was zu beweisen war.

Es sei also $c = \bigcup_{z \leqq c} z$. Dann gilt $c' = \bigcup_{z \leqq c} z'$ nach Definition. Unter der Annahme $c^{(n-1)} = \bigcup_{z \leqq c} z^{(n-1)}$ für $n \geqq 2$ gilt für jedes Element $z \leqq c$ stets $z^{(n-1)} \leqq c^{(n-1)}$, also $z^{(n)} \leqq c^{(n)}$ nach (II), also gilt

$$\bigcup_{z \leqq c} z^{(n)} \leqq c^{(n)}. \tag{1}$$

Andererseits ist $c^{(n)} = (c^{(n-1)})' = \bigcup_{z \leqq c^{(n-1)}} z'$. Für jedes Element $y \in Z$ mit $y \leqq c^{(n-1)}$ gilt nach Annahme $y \leqq \bigcup_{z \leqq c} z^{(n-1)}$, also $y' \leqq \bigcup_{z \leqq c} z^{(n)}$ nach (II), woraus $\bigcup_{z \leqq c^{(n-1)}} z' \leqq \bigcup_{z \leqq c} z^{(n)}$ folgt. Hieraus und aus (1) ergibt sich die Behauptung.

3. Im folgenden bezeichne $\sum_{\nu \in N} b_\nu$ stets die *direkte Vereinigung* der Elemente $b_\nu \in P$. Gemäß [2] heiße eine Untermenge $Q \subseteqq P$ genau dann *unabhängig*, wenn die direkte Vereinigung der Elemente von Q existiert, und *maximal unabhängig* in R, wenn unter der Voraussetzung $Q \subseteqq R \subseteqq P$ außerdem für jedes Element $c \in R$ die Relation $c \cap \left(\sum_{d \in Q} d\right) > 0$ besteht. Ferner heiße eine unabhängige Menge kompakter Elemente des Verbandes P genau dann eine *Basis* von P, wenn deren direkte Vereinigung das Einselement von P ist. Bilden insbesondere ausgezeichnete Elemente von P eine Basis, so werde diese eine *ausgezeichnete Basis* genannt. Dann kann der zu beweisende Satz folgendermaßen formuliert werden.

Satz. *Es sei P ein algebraischer modularer Verband mit den Eigenschaften* (I), (II) (siehe oben) *sowie*

(III) $z_1 \leqq z_2 \cup a$ *und* $z_1 \nleqq z_2' \cup a \Rightarrow z_2 \leqq z_1 \cup a \quad (z_1, z_2 \in Z, a \in P)$;

(IV) $a^{(n)} \leqq b^{(n)}$ *und* $a^{(n-1)} \nleqq b^{(n-1)} \Rightarrow$ *es existiert ein Element* $z \in Z$ *mit* $z \leqq a \cup b$, $z^{(n)} = 0$ *und* $z^{(n-1)} \nleqq b^{(n-1)} \quad (a, b \in P, n \geqq 1)$;

(V) $O(z) \leqq n$ *für alle* $z \in Z$, *wobei* n *eine natürliche Zahl ist.*

Dann besitzt P eine ausgezeichnete Basis.

Beweis. Da jedes ausgezeichnete Element kompakt ist, ist eine Untermenge $Y \subseteqq Z$ genau dann unabhängig, wenn jede endliche Untermenge von Y unabhängig ist, so daß nach dem Lemma von TEICHMÜLLER—TUKEY jede Untermenge von Z eine maximale unabhängige Untermenge enthält. Ist $Z_\nu \subseteqq Z$ die Menge aller Elemente $z \in Z$ mit $O(z) \geqq \nu$, so enthält insbesondere Z_n eine maximale unabhängige Untermenge W_n (wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $Z_n \neq \emptyset$ vorausgesetzt werden kann), und diese kann zu einer maximalen unabhängigen Untermenge W_{n-1} von Z_{n-1} erweitert werden. Ist allgemein W_{n-r+1} eine maximale unabhängige Untermenge von Z_{n-r+1} $(1 \leqq r < n)$, so existiert eine maximale unabhängige Menge $W_{n-r} \subseteqq Z_{n-r}$ mit der Eigenschaft $W_{n-r+1} \subseteqq W_{n-r}$. Nach $t < n$ Schritten bricht das Erweiterungsverfahren ab, so daß $W \overset{\text{def}}{=} W_{n-t}$ eine maximale unabhängige Untermenge von Z mit

$$W_n \subseteqq W_{n-1} \subseteqq \cdots \subseteqq W_{n-t} = W \subseteqq Z$$

ist. Setzt man

$$w_\nu \overset{\text{def}}{=} \sum_{z \in W_\nu} z \quad (\nu = n - t, \ldots, n), \quad w \overset{\text{def}}{=} w_{n-t},$$

so gilt

$$z \in Z \text{ und } O(z) = 1 \Rightarrow z \leqq w,$$

denn aus $z \nleqq w$ würde $z \cap w = 0$ folgen im Widerspruch zur Maximalität von W. Unter der Annahme, daß die Aussage

$$z \in Z \text{ und } O(z) \leqq k - 1 \Rightarrow z \leqq w$$

richtig ist, sei $z \in Z$ ein Element mit den Eigenschaften

$$O(z) = k \text{ und } z \nleqq w.$$

Dann gilt $z \notin W_k$ und, da W_k maximal unabhängig in Z_k ist, $z \cap w_k > 0$. Wegen $z \in Z$ existiert daher eine natürliche Zahl r mit $1 \leqq r < k$ und

$$z \cap w_k = z^{(r)} \leqq w_k, \quad z^{(r-1)} \nleqq w_k.$$

Nunmehr werde angenommen, daß die folgende Aussage richtig ist:

$$\left.\begin{array}{l} z_0 \in Z \text{ mit } z_0 \leqq w_k \text{ und } O(z_0) = k - s\ (1 \leqq s < k) \Rightarrow \text{es existiert} \\ \text{ein Element } y_0 \in P \text{ sowie eine ganze Zahl } j \text{ mit } y_0 \leqq w_k,\ z_0^{(j)} \leqq y_0^{(s+j)} \\ \text{und } 0 \leqq j < k - s. \end{array}\right\} \quad \text{(A)}$$

Setzt man $z_0 = z^{(r)}$ und $s = r$, so folgt die Existenz eines Elementes $y_0 \leqq w_k$ mit $z^{(r+j)} \leqq y_0^{(r+j)}$ $(0 \leqq j < k - r)$, und wegen $y_0^{(r-1)} \leqq y_0 \leqq w_k$ und $z^{(r-1)} \nleqq w_k$

existiert eine ganze Zahl j' mit $0 \leqq j' \leqq j$, so daß

$$z^{(r+j')} \leqq y_0^{(r+j')}, \quad z^{(r+j'-1)} \nleqq y_0^{(r+j'-1)}$$

gilt. Nach (IV) existiert daher ein Element $y_1 \in Z$ mit den Eigenschaften

$$y_1 \leqq y_0 \cup z, \quad y_1^{(r+j')} = 0, \quad y_1^{(r+j'-1)} \nleqq y_0^{(r+j'-1)}, \tag{2}$$

woraus $O(y_1) = r + j' < k$ und nach Induktionsannahme $y_1 \leqq w$ folgt. Nimmt man an, daß

$$y_1 \leqq y_0 \cup z'$$

gilt, so folgt unter Benutzung der Hilfssätze 2 und 1

$$y_1^{(r+j'-1)} \leqq y_0^{(r+j'-1)} \cup z^{(r+j')} \leqq y_0^{(r+j'-1)} \cup y_0^{(r+j')} = y_0^{(r+j'-1)}$$

im Widerspruch zu (2). Aus der Annahme

$$y_1 \nleqq y_0 \cup z'$$

folgt andererseits nach (III)

$$z \leqq y_0 \cup y_1 \leqq w_k \cup w = w,$$

was der Voraussetzung über z widerspricht. Diese Voraussetzung ist daher unzulässig, und es gilt

$$z \leqq w \text{ für alle } z \in Z,$$

also

$$a = \bigcup_{z \leqq a} z \leqq w \quad \text{für alle } a \in P,$$

was mit

$$w = 1$$

gleichbedeutend ist. W ist demnach eine ausgezeichnete Basis von P.

Es muß nun noch die Richtigkeit der Aussage (A) nachgewiesen werden. Da jedes ausgezeichnete Element $z_0 \in Z$ nach Voraussetzung kompakt ist, folgt aus $z_0 \leqq w_k$ stets $z_0 \leqq \sum_{i=1}^{m} z_i$, wobei $\{z_1, \ldots, z_m\}$ eine geeignete endliche Untermenge der Menge W_k ist, und $y \leqq \sum_{i=1}^{m} z_i \Rightarrow y \leqq w_k$ gilt für jedes Element $y \in P$ und jede endliche Untermenge $\{z_1, \ldots, z_m\} \subseteqq W_k$. Es genügt daher, für jede endliche Untermenge $\{z_1, \ldots, z_m\}$ von W_k zu beweisen, daß aus $z_0 \in Z$ mit $z_0 \leqq \sum_{i=1}^{m} z_i$ und $O(z_0) = k - s$ $(1 \leqq s < k)$ die Existenz eines Elementes $y_0 \in P$ und einer ganzen Zahl j mit $y_0 \leqq \sum_{i=1}^{m} z_i$, $z_0^{(j)} \leqq y_0^{(s+j)}$ und $0 \leqq j < k - s$ folgt. Dies ist mittels vollständiger Induktion möglich.

Für $m = 1$ ist $z_0 \leqq z_1$, also $z_0 = z_1^{(t)}$ mit $t \overset{\text{def}}{=} O(z_1) - O(z_0) \geqq k - (k - s) \geqq s$, so daß $z_0 \leqq z_1^{(s)}$, also $z_0^{(j)} \leqq y_0^{(s+j)}$ mit $y_0 \overset{\text{def}}{=} z_1$ und $j = 0$ gilt. Es werde angenommen, daß die Behauptung für jede Untermenge $\{z_1, \ldots, z_{m'}\} \subseteqq W_k$ mit $m' < m$ richtig ist, und es sei

$$z_0 \leqq \sum_{i=1}^{m} z_i.$$

Falls

$$z_0 \cap \sum_{l=1}^{m'} z_{i_l} > 0 \quad (1 \leqq i_1 < \cdots < i_{m'} \leqq m)$$

mit $1 \leqq m' < m$ gilt, ist

$$z_0 \cap \sum_{l=1}^{m'} z_{i_l} = z_0^{(h)} \quad \bigl(0 \leqq h < O(z_0)\bigr),$$

woraus wegen $O(z_0^{(h)}) = O(z_0) - h = k - (s + h) > 0$, d. h. $1 \leqq s + h < k$, nach Induktionsannahme die Existenz eines Elementes $y_0 \leqq \sum_{l=1}^{m'} z_{i_l} \leqq \sum_{i=1}^{m} z_i$ und einer ganzen Zahl j' $\bigl(0 \leqq j' < k - (s + h)\bigr)$ mit $z_0^{(h+j')} \leqq y_0^{(s+h+j')}$ folgt, so daß die Behauptung mit $j \overset{\text{def}}{=} h + j' < k - s$ richtig ist. Es muß demnach noch der Fall

$$z_0 \cap \sum_{i=1}^{m-1} z_i = z_0 \cap z_m = 0$$

untersucht werden. Zur Abkürzung werde

$$v_m \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m-1} z_i, \quad x \overset{\text{def}}{=} z_0 \cup z_m, \quad y \overset{\text{def}}{=} z_0 \cup v_m$$

gesetzt. Da P modular ist, gilt

$$x/z_m \cong z_0/(z_0 \cap z_m) = z_0/0. \tag{3}$$

Ferner ist

$$(x \cap y) \cup z_m = (z_m \cup y) \cap x = (x \cup y) \cap x = x,$$

also

$$x/z_m \cong (x \cap y)/\bigl((x \cap y) \cap z_m\bigr) = (x \cap y)/(y \cap z_m). \tag{4}$$

Weiterhin gilt

$$(x \cap v_m) \cup (y \cap z_m) = \bigl((x \cap v_m) \cup z_m\bigr) \cap y = x \cap y,$$

so daß

$$(x \cap y)/(y \cap z_m) \cong (x \cap v_m)/\bigl((x \cap v_m) \cap (y \cap z_m)\bigr) = (x \cap v_m)/0 \tag{5}$$

folgt. Des weiteren gelten die Gleichungen

$$z_0 \cup (y \cap z_m) = (z_0 \cup z_m) \cap y = x \cap y, \tag{6}$$

$$z_0 \cup (x \cap v_m) = (z_0 \cup v_m) \cap x = x \cap y, \tag{7}$$

woraus sich

$$(x \cap y)/z_0 \cong (y \cap z_m)/\bigl((y \cap z_m) \cap z_0\bigr) = (y \cap z_m)/0, \tag{8}$$

$$(x \cap y)/z_0 \cong (x \cap v_m)/\bigl((x \cap v_m) \cap z_0\bigr) = (x \cap v_m)/0 \tag{9}$$

ergibt. Aus (3), (4), (5) folgt

$$(x \cap v_m)/0 \cong z_0/0, \tag{10}$$

was insbesondere bedeutet, daß $(x \cap v_m)/0$ eine Kette der Länge $k - s$ ist, so daß

$$z_* \overset{\text{def}}{=} x \cap v_m$$

die Eigenschaften $z_* \in Z$, $O(z_*) = k - s$, $z_* \leqq v_m$ besitzt, woraus nach Induktionsannahme die Existenz eines Elementes $y_* \in P$ und einer ganzen Zahl j mit

$$y_* \leqq v_m, \quad z_*^{(j)} \leqq y_*^{(s+j)}, \quad 0 \leqq j < k - s \tag{11}$$

folgt. Aus (8), (9), (10) ergibt sich

$$(x \cap y)/z_0 \cong (y \cap z_m)/0 \cong (x \cap v_m)/0 \cong z_0/0, \tag{12}$$

so daß diese Unterverbände sämtlich Ketten der Länge $k - s$ sind. Sind $u, v \in P$ Elemente mit

$$0 \leqq u \leqq x \cap v_m, \qquad 0 \leqq v \leqq y \cap z_m,$$

so gilt u, $v \in Z$ wegen (12), $u \cap v = 0$ wegen $v_m \cap z_m = 0$ und

$$z_0 \leqq v \cup z_0 \leqq x \cap y, \qquad z_0 \leqq u \cup z_0 \leqq x \cap y \tag{13}$$

wegen (6) bzw. (7). Ist

$$O(u) \leqq O(v),$$

so ergibt sich aus (12) und (13) $u \cup z_0 \leqq v \cup z_0 = (u \cup v) \cup z_0$, und daher gilt

$$\big((u \cup v) \cap z_0\big) \cup v = (v \cup z_0) \cap (u \cup v) = u \cup v.$$

Hieraus und aus

$$\big((u \cup v) \cap z_0\big) \cap v = v \cap z_0 \leqq z_m \cap z_0 = 0$$

folgt schließlich

$$\big((u \cup v) \cap z_0\big)/0 \cong (u \cup v)/v \cong u/(u \cap v) = u/0,$$

so daß wegen $(u \cup v) \cap z_0 \leqq z_0 \in Z$

$$(u \cup v) \cap z_0 = z_0^{(g)} \leqq u \cup v \tag{14}$$

mit $g = k - s - O(u)$ gelten muß. Es sei jetzt

$$y_0 \overset{\text{def}}{=} y_* \cup z_m^{(k')}$$

mit $k' \overset{\text{def}}{=} O(z_m) - k \geqq 0$. Dann gilt nach Hilfssatz 3 und (11)

$$y_0^{(s+j)} = y_*^{(s+j)} \cup z_m^{(s+j+k')} \geqq z_*^{(j)} \cup z_m^{(s+j+k')}. \tag{15}$$

Dabei ist

$$0 < z_*^{(j)} \leqq z_* = x \cap v_m, \qquad 0 < z_m^{(s+j+k')} \leqq y_0 \cap z_m,$$

letzteres wegen

$$\begin{aligned} O(z_m^{(s+j+k')}) &= O(z_m) - (s + j + k') = O(z_m) - (s + j + O(z_m) - k) \\ &= k - s - j \leqq k - s = O(y \cap z_m) \end{aligned}$$

nach (12).

Da auch $O(z_*^{(j)}) = k - s - j$ gilt, ist die Voraussetzung

$$O(z_*^{(j)}) \leqq O(z_m^{(s+j+k')})$$

erfüllt, so daß aus (14)

$$z_0^{(g)} \leqq z_*^{(j)} \cup z_m^{(s+j+k')}$$

mit $g = k - s - O(z_*^{(j)}) = k - s - (k - s - j) = j$ folgt. Zusammen mit (15) liefert dies

$$z_0^{(j)} \leqq y_0^{(s+j)},$$

was zu beweisen war.

LITERATUR

[1] BAER, R.: Der Kern, eine charakteristische Untergruppe. Comp. Math. *1* (1934) 254–283.
[2] KERTÉSZ, A.: Zur Theorie der kompakt erzeugten modularen Verbände. Publ. Math. Debrecen *15* (1968) 1–11.
[3] KUROŠ, A. G.: Vorlesungen über allgemeine Algebra. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1964.
[4] PRÜFER, H.: Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären abelschen Gruppen. Math. Z. *17* (1923) 35–61.

Manuskripteingang: 12. 11. 1970

VERFASSER:

REINER FRITZSCHE, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle–Wittenberg