# Über einen Satz von Zariski

Gustav Burosch

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

In [7] beweist Zariski folgende Aussage für projektive Varietäten. Sei $V^*$ das monoidale Bild einer Varietät $V$ mit der Untervarietät $W \subset V$ als Zentrum. Möge $W_1$ eine Untervarietät von $W$ bezeichnen, die einfach auf $W$ und einfach auf $V$ ist. Dann ist mit $s =: \dim W$ und $s_1 =: \dim W_1$ sowie $r =: \dim V$ das (eigentliche) Bild $T[W_1]$ von $W_1$ auf $V^*$ eine irreduzible Untermannigfaltigkeit von $T[W]$, hat die Dimension $r - 1 - s + s_1$ und ist einfach auf $T[W]$ und einfach auf $V^*$. Außerdem ist jede irreduzible Untervarietät von $T[W_1]$, die $W_1$ entspricht, einfach auf $T[W_1]$, $T[W]$ und auf $V^*$.
Ist $V_a$ eine affine Varietät von $V$ mit dem Koordinatenring $A = k[w_1, \ldots, w_n]$, die die Untervarietät $W_1$ enthält, und ist $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{p}_1$ das Primideal aus $A$, das der Varietät $W$ bzw. $W_1$ entspricht, so sind die Voraussetzungen über die Einfachheit von $W_1$ auf $W$ und $V$ bekanntlich gleichwertig damit, daß die lokalen Ringe $R_1 = A_{\mathfrak{p}_1}$ und $R_1/\mathfrak{p}R_1$ regulär sind. Nun kann man versuchen, für beliebige lokale Integritätsbereiche $R_1$ und $R = (R_1)_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} \subset R_1$ Primideal, die diesen Bedingungen genügen, den Oberring $\bar{R} = R_1\left[\dfrac{\mathfrak{p}}{u}\right]$, $u \in \mathfrak{p}$, zu bilden, den Ringen $R_1$ und $R$ Ringe $R_1^*$ bzw. $R^*$ aus $M(\bar{R})$, die $R_1$ bzw. $R$ dominieren, zuzuordnen und den Satz von Zariski als Aussage über die Dimension und Regularität dieser Ringe bzw. des durch $R^*$ bestimmten Restklassenringes von $R_1^*$ zu beweisen. Dieses Problem löste Northcott in [6]. Für Ringe $A$, die über einem Körper endlich erzeugt sind, liefert das Resultat von Northcott das Ergebnis von Zariski, da man dann bekanntlich von der Dimension eines lokalen Ringes auf seine Kodimension schließen kann (der Begriff Kodimension eines lokalen Ringes in einer gewissen Menge $V$ von lokalen Ringen wird dabei im Sinne der kombinatorischen Kodimension aus [4] verwendet; vgl. auch [2]). Für beliebige noethersche Integritätsbereiche $A$ ist das nicht möglich. Daher kann man als eigentliche Verallgemeinerung des Satzes von Zariski solche Aussagen ansehen, die (unter anderem) über die Dimension und die Kodimension der entsprechenden lokalen Ringe in dem monoidalen Bild von $V$ Auskunft geben. Wir werden diese Aufgabe im folgenden für noethersche Integritätsschemata lösen

und dabei noch die Zariskischen und Northcottschen Voraussetzungen über die Einfachheit z. T. abschwächen, indem wir statt regulärer lokaler Ringe Macaulay-Ringe betrachten. Speziell wird bewiesen, daß bei den betrachteten monoidalen Abbildungen jedes lokal Macaulaysche noethersche Integritätsschema in ein ebensolches übergeführt wird. Bezüglich der verwendeten Bezeichnungen sei auf [4] und die Arbeiten [1] und [2] verwiesen.
Ausgangspunkt ist ein gewisses noethersches Integritätsschema $V$, welches zwei Eigenschaften habe:

I. $V$ ist die Vereinigungsmenge $\bigcup_{i=1}^{n} M(A_i)$, wobei $A_1, \ldots, A_n$ Integritätsbereiche mit dem gleichen Quotientenkörper $K$ sind und $M(B)$ für einen Integritätsbereich $B$ stets die Menge aller Quotientenringe von $B$ bezüglich Primidealen aus $B$ bedeute.
II. Keine verschiedenen lokalen Ringe aus $V$ werden von ein und demselben Bewertungsring von $K$ dominiert.

Für die Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_m$ aus $K$ nennen wir mit den Bezeichnungen

$$x_i = \frac{a_{ji}}{a_{j0}}, \quad a_{jk} \in A_j; \quad j = 1, \ldots, n; \quad k = 0, \ldots, m; \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$A_{jk}^* = A\left[\frac{a_{j0}}{a_{jk}}, \ldots, \frac{a_{jm}}{a_{jk}}\right], \quad 0 \leqq k \leqq m,$$

die Menge $V^* = \bigcup_{j,k} M(A_{jk}^*)$ das durch $x_1, \ldots, x_m$ bestimmte monoidale Bild von $V$. Mit $V$ hat auch $V^*$ die Eigenschaften I und II. Für $R \in V$ bzw. $R^* \in V^*$ bedeute codim $R$ bzw. codim $R^*$ stets die bzgl. $V$ bzw. $V^*$ definierte (kombinatorische) Kodimension.

Satz 1. *Sei $R \in V$ ein Macaulay-Ring und* dim $R = d$, codim $R = c$ *gesetzt. Dann existiert zu jeder Zahl $i$, $0 \leqq i \leqq d-1$ ein monoidales Bild $V_i^*$ von $V$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *In der Menge der $R$ dominierenden lokalen Ringe aus $V_i$ gibt es genau ein maximales Element $R_i^*$.*
2. *Es ist* dim $R_i^* = d - i$, codim $R_i^* = c + i$.

Beweis. Mit $a_1, \ldots, a_d$ als Parametersystem von $R$ setzen wir $x_i =: \frac{a_i}{a_d}$, $i = 1, 2, \ldots, d-1$, und bezeichnen mit $V_i^*$ das durch $x_1, \ldots, x_i$ bestimmte monoidale Bild von $V$. Sei $R_i =: R[x_1, \ldots, x_i]$. Nach [1], Lemma 2, ist $\mathfrak{m}^* =: \mathfrak{m}R_i$ ein über $\mathfrak{m}$ liegendes Primideal, $\mathfrak{m}$ bezeichne das Maximalideal von $R$, und daher $R_i^* =: (R_i)_{\mathfrak{m}^*}$ einziger maximaler Ring in der Menge der $R$ dominierenden Ringe aus $M(R_i)$. Bezeichnet $\nu$ die durch die Ordnungsfunktion des Ideals $(a_1, \ldots, a_d)R$ bestimmte Bewertung von $K$, so überlegt man sich, daß

$$\bar{R}_j =: R\left[\frac{a_1}{a_j}, \ldots, \frac{a_i}{a_j}, \frac{a_d}{a_j}\right] \subseteqq R_\nu, \quad j = \{1, \ldots, i, d\},$$

und $\nu$ in dem Ring $R_j$ das Zentrum $\mathfrak{m}\bar{R}_j$ hat (dieser Gedanke ist im Beweis von [1], Lemma 2, ausführlich dargelegt). Daher ist $R_i^*$ der einzige maximale Ring in der Menge der $R$ dominierenden Ringe aus $V_i$. Sei $\Phi_i$ der kanonische Homomorphismus von $R$ mit dem Kern $\mathfrak{m}R_i$ auf den Ring $\bar{\bar{R}}_i =: k_\mathfrak{m}[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i]$, $k_\mathfrak{m} =: R/\mathfrak{m}$, $\bar{x}_i$ bedeutet den $\mathfrak{m}R_i$-Rest von $x_i$. Der $R$-Rang von $V_i^*$, d. h. der Transzendenzgrad von

$\overline{R}_i$ über $k_{\mathfrak{m}}$ (vgl. [2]), ist gleich $i$. Denn angenommen, es gibt ein Polynom $\bar{f}(X_1, \ldots, X_i)$ vom Grad $t$ mit Koeffizienten aus $k_{\mathfrak{m}}$ mit $\bar{f}(\bar{x}_i \ldots, \bar{x}_i) = 0$. Dann bezeichne $f(X_1, \ldots. X_i) \in R[X_1, \ldots, X_i]$ ein Urbild von $f$, dessen Koeffizienten Einheiten in $R$ sind. Wegen $f(x_1, \ldots, x_i) \in \mathfrak{m}R_i$ ist für eine gewisse Zahl $r$

$$a_d^{r+t} \cdot f(x_1 \ldots, x_i) \in (\mathfrak{a}R_r)^{r+t} \cdot \mathfrak{m},$$

wobei $\mathfrak{a} =: (a_1, \ldots, a_d)R$ ist; $a_d^{r+t} f(x_1, \ldots, x_i)$ ist aber gleich $a_d^r \cdot g(a_1, \ldots, a_i, a_d)$, wobei $g(X_1, \ldots, X_{i+1})$ eine Form vom $t$-ten Grad mit Einheiten aus $R$ als Koeffizienten ist. Das widerspricht aber einem bekannten Satz über das Parametersystem in einem lokalen Ring (vgl. [8], Kap. VIII, Satz 21). Die Aussage über die Kodimension von $R_i^*$ und die Behauptung 1 ergeben sich nun aus [2], Lemma 4.

Es bleibt die Behauptung über die Dimension von $R_i^*$ zu beweisen. Offenbar ist $\mathfrak{m}^*$ ein isoliertes Primideal von $\mathfrak{a}R_i = (a_{i+1}, \ldots, a_d)R_i$, denn jedes Primideal zwischen $\mathfrak{a}R_i$ und $\mathfrak{m}^*$ würde ein Primideal zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{m}$ bedeuten. Daher ist $h(\mathfrak{m})^* = \dim R_i^* \leqq d - i$. Um $h(\mathfrak{m}^*) \geqq d - i$ zu erhalten, zeigen wir, daß kein isoliertes Primideal von $(a_{i+1}, \ldots, a_{i+j})R_i$ das Element $a_{i+j+1}$ enthält, $1 \leqq j \leqq d - i - 1$. Denn dann enthält $\mathfrak{m}^*$ echt ein gewisses Primideal $\mathfrak{p}_1^*$ von $(a_{i+1}, \ldots, a_{d-1})R_i$, $\mathfrak{p}_1^*$ enthält echt ein gewisses Primideal $\mathfrak{p}_2^*$ von $(a_{i+1}, \ldots, a_{d-2})R_i$ usw. Schließlich enthält $\mathfrak{p}^*_{d-i-2}$ echt ein isoliertes Primideal $\mathfrak{p}^*_{d-i-1}$ von $(a_{i+1})$, und wegen

$$\mathfrak{m}^* \supset \mathfrak{p}_i^* \supset \cdots \supset \mathfrak{p}^*_{d-i-1} \supset (0)$$

gilt $h(\mathfrak{m}^*) \geqq d - i$, d. h. $h(\mathfrak{m}^*) = \dim R_i^* = d - i$.
Sei nun $\mathfrak{q}^*$ ein isoliertes Primideal von $(a_{i+1}, \ldots, a_{i+j})R_i$, $1 \leqq j \leqq d - i - 1$. Dann gilt mit $\mathfrak{q} = :\mathfrak{q}^* \cap R$ nach [1], Satz 1, $R_{\mathfrak{q}} = (R_i)_{\mathfrak{q}^*}$, und $\mathfrak{q}$ ist isoliertes Primideal von $(a_{i+1}, \ldots, a_{i+j})R$, enthält also nicht das Element $a_{i+j+1}$, da die Elemente $a_1, \ldots, a_d$ eine Primfolge in $R$ bilden. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Satz 2. *Sind $R$, $R_1$ lokale Ringe aus $V$, $R_1$ eine Spezialisierung von $R$ und Macaulay-Ring und wird $d = :\dim R$, $d_1 = :\dim R_1$, $c = :\operatorname{codim} R$, $c_1 = :\operatorname{codim} R_1$ gesetzt, so gibt es ein monoidales Bild $V^*$ von $V$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *In der Menge der $R$ bzw. $R_1$ dominierenden lokalen Ringe aus $V^*$ gibt es genau ein maximales Element $R^*$ bzw. $R_1^*$, wobei $R_1^*$ eine Spezialisierung von $R^*$ ist.*

2. *Es gilt* $\dim R^* = 1$, $\dim R_1^* = d_1 - d + 1$, $\operatorname{codim} R^* = d + c - 1$, $\operatorname{codim} R_1^* = d + c_1 - 1$. *$R_1^*$ und $R^*$ sind Macaulay-Ringe.*

Beweis. Mit $R = (R_1)_{\mathfrak{p}}$ ist $\mathfrak{p} \subset R_1$ ein Primideal der Höhe $d$, und es existiert ein Parametersystem $(a_1, \ldots, a_{d_1})$ in $R_1$, für welches $\mathfrak{p}$ ein isoliertes Primideal des Teilsystems $(a_1, \ldots, a_d)$, $d \leqq d_1$ ist. Sei $V^*$ das durch die Elemente $\frac{a_1}{a_d}, \ldots, \frac{a_{d-1}}{a_d}$ bestimmte monoidale Bild von $V$. Durch Betrachtung der Ringe $\overline{R}_j =: R\left[\frac{a_1}{a_j}, \ldots, \frac{a_d}{a_j}\right]$ bzw. $\overline{\overline{R}}_j =: R_1\left[\frac{a_1}{a_j}, \ldots, \frac{a_d}{a_j}\right]$, $j = 1, \ldots, d$, überzeugt man sich wie Beweis des Satzes 1 davon, daß es in der Menge der $R$ bzw. $R_1$ dominierenden Ringe aus $V^*$ jeweils genau ein größtes Element gibt. Speziell folgt aus der Tatsache $\mathfrak{p}\overline{\overline{R}}_d \subset \mathfrak{m}_1\overline{\overline{R}}_d$, $\mathfrak{m}_1$ das Maximalideal von $R_1$, da nach [1], Lemma 3, $\mathfrak{p}\overline{\overline{R}}_d$ ein Primideal ist, daß $R_1^*$ eine Spezialisierung von $R^*$ darstellt.

Die behaupteten Dimensions- und Kodimensionsaussagen für $R_1^*$ und $R^*$ folgen aus Satz 1 für $i = d - 1$. Wir haben noch zu zeigen, daß $R_1^*$ und damit auch der Quo-

tientenring $R^*$ ein Macaulay-Ring ist. Sei $\overline{\overline{R}}_d \subseteq R_1^*$. Mit $\mathfrak{a}_1 =: (a_1, \ldots, a_{d_1})R_1$ gilt $\mathfrak{a}_1\overline{\overline{R}}_d = (a_d, \ldots, a_{d_1})\overline{\overline{R}}_d$. Nach [1], Lemma 2, ist $\mathfrak{m}_1^* = : \mathfrak{m}_1\overline{\overline{R}}_d$ ein isoliertes Primideal von $\mathfrak{a}_1\overline{\overline{R}}_1$. Daher ist $a_d, \ldots, a_{d_1}$ ein Parametersystem in $R_1^*$, und nach Definition eines Macaulay-Ringes haben wir $a_d, \ldots, a_{d_1}$ als Primfolge in $R$ nachzuweisen.
Wir setzen $a_d = : a_{d_1+1}$, Nach [8], Anhang 5, Lemma 2, genügt es zu zeigen, daß aus der Annahme, ein isoliertes Primideal $\mathfrak{p}^{**}$ von $(a_{d+1}, \ldots, a_{d+j})R_1^*$, $1 \leqq j \leqq d_1 - d$, enthalte das Element $a_{d+j+1}$, ein Widerspruch resultiert.

Sei also $a_{d+j+1} \in \mathfrak{p}^{**}$ angenommen. Dann ist $\mathfrak{p}^* = : \mathfrak{p}^{**} \cap \overline{\overline{R}}_d$ ein isolierter Primideal von $(a_{d+1}, \ldots, a_{d+j})\ \overline{\overline{R}}_d$ und enthält $a_{d+j+1}$. Nach [1], Satz 1, ist dann $\bar{\mathfrak{p}} = : \mathfrak{p}^* \cap R_1$ ein isoliertes Primideal von $(a_{d+1}, \ldots, a_{d+j})$, welches das Element $a_{d+j+1}$ enthält. Da die Elemente $a_1, \ldots, a_{d_1}$ eine Primfolge in $R_1$ bilden, bedeutet das einen Widerspruch. Damit ist $R_1^*$ ein Macaulay-Ring und der Satz 2 bewiesen.

Folgerung. *Ist mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Satz 2 $R_1^{**}$ eine $R_1$ dominierende Spezialisierung von $R_1^*$, so ist $R_1^{**}$ ein Macaulay-Ring.*

Beweis. Man kann etwa $R_1^{**} = (\overline{\overline{R}}_d)_{\mathfrak{m}_1^{**}}$ annehmen. Das Primideal $\mathfrak{m}_1^{**}$ ist in einem maximalen Primideal aus $\overline{\overline{R}}_d$ enthalten, welches notwendig ebenfalls über $\mathfrak{m}_1$ liegt. Ist der Quotientenring von $\overline{\overline{R}}_d$ bzgl. dieses maximalen Primideals Macaulaysch, so gilt gleiches offenbar für $\mathfrak{m}_1^{**}$. Daher kann man o.B.d.A. $\mathfrak{m}_1^{**}$ als maximal ansehen.
Nach dem Beweis von Satz 1 ist

$$\tilde{R} = : \overline{\overline{R}}_d/\mathfrak{m}_1^* = k_{\mathfrak{m}_1}[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{d-1}]$$

ein Polynomring. Das Bildideal von $\mathfrak{m}_1^{**}$ in diesem Polynomring hat eine Basis

$$\bar{f}_1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{d-1}), \ldots, \bar{f}_{d-1}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{d-1})$$

aus $d - 1$ Elementen. Mit $f_k(x_1, \ldots, x_{d-1}) \in \overline{\overline{R}}_d$ als Urbild von $\bar{f}_k(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{d-1})$ bilden die Elemente

$$f_1, \ldots, f_{d-1}, a_d, \ldots, a_{d_1} \tag{1}$$

eine Primfolge und ein Parametersystem in dem lokalen Ring $(\overline{\overline{R}}_d)_{\mathfrak{m}_1^{**}}$. Dazu überlegt man sich zunächst, daß $\mathfrak{m}_1^{**}$ ein isoliertes Primideal des von dem System (1) in $\overline{\overline{R}}_d$ erzeugten Ideals ist und wegen $h(\mathfrak{m}_1^{**}) \geqq h(\mathfrak{m}^*) + d - 1 = (d_1 - d + 1) + d - 1 = d_1$ das System (1) in $(\overline{\overline{R}}_d)$ tatsächlich ein Parametersystem ist. Die Primfolgeneigenschaft des Systems $a_d, \ldots, a_{d_1}$ in $R_1^{**}$ überlegt man sich ähnlich wie in obigem Beweis für den Ring $R_1^*$. Da ferner die Elemente $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_{d-1}$ eine Primfolge in $\tilde{R}$ bilden, überlegt man sich leicht, daß auch das System (1) eine Primfolge in $R$ darstellt.

## LITERATUR


[1] BUROSCH, G.: Über Beziehungen zwischen den Primidealen noetherscher Integritätsbereiche mit gleichem Quotientenkörper III. Math. Nachr. (im Druck).

[2] BUROSCH, G.: Über die Erhöhung der Kodimension eines lokalen Ringes bei monoidalen Abbildungen. Math. Nachr. (im Druck)

[3] BUROSCH, G.: Verwandte Mannigfaltigkeiten. Habilitationsschrift, Rostock 1969.

[4] GROTHENDIECK, A., und J. DIEUDONNÉ: Eléments de géometrie algébrique I, $IV_1$, $IV_2$, $IV_3$. Publ. Math. Inst. des Hautes Etudes *4* (1960), *20* (1964), *24* (1965), *28* (1966).

[5] KURKE, H.: Einige Eigenschaften von quasiendlichen Morphismen. Monatsber. Dt. Akad. Wiss. Berlin, Bd. 9, Heft 4/5 (1967).
[6] NORTHCOTT, D. G.: On the algebraic foundations of the theory of local dilatations. Proc. London Math. Soc. (3) *6* (1956), 267–285.
[7] ZARISKI, O.: Foundations of a general theory of birational correspondences. Trans. Amer. Math. Soc. *53* (1943) 490–542.
[8] ZARISKI, O., and P. SAMUEL: Commutative algebra I, II. New York 1958, 1960.

Manuskripteingang: 27. 10. 1970

VERFASSER:

GUSTAV BUROSCH, Sektion Mathematik der Universität Rostock