

## Werk

**Titel:** Ein Zusammenhang zwischen Fries-Zahlenmuster und Orthosohemketten

**Autor:** BÖHM, J.

**Jahr:** 1971

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052\\_0001](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0001) | log17

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

# Ein Zusammenhang zwischen Fries-Zahlenmuster und Orthoschemketten

JOHANNES BÖHM

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

## 1. Einleitung

Beim Studium von Fries-Zahlenmustern der Ordnung  $n$ , deren Elemente — abgesehen von den beiden Randzeilen — positiv sind und alle eine unimodulare Relation erfüllen, stellt COXETER [5] fest, daß diese Muster zwei Bewegungen gestatten, nämlich eine horizontale Translation um  $n$  Elemente und eine Gleitspiegelung in bezug auf die horizontale Mittellinie. Andererseits läßt sich zu einem rechtwinkligen Simplex im  $r$ -dimensionalen elliptischen Raume, einem sogenannten Orthoschem (vgl. etwa SCHLÄFLI [9]) in Verallgemeinerung der Neperschen Regel [7] und des Gaußschen Pentagramma Mirifikum [6] in bestimmter Weise eine geschlossene Kette von  $r + 3$  Orthoschemen konstruieren, die über einem Kantenzug von  $r + 3$  hypotenuseartigen Orthoschemkanten zusammenhängen (vgl. [1] und [9]). Es soll hier gezeigt werden, daß sich die Elemente einer wohlbestimmten Zeile eines beliebigen Friesmusters der Ordnung  $n$  ( $\geq 4$ ) mit positiven Elementen im wesentlichen stets jeweils mit den Maßzahlen für die aufeinanderfolgenden Kanten des Kantenzuges einer geschlossenen Kette von  $(n - 3)$ -dimensionalen geeigneten Orthoschemen identifizieren lassen. Die Einschränkung „im wesentlichen“ soll bedeuten, daß das Quadrat der Tangensfunktion von den Kantenmaßzahlen zu nehmen ist. Die Umkehrung dieses Ergebnisses erweist sich nur im Fall der Ordnung  $n = 2m + 1$  ( $m = 2, 3, 4, \dots$ ) als richtig. Falls  $n$  gerade ist, d. h. also bei ungerader Dimensionszahl, ist die Umkehrung nur für eine Klasse von speziellen Orthoschemen möglich. Lassen wir in unserem Muster auch negative Elemente zu, dann können wir die Ergebnisse vermittle analytischer Fortsetzung auf Orthoschemketten im hyperbolischen bzw. Minkowskischen Raum übertragen.

## 2. Friesmuster

In Rede steht ein Fries-Zahlenmuster  $n$ -ter Ordnung, das ein  $(n + 1)$ -zeiliges Schema

$$(a_{ik}) \text{ mit } i = 0, 1, 2, \dots, n; k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

darstellt. Ferner mögen die folgenden Eigenschaften für beliebige  $k$  gelten:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad a_{0,k} = a_{n,k} = 0, \\
& \text{(b)} \quad a_{1,k} = a_{n-1,k} = 1, \\
& \text{(c)} \quad a_{i,k} > 0 \quad (1 < i < n-1), \\
& \text{(d)} \quad a_{i,k} \cdot a_{i,k+1} - a_{i-1,k+1} \cdot a_{i+1,k} = 1 \quad (1 \leq i \leq n-1).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Das bedeutet, daß die Elemente der oberen sowie der unteren Randzeile durchweg gleich Null sind und die jeweils nächsten Zeilen nach dem Inneren des Musters aus Einsen bestehen. Alle Elemente, abgesehen von den Randzeilen, sind positiv, und die vierte Eigenschaft beinhaltet, daß immer die Elemente

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \cdots & a_{i-1,k+1} & \cdots & & \\
& \cdots & a_{i,k} & & a_{i,k+1} & \cdots & \\
& & \cdots & a_{i+1,k} & \cdots & & 
\end{array} \tag{2.3}$$

eine „unimodulare“ Gleichung befriedigen. Ein Beispiel für ein solches Muster (hier speziell — aber nicht notwendig — mit ganzen Zahlen) ist etwa

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & 3 & 1 & 4 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & \cdots \\
\cdots & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 5 & 2 & 2 & 2 & \cdots \\
\cdots & 1 & 5 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 5 & \cdots \\
\cdots & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 2 & \cdots \\
\cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots
\end{array} \tag{2.4}$$

Drücken wir  $a_{ik}$  durch die Zweizeigersymbole  $(r, s)$  aus mit

$$a_{ik} = (k, k+i), \tag{2.5}$$

so gilt gemäß unserer Eigenschaften (2.2)

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad (k, k) = (k, k+n) = 0, \\
& \text{(b)} \quad (k, k+1) = (k, k+n-1) = 1, \\
& \text{(c)} \quad (k, k+i) > 0 \quad \text{für } 1 < i < n-1, \\
& \text{(d)} \quad (k, k+i) \cdot (k+1, k+1+i) - (k+1, k+i) \cdot (k, k+i+1) = 1 \\
& \quad \text{für } 1 \leq i \leq n-1
\end{aligned} \tag{2.6}$$

oder, wenn wir  $k = r, k+i = s$ , setzen anstelle (2.6d)

$$(r, s) \cdot (r+1, s+1) - (r+1, s) \cdot (r, s+1) = 1. \tag{2.7}$$

Diese letzte Beziehung ist, wenn wir wegen (2.6b)

$$(r, s) (r+1, s+1) - (r+1, s) (r, s+1) = (r, r+1) (s, s+1) = 1 \tag{2.8}$$

schreiben, ein Spezialfall mit  $t = r+1$  und  $u = s+1$  für die Relation

$$(r, s)(t, u) + (r, t)(u, s) + (r, u)(s, t) = 0 \quad (2.9)$$

mit der Nebenbedingung für beliebige  $q$

$$(q, q+1) = 1. \quad (2.10)$$

Nach MITRINOVIC-PREŠIĆ [8] lautet nämlich die allgemeine Lösung dieser Funktionalgleichung (2.9)

$$(r, s) = f(r)g(s) - f(s)g(r) \quad (2.11)$$

mit beliebigen Funktionen  $f(t)$  und  $g(t)$ . Darum gilt auch hier stets für alle  $r$  und  $s$  (was beim Vergleich von (2.8) mit (2.9) bereits berücksichtigt wurde)

$$(r, s) = -(s, r) \quad (2.12)$$

und somit auch

$$(r, r) = 0. \quad (2.13)$$

Diese Darstellung (2.11), jetzt

$$(r, s) = f_r g_s - f_s g_r \text{ für ganze } r \text{ und } s \quad (2.14)$$

geschrieben, gab COXETER [5] Veranlassung, das allgemeine Glied  $a_{ik}$  eines Friesmusters der Ordnung  $n$  aus einer Diagonalreihe, etwa aus

$$a_{s,0} = (0, s) \quad (s = 0, 1, \dots, n), \quad (2.15)$$

(eindeutig) zu bestimmen. Denn setzen wir gemäß der allgemeinen Lösung (2.14)

$$(0, s) = f_0 g_s - f_s g_0 \quad (2.16)$$

und fordern

$$(0, s) = g_s, \quad (2.17)$$

dann erhalten wir

$$f_0 = 1 \quad (2.18)$$

wegen  $g_0 = (0, 0) = 0$ . Infolge

$$(s, s+1) = f_s g_{s+1} - f_{s+1} g_s = 1 \quad (2.19)$$

können wir auf Grund der unimodularen Relation (2.7) für das Muster identifizieren

$$f_s = (-1, s); \quad (2.20)$$

denn wie wir sofort sehen, gilt im Muster

$$\begin{aligned} \cdots f_{-1}, g_0 = (0, 0) = 0, \dots, \\ \cdots f_0 = 1, g_1 = (0, 1) = 1, \dots, \\ \cdots g_2 = (0, 2), \dots \\ \vdots \\ \cdots g_s, \dots \\ \cdots f_s, g_{s+1}, \dots \\ \cdots f_{s+1}, \dots \\ \vdots \end{aligned} \quad (2.21)$$

was ferner

$$f_{-1} = f_{n-1} = g_n = 0, f_{n-2} = g_{n-1} = 1 \quad (2.22)$$

zur Folge hat. Die übrigen  $f_s$  lassen sich dann sukzessiv bestimmen aus

$$f_s = \frac{f_{s+1}g_s + 1}{g_{s+1}} \quad (s = n-3, n-2, \dots, 2, 1) \quad (2.23)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$f_{n-2} = 1 \text{ und } g_s = (0, s) = a_{s,0} \quad (s = 1, \dots, n-2). \quad (2.24)$$

Um für beliebige  $s$  die Werte  $f_s$  und  $g_s$  zu bestimmen, zeigt COXETER, daß sich aus den bisherigen Relationen die Fortsetzungen der  $f_s$  und  $g_s$  notwendig periodisch mit der Halbperiode  $n$  ergeben zu

$$f_{s+n} = -f_s \text{ und } g_{s+n} = -g_s. \quad (2.25)$$

Denn wir erhalten aus (2.9) mit  $t = s-1$  und  $u = s+n$  unter Beachtung von

$$(s-1, s) = a_{1,s-1} = (s, s+n-1) = a_{n-1,s} = 1 \quad (2.26)$$

(vgl. (2.6b)) und

$$(s, s+n) = a_{n,s} = 0 \quad (2.27)$$

(vgl. (2.6a)) und gemäß (2.9)

$$\begin{aligned} (s-1, s+n) + 1 &= (s-1, s+n) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ &= (s-1, s+n) (s, s+n-1) + (s-1, s) (s+n-1, s+n) \\ &\quad + (s-1, s+n-1) (s+n, s) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

die Beziehung

$$(r, s) (s-1, s+n) + (r, s-1) (s+n, s) + (r, s+n) (s, s-1) = 0. \quad (2.29)$$

Daraus ergibt sich

$$0 = (r, s) + (r, s+n) = (f_r g_s - f_s g_r) + (f_r g_{s+n} - f_{s+n} g_r) \quad (2.30)$$

oder

$$f_r (g_s + g_{s+n}) = g_r (f_s + f_{s+n}), \quad (2.31)$$

Da dieses für beliebige  $r$  und  $s$  richtig sein muß, (z. B. für  $r = n-1$  und  $r = 0$ ), folgt sofort (2.25).

Aus (2.25) läßt sich schließlich wegen

$$\begin{aligned} (s, r+n) &= f_s g_{r+n} - f_{r+n} g_s \\ &= -f_s g_r + f_r g_s = (r, s) \end{aligned} \quad (2.32)$$

die für das Muster fundamentale Beziehung

$$(r, s) = (s, r+n) = (r+n, s+n) \quad (2.33)$$

herleiten. Die Beziehung (2.33) bedeutet, daß das Muster eine Gleitspiegelung an seiner Mittellinie gestattet. Die nochmalige Anwendung dieser Gleitspiegelung ergibt bezüglich des ursprünglichen Musters eine Translation in Richtung der Mittellinie um  $n$  Elemente. Beides erkennen wir schnell, wenn wir die Gleichung (2.33) in den  $a_{ik}$  aufschreiben und  $s-r=h$  setzen:

$$a_{h,r} = a_{n-h,r+h} = a_{h,r+n}. \quad (2.34)$$

Dann stellt die erste Gleichung in (2.34) — abgesehen von der Spiegelung, die die Zeile  $h$  in die Zeile  $n - h$  bringt — eine Translation in positiver Zeilenrichtung um

$$\frac{1}{2} \{(n - h) - h\} + h = \frac{n}{2} \quad (2.35)$$

Elemente dar. Die zweite Gleichung in (2.34) läßt die reine Translation mit fester Zeile  $h$  und Verschiebung um  $n$  Elemente erkennen. Daher hat zum Beispiel ein Friesmuster der Ordnung fünf in Zweizeigersymbolen die folgende Gestalt:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \dots & (44) & & (00) & (11) & (22) & (33) & (44) & & (00) & (11) & (22) & \dots \\ & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ \dots & & (04) & (01) & (12) & (23) & (43) & (04) & (01) & (12) & \dots \\ & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ \dots & (03) & (14) & (02) & (13) & (24) & (03) & (14) & (02) & (13) & \dots \\ & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ \dots & & (13) & (24) & (03) & (14) & (02) & (13) & (24) & (03) & \dots \\ & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ \dots & (12) & (23) & (34) & (04) & (01) & (12) & (23) & (34) & (04) & \dots \\ & & (22) & (33) & (44) & (00) & (11) & (22) & (33) & (44) & \dots \end{array} \quad (2.36)$$

Bei einem Friesmuster gerader Ordnung  $n = 2m$  gestattet darum die Mittellinie bereits eine Translation in seiner eigenen Richtung um  $m$  Elemente.

### 3. Orthoschem-Ketten

Ein Orthoschem  $S^{(n)}$  in einem Riemannschen Raum konstanter Krümmung (vgl. etwa [2]) ist ein  $(n - 1)$ -dimensionales Simplex mit den folgenden Eigenschaften: Es hat  $n$  Ecken  $1, 2, 3, \dots, n$ . Die Keilwinkel  $\alpha_{ik}$  zwischen zwei diesen Ecken jeweils gegenüberliegenden Wänden  $i$  und  $k$  des Orthoschems sind stets gleich  $\frac{\pi}{2}$ , wenn  $|i - k| > 1$  ist. Folglich gibt es  $n - 1$  eigentliche Keilwinkel

$$v_i^{(2)} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1), \quad (3.1)$$

die das Orthoschem bis auf seine Lage im Raum vollständig und eindeutig bestimmen. Wir wollen hier den elliptischen Fall mit  $k = 1$  betrachten und verwenden zweckmäßigerweise als Modell des Raumes die Oberfläche der  $n$ -dimensionalen Einheits-Hyperhalbkugel, auf der wir unser Orthoschem gelegen denken.

Ein beliebiges eigentliches Polyeder in diesem Raum läßt sich stets durch Orthoscheme zusammensetzen, für deren sämtlichen Keilwinkeln

$$0 < v_i^{(2)} < \frac{\pi}{2} \quad (3.2)$$

gilt. Orthoscheme, die dieser Beziehung (3.2) genügen, können wir folglich als Bausteine für beliebige Polyeder auffassen. Wir wollen darum jetzt nur solche Orthoscheme betrachten.

Diejenigen Kanten und Winkel beliebiger Ordnung unseres Orthoschems, die ver-

schieden von  $\frac{\pi}{2}$  sein können, lassen sich bequem durch die Coxeterschen Vierzeigersymbole [4] gemäß der folgenden Festsetzung bezeichnen:

a) Kante zwischen den beiden Eckpunkten  $k_1$  und  $k_2$  ( $k_1 < k_2$ ):

$$[0, k_1, k_2, n+1]. \quad (3.3)$$

b) Dreieckswinkel im Dreieck mit den Eckpunkten  $k_1, k_2, k_3$  ( $k_1 < k_2 < k_3$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{Winkel bei } k_1: & [k_1, k_2, k_3, n+1], \\ \text{Winkel bei } k_2: & \frac{\pi}{2} \quad \text{infolge der Orthoschem-Eigenschaft,} \\ \text{Winkel bei } k_3: & [0, k_1, k_2, k_3]. \end{array} \quad (3.4)$$

c) Tetraederwinkel im Tetraeder mit den Eckpunkten  $k_1, k_2, k_3, k_4$  ( $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$ ):

$$\text{Keilwinkel an der Kante } [0, k_1, k_4, n+1]: [k_1, k_2, k_3, k_4]. \quad (3.5)$$

Alle übrigen Winkel des Orthoschems, die verschieden von  $\frac{\pi}{2}$  und bisher noch nicht erfaßt sind, stimmen infolge der Rechtwinkelkonstruktion des Orthoschems mit einem der hier bereits angegebenen Winkel überein und sollen darum dasselbe Symbol wie dieser erhalten. Für die Vierzeigersymbole gelte

$$[r, s, t, u] = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \Pi_1[r, s, t, u], \\ \Pi_2[r, s, t, u], \end{cases} \quad (3.6)$$

falls  $0 \leq r < s < t < u \leq n+1$ ,  $\Pi_1$  eine ungerade und  $\Pi_2$  eine gerade Permutation ist.

Durch die Angabe von  $n-1$  geeigneten (unabhängigen) Elementen eines Orthoschems, z. B. den  $n-1$  Keilwinkeln

$$v_k^{(2)} = [k-1, k, k, +1, k+2], \quad (3.7)$$

sind seine übrigen Elemente eindeutig bestimmt. Damit jedoch gesichert ist, daß im elliptischen Raum ein Orthoschem mit vorgegebenen Keilwinkeln existiert, müssen zwischen diesen Keilwinkeln gewisse Ungleichungen erfüllt sein. Mit Hilfe solcher Ungleichungen läßt sich dann sofort entscheiden, ob zu vorgegebenen Keilwinkeln das Orthoschem in einem elliptischen, hyperbolischen oder gemischten (Minkowskischen) Raum sich realisieren läßt.

Zwischen verschiedenen Orthoschem-Elementen bestehen i. a. gewisse Bindungen, die durch eine Verallgemeinerung der für das rechtwinklige sphärische Dreieck bekannten Neperschen Regel beschrieben werden können. So gilt für die fünf Elemente

$$\begin{aligned} [r, s, t, u] &= a_0, \quad [v, r, s, t] = a_1, \quad [u, v, r, s] = a_2, \\ [t, u, v, r] &= a_3, \quad [s, t, u, v] = a_4, \end{aligned} \quad (3.8)$$

falls  $0 \leq r < s < t < u < v \leq n+1$ ,  $r, s, t, u, v$  ganz und

$$\tan^2 a_i = t_i \quad (3.9)$$

gesetzt wird,

$$t_i = t_{i+2}t_{i-2} - 1 \quad (\text{Index modulo } 5) \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4). \quad (3.10)$$

Führen wir anstelle der Vierzeigersymbole die Coxeterschen Zweizeigersymbole  $(r, s) (= -(s, r))$  ein (vgl. [4]), die mit den Vierzeigersymbolen durch die Beziehung

$$\tan^2[r, s, t, u] = \frac{(r, u)(s, t)}{(r, s)(t, u)} \quad (3.11)$$

verknüpft sind, so stellt (3.10) die Funktionalgleichung (2.9) dar, wie man schnell verifizieren kann. Wir erhalten also so wiederum unsere bereits im zweiten Abschnitt eingeführten Zweizeigersymbole. Für die Existenz eines eigentlichen Orthoschems im elliptischen Raum ist notwendig und hinreichend, daß sämtliche Zweizeigersymbole, aus denen die Orthoschem-Elemente aufgebaut werden, positiv sind.

Der Neperschen Regel für das rechtwinklige sphärische Dreieck (das ist ein zweidimensionales Orthoschem  $S^{(2)}$ ) können wir als geometrische Interpretation die Figur des Gaußschen Pentagramma Mirifikum gegenüberstellen. Durch die fortwährende Konstruktion eines Nachbardreiecks zu einem vorgegebenen rechtwinkligen sphärischen Dreieck entsteht eine geschlossene periodische Kette von fünf rechtwinkligen sphärischen Dreiecken, die an den Endpunkten ihrer Hypotenuse zusammenhängen. Ihre fünf Hypotenusen bilden einen geschlossenen Kantenzug, eben das Pentagramma Mirifikum (vgl. [3] und [4]).

Die Konstruktion eines Nachbarorthoschems im allgemeinen Fall der Dimension  $n - 1$  geschieht auf folgende Weise: Die beiden Eckpunkte 1 und  $n$ , die die Hypotenuse des Orthoschems verbindet, nennen wir die beiden Hauptecken des Orthoschems. Über eine Hauptecke werden sämtliche Kanten, die dort enden, um das Komplement ihrer Länge verlängert. Es entsteht wiederum ein Orthoschem, das wir das Nachbarorthoschem nennen wollen. Zu diesem wird in demselben Sinne nochmals das Nachbarorthoschem konstruiert. Es ergeben sich  $n + 2$  Orthoscheme. Das Nachbarorthoschem zu dem  $(n + 2)$ -ten dieser Orthoscheme fällt im elliptischen Falle wieder mit dem Ausgangsorthoschem zusammen. Das läßt sich mit einer Betrachtung über Pol-Polare-Beziehungen schnell feststellen. Im sphärischen Modell gilt dasselbe nur für gerade Dimensionszahl, wie das etwa beim Dreieck der Fall ist. Bei ungerader Dimensionszahl stellt das  $(n + 3)$ -te Nachbarorthoschem das zum Ausgangsorthoschem gehörige diametrale Orthoschem auf der anderen Halbhypersphäre dar; erst der nochmalige Durchlauf von weiteren  $n + 2$  Nachbarorthoschemen bringt uns zu dem Ausgangsorthoschem zurück. Beim Studium dieses Sachverhaltes spielt die Tatsache eine Rolle, daß die Spiegelung am Mittelpunkt der Hypersphäre eine direkte bzw. indirekte Bewegung ist, je nachdem, ob die Dimension der Hypersphärenfläche ungerade oder gerade ist. Im Fall der geraddimensionalen Hypersphärenfläche läßt diese kein direkt kongruentes Diametral-Orthoschem zu.

Analytisch läßt sich diese Nachbarbildung mit Hilfe der Vierzeigersymbole leicht beschreiben. Wir erhalten aus dem Orthoschem mit den Elementen  $[r, s, t, u]$ ,  $0 \leq r, s, t, u \leq n + 1$  ein Nachbarorthoschem, indem an Stelle des Elementes

$$[r, s, t, u] \quad (3.12)$$

das Element

$$[r + 1, s + 1, t + 1, u + 1] \quad (\text{Index modulo } n + 2) \quad (3.13)$$

gesetzt wird. Wir sehen sofort, daß nach  $n + 2$  Schritten ein Orthoschem erreicht

ist, was dieselben Elemente wie das Ausgangsorthoschem besitzt und demzufolge zu diesem kongruent ist. Die Untersuchung der Lagebeziehung geht auch hier über den Zusammenhang von Pol und Polare. Bleiben wir weiterhin im elliptischen Fall, dann ergibt sich, daß diese Kette von  $n + 2$  Nachbarorthoschemen an einem Zug von  $n + 2$  Kanten zusammenhängt, die jeweils in dem betreffenden Orthoschem die Verbindungskanten der beiden Hauptecken sind und folglich eine Art „Hypotenuse“ des Orthoschems darstellen. Dieser Kantenzug der Kanten

$$h_0, h_1, \dots, h_{n+1} \quad (3.14)$$

wird gebildet von den folgenden Elementen des Ausgangsorthoschems, wie sich infolge der Regel für die Nachbarbildung sofort bestimmen läßt:

$$\begin{aligned} [0, 1, n, n+1], [1, 2, n+1, 0], [2, 3, 0, 1] &= [0, 1, 2, 3], [2, 3, 4, 5], \dots, \\ [n-3, n-2, n-1, n], [n-2, n-1, n, n+1], [n-1, n, n+1, 0], \\ [n, n+1, 0, 1] &= [0, 1, n, n+1] = \text{Ausgangskante}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Das heißt aber, daß unser Kantenzug sich aus sämtlichen  $n - 1$  Keilwinkeln

$$h_k = v_k^{(2)} = [k-1, k, k+1, k+2] \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad (3.16)$$

der Orthoschem-Hypotenuse

$$h_{n+1} = [0, 1, n, n+1] \quad (3.17)$$

und den Komplementen der beiden bezüglich des Ausgangsorthoschems kathetenartigen Kanten

$$\frac{\pi}{2} - h_0 = [0, 1, 2, n+1], \frac{\pi}{2} - h_n = [0, n-1, n, n+1] \quad (3.18)$$

zyklisch in der oben angegebenen Reihenfolge (3.14), somit auch wie (3.15), zusammensetzt. In der Kette der  $n + 2$  Nachbarorthoscheme finden wir auch die Pentagramma-Figur wieder sowie algebraisch die Nepersche Regel. Zur Theorie der Nachbarorthoscheme für allgemeine Dimensionszahlen vgl. SCHLÄFLI [9] und [2].

#### 4. Zusammenhang zwischen Fries-Zahlenmuster und Orthoschemketten

COXETER zeigt in [5], daß ein Friesmuster der Ordnung fünf, das infolge seiner Symmetrie, abgesehen von den beiden Randzeilen, fünf verschiedene Elemente i. a. enthält, die periodisch auftreten, in einem engen Zusammenhang mit dem Pentagramma Mirifikum steht. Es ergibt sich, daß sich die Tangentenquadrate für die Maßzahlen des Hypotenusenkantenzuges der Dreieckskette, der das Pentagramma bildet, mit den fünf verschiedenen Elementen des Friesmusters identifizieren lassen; denn zu dem Kantenzug gehören in der Reihenfolge eines geeigneten Durchlaufes folgende

Kanten, die wir gleich durch die Zweizeigersymbole ersetzen wollen:

$$\begin{aligned}
 \tan^2 [2340] &= \cot^2 [0234] = \frac{(02)}{(04)} (= \tan^2 h_3 = t_3), \\
 \tan^2 [3401] &= \tan^2 [0134] = (13) (04) (= \tan^2 h_4 = t_4), \\
 \tan^2 [4012] &= \cot^2 [0124] = \frac{(24)}{(04)} (= \tan^2 h_0 = t_0), \\
 \tan^2 [0123] &= (03) (= \tan^2 h_1 = t_1), \\
 \tan^2 [1234] &= (14) (= \tan^2 h_2 = t_2).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dieses läßt sich in einem Dreiecksschema schreiben als

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
 & & \frac{(02)}{(04)} & & (13) (04) & & \frac{(24)}{(04)} & & \\
 & & & (03) & & (14) & & & \\
 & & & & 1 & & & & 
 \end{array} \tag{4.2}$$

Vergleichen wir dieses mit dem Schema

$$\begin{array}{ccccccccc}
 (00) & & (11) & & (22) & & (33) & & (44) \\
 & (01) & & (12) & & (23) & & (34) & \\
 & & (02) & & (13) & & (24) & & \\
 & & & (03) & & (14) & & & \\
 & & & & (04) & & & & 
 \end{array} \tag{4.3}$$

für das wegen der Eigenschaft der Zweizeigersymbole die unimodulare Regel (2.7) gilt, dann sehen wir, daß auch für unser erstes Schema (4.2) diese Regel gelten muß. Denn durch Multiplikation von wohlbestimmten Elementen des Schemas mit (04) bzw. Division durch (04) bleibt diese Regel erhalten. Wegen der Periodizitäts-Eigenschaft eines Friesmusters läßt sich unser Schema (4.2) zu einem Friesmuster fortsetzen (vgl. auch (2.36)):

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 \dots 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \dots \\
 \dots 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\
 \dots t_0 & & t_1 & & t_2 & & t_3 & & t_4 & & t_0 & & t_1 & & t_2 & \dots \\
 \dots t_2 & & t_3 & & t_4 & & t_0 & & t_1 & & t_2 & & t_3 & & t_4 & \dots \\
 \dots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\
 \dots & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \dots
 \end{array} \tag{4.4}$$

Umgekehrt gibt stets ein Friesmuster der Ordnung fünf zu einem Pentagramma Anlaß. Denn es gilt hier die unimodulare Regel, die für die Friesenlemente die Nepersche Regel (3.10) bedeutet. Gilt jedoch für fünf Elemente (3.10), dann kann man aus ihnen ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck zusammensetzen und die Pentagrammafigur erzeugen.

Es taucht darum die Frage auf, ob auch die Friesmuster höherer Ordnung mit einer Orthoschemkette in ähnlicher Weise zusammenhängen.

Zunächst soll gezeigt werden, daß ein beliebiges Friesmuster ungerader Ordnung  $2m + 1$  mit einer Kette von Orthoschemen der Dimension  $2m - 2$  in Verbindung gebracht werden kann. Verändern wir das Dreiecksschema der Zweizeigersymbole  $((0, 2m) \neq 0)$

[illegible]

in der Weise, daß wir alle Elemente mit  $0 \leq r, s \leq 2m$

$(2r - 1, 2s - 1)$  mit  $(0, 2m)$  multiplizieren,

$$(2r, 2s) \text{ durch } (0, 2m) \text{ dividieren,} \quad (4.6)$$

dann bleibt trotzdem noch die unimodulare Regel (2.7) erhalten. Wir sehen das leicht ein, indem wir in (4.5) die verschiedenen Möglichkeiten für gerade bzw. ungerade Zeiger  $k$  und  $i$  diskutieren, etwa z. B.

$$k = 2r - 1, i = 2(s - r) + 1, \quad (4.7)$$

woraus  $k + i = 2s$  folgt. Dann können wir

$$1 = (2r - 1, 2s)(2r, 2s + 1) - (2r, 2s)(2r - 1, 2s + 1) \quad (4.8)$$

$$= (2r-1, 2s)(2r, 2s+1) - \frac{(2r, 2s)}{(0, 2m)} \left\{ (2r-1, 2s+1)(0, 2m) \right\}$$

schreiben und die Richtigkeit unserer Behauptung erkennen.

Es ergibt sich so ein Dreiecksschema, das zu einem Friesmuster der Ordnung  $2m + 1$  ergänzt werden kann, nämlich

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots, \frac{(0,0)}{(0,2m)}, (1,1)(0,2m), \frac{(2,2)}{(0,2m)}, & . & . & . & . & . & \frac{(2m,2m)}{(0,2m)}, \dots \\
 \dots, (0,1) & & (1,2) & & (2,3) & . & . & . & . & (2m-1,2m), \dots \\
 & \dots, & \frac{(0,2)}{(0,2m)}, & & (1,3)(0,2m), & . & . & . & . & \frac{(2m-2,2m)}{(0,2m)}, \dots \\
 & & \dots, & (0,3) & & (1,4) & . & . & . & (2m-3,2m), \dots \\
 & & & \dots & & \dots & & & & \\
 & & \dots, & \frac{(0,2m-2)}{(0,2m)}, & (1,2m-1)(0,2m), & \frac{(2,2m)}{(0,2m)}, & \dots \\
 & & & \dots, & (0,2m-1), & & (1,2m), \dots \\
 & & & & & \frac{(0,2m)}{(0,2m)}, & \dots
 \end{array} \tag{4.9}$$

So wie in (4.9) kann jedes beliebige Friesmuster der Ordnung  $2m + 1$  interpretiert werden. Die Elemente der vierten Zeile

$$(0,3), (1,4), \dots, (2m-3,2m), \frac{(0,2m-2)}{(0,2m)}, (1,2m-1)(0,2m), \frac{(2,2m)}{(0,2m)} \tag{4.10}$$

(und damit wegen der Symmetrie auch der  $(2m-1)$ -ten Zeile) können wir mit Hilfe der Vierzeigersymbole in der Gestalt

$$\begin{aligned}
 \tan^2[0123] &= \tan^2 v_1^{(2)} = \tan^2 h_1, \dots \\
 \tan^2[2m-3, 2m-2, 2m-1, 2m] &= \tan^2 v_{2m-2}^{(2)} = \tan^2 h_{2m-2}, \\
 \cot^2[0, 2m-2, 2m-1, 2m] &= \tan^2 h_{2m-1}, \tan^2[0, 1, 2m-1, 2m] = \tan^2 h_{2m}, \\
 \cot^2[0, 1, 2, 2m] &= \tan^2 h_0
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

schreiben, so daß wir unmittelbar den Zusammenhang mit dem Kantenzug der Orthoschemkette sehen, die von dem  $(2m-2)$ -dimensionalen Orthoschem

$$S^{(2m-1)}(v_1^{(2)}, \dots, v_{2m-2}^{(2)}) \tag{4.12}$$

erzeugt wird.

Umgekehrt finden wir zu einer Orthoschemkette mit dem Grundorthoschem (4.12) in eindeutiger Weise das Friesmuster (4.9), indem wir die Muster-Elemente

$$(r, r+3) \tag{4.13}$$

der vierten Zeile mit

$$\tan^2 v_{r+1}^{(2)} \quad (r = 0, \dots, 2m-3) \tag{4.14}$$

identifizieren. Auf Grund der Symmetrie des Musters wird dann diese Zeile noch durch die Elemente

$$\tan^2 h_{2m-1}, \tan^2 h_{2m}, \tan^2 h_0 \quad (4.15)$$

ergänzt, die in (4.9) in der  $(2m - 1)$ -ten Zeile stehen. Für unser Beispiel (2.4) etwa bedeutet das, daß zu diesem Friesmuster eine geschlossene Kette von vierdimensionalen Orthoschemen gehört, die durch Nachbarbildung etwa aus dem Grundorthoschem

$$S^{(5)}(v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, v_3^{(2)}, v_4^{(2)}) \quad (4.16)$$

mit

$$\tan^2 v_1^{(2)} = 5, \tan^2 v_2^{(2)} = \tan^2 v_3^{(2)} = \tan^2 v_4^{(2)} = 2 \quad (4.17)$$

konstruiert werden kann. Der Kantenzug, an dem diese Orthoschemkette zusammenhängt, besteht aus den Kanten  $h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6$  und wird erklärt durch

$$\begin{aligned} \tan^2 h_0 &= 1, \\ \tan^2 h_1 &= \tan^2 v_1^{(2)} = 5, \\ \tan^2 h_2 &= \tan^2 h_3 = \tan^2 h_4 = 2 \quad (= \tan^2 v_2^{(2)} = \tan^2 v_3^{(2)} = \tan^2 v_4^{(2)}), \\ \tan^2 h_5 &= \tan^2 h_6 = 3. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Im Fall eines Friesmusters der Ordnung  $n = 5$  stellen die vierte und die  $(n - 2)$ -te Zeile die beiden mittleren Zeilen dar, die von den Randzeilen mit Nullen und Einsen eingerahmt werden. In diesem einfachen Fall ist das Ergebnis besonders durchsichtig.

Der eben geschilderte Sachverhalt läßt sich nicht analog auf ein Friesmuster gerader Ordnung übertragen. Zunächst gilt aber, daß ein beliebiges Friesmuster gerader Ordnung wiederum mit einer Orthoschemkette wie oben beschrieben in Verbindung steht. Die Betrachtung des Friesmusters, in dem die Elemente als Zweizeigersymbole  $(r, s)$  geschrieben werden, zeigt dieses. Denn identifizieren wir

$$(0, 2m + 1) \quad (4.19)$$

mit der Zahl 1, dann haben wir das analoge Ergebnis wie im Fall der geraden Dimensionszahl (vgl. (4.9)). Die Umkehrung ist jedoch im allgemeinen nicht richtig, sondern nur für eine ganz bestimmte Klasse von Orthoschem-Ketten läßt sich ein zugehöriges Friesmuster finden. Ist also etwa

$$S^{(2m)}(v_1^{(2)}, \dots, v_{2m-1}^{(2)}) \quad (4.20)$$

das die Kette erzeugende Orthoschem, dann ist für die Richtigkeit der Umkehrung notwendig und hinreichend, daß das Zweizeigersymbol  $(0, 2m + 1)$ , was im wesentlichen die Hauptinvariante (vgl. [2]) unseres Orthoschems darstellt, gleich 1 ist. Im Friesmuster sehen wir aber sofort, daß  $(0, 2m + 1)$  durch entsprechende Operationen wie bei (4.6) und unter der Bedingung, daß die unimodulare Relation (2.7) erhalten bleibt, nicht nachträglich zu Eins gemacht werden kann, weil dadurch die zweite Randzeile, die aus Einsen besteht, verändert würde. Das würde aber die Grundeigenschaft unseres Friesmusters zerstören. Auf Grund der Beziehung (2.9) gelingt es,  $(0, 2m + 1)$  durch die Zweizeigersymbole  $(r, r + 3)$ , also im wesentlichen durch die Keilwinkel des erzeugenden Orthoschems, darzustellen. Die Forderung  $(0, 2m + 1) = 1$  bedeutet, daß zwischen den Keilwinkeln eine Bindung be-

stehen muß. Beispielsweise gehört zu dem Grundorthoschem

$$S^{(4)}(v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, v_3^{(2)}) \quad (4.21)$$

genau dann ein Friesmuster, wenn

$$(0, 5) = 1 \quad (4.22)$$

gilt, woraus

$$\cos^2 v_1^{(2)} + \cos^2 v_2^{(2)} + \cos^2 v_3^{(2)} = 1 \quad (4.23)$$

folgt. Das hat z. B. zur Folge, daß die Maßzahlen für die drei Keilwinkel mit den Maßzahlen für diejenigen Kanten (bzw. deren Komplemente) übereinstimmen, die für diese Keilwinkel die Scheitel bilden, in Formeln

$$\begin{aligned} v_1^{(2)} &= h_4, \\ v_2^{(2)} &= h_5, \\ v_3^{(2)} &= h_0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Das können wir auch aus dem periodischen Friesmuster sofort ablesen.

Wir erkennen folglich, daß auch hier wieder, wie oft bei geometrischen Fragen, ein wesentlicher Unterschied zwischen gerader und ungerader Dimension besteht, indem sich zu einem geraddimensionalen Orthoschem stets ein Friesmuster finden läßt, zu einem ungeraddimensionalen dagegen im allgemeinen kein Friesmuster angegeben werden kann.

#### LITERATUR

- [1] BÖHM, J.: Über Spezialfälle bei der Inhaltsmessung in Räumen konstanter Krümmung. *Wiss. Z. Univ. Jena, Math.-Nat. Reihe*, 5 (1955/56) 157–164.
- [2] BÖHM, J.: Simplexinhalte in Räumen konstanter Krümmung beliebiger Dimension. *J. Reine Angew. Math.* 202 (1959) 16–51.
- [3] BÖHM, J.: Zur Verallgemeinerung der Neperschen Regel in  $r$ -dimensionalen Riemannschen Räumen konstanter Krümmung. *Can. J. Math.* 19 (1967) 1129–1148.
- [4] COXETER, H. S. M.: On Schläfli's generalisation of Napier's Pentagramma Mirificum. *Bull. Calcutta Math. Soc.* 28 (1936) 125–144.
- [5] COXETER, H. S. M.: Frieze Patterns. *Acta Arithmetica* (Warschau 1970) (im Druck).
- [6] GAUSS, C. F.: Werke 3. Göttingen 1876, S. 481.
- [7] NAPIER, J.: *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Edinburg 1914, Buch 2, Kap. 4.
- [8] PREŠIĆ, S., und D. S. MITRINOVIC: Sur une équation fonctionnelle cyclique d'ordre supérieur. *Publ. Elektrotechnik-Fak. Univ. Belgrad, Ser. Math.-Phys.*, No. 70 (1962).
- [9] SCHLÄFLI, L.: *Gesammelte math. Abh. I*, Theorie der vielfachen Kontinuität; aus dem Jahre 1852. Birkhäuser, Basel 1950, S. 227 ff.

Manuskriptabgabe: 20. 10. 1970

VERFASSER:

JOHANNES BÖHM, Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena

