Zentren und Nuclei von n-Loops

HANS-HENNING BUCHSTEINER

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

Die Theorie der projektiven Ebenen hat die Untersuchung verschiedener Klassen von algebraischen Strukturen, unter anderem der Klasse von (binären) Quasigruppen und Loops sehr gefördert [5]. Der enge Zusammenhang von Quasigruppen, Nomogrammen und Geweben [1] regte dazu an, den Begriff der binären Quasigruppen zu verallgemeinern [6] und führte zu den von BELOUSOV und SANDIK [2] betrachteten n-Quasigruppen und n-Loops. Unter einer n-Loop $\big(S, (x_1, \ldots, x_n)\big)$ versteht man ein System aus einer Menge S und einer auf S erklärten n-ären algebraischen Operation $(x_1, \ldots, x_n)$ derart, daß in der Gleichung $(x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$ je n Elemente eindeutig das $(n + 1)$-te bestimmen und wenigstens ein Einselement e mit $(x, e, \ldots, e) = \cdots = (e, \ldots, e, x) = x$ für alle $x \in S$ vorhanden ist. Die vorliegende Arbeit beschäftigt dich damit, zu gewissen isotop invarianten Untergruppen einer Loop (S, xy), nämlich sem Zentrum

$$Z = \langle z \mid z \in S,\ zx = xz,\ (zx)y = z(xy),\ (xz)y = x(zy),\ (xy)z = x(yz),\ \forall\ x, y \in S\rangle,$$

dem Links-, Mittel- und Rechtsnucleus

$$L = \langle l \mid l \in S, (lx)\, y = l(xy), \forall\ x, y \in S\rangle,\quad M = \langle m \mid m \in S,\ (xm)\, y = x(my), \forall\ x, y \in S\rangle,$$

$$R = \langle r \mid r \in S,\ (xy)\, r = x(yr), \forall\ x, y \in S\rangle$$

analoge n-Untergruppen von n-Loops zu definieren. Man erhält zu jedem Einselement e einer n-Loop ein Zentrum $Z(e)$, einen i-Nucleus $N_i(e)$, $1 \leqq i \leqq n$, und einen Quernucleus $Q(e)$. Wir werden zeigen, daß sie ebenfalls isotop invariant sind und daß insbesondere die zu verschiedenen Einselementen in der gleichen n-Loop gehörigen n-Untergruppen gleicher Art isomorph sind. Die hier eingeführten Zentren von n-Loops sind nicht mit dem in der genannten Arbeit von BELOUSOV und SANDIK definierten Zentrum einer n-Quasigruppe zu verwechseln, das selbst für n-Loops leer sein kann und auch andernfalls nicht notwendig eine n-Unterquasigruppe darstellt.

1. Die Zentren einer n-Loop

Für unsere Überlegungen ist es zweckmäßig, von der obigen Definition des Zentrums Z einer binären Loop (S, xy) zu einer äquivalenten überzugehen, indem wir Z als maximale Untermenge von S definieren, deren Elemente der Gleichung

$$(z_1x)(z_2y) = (z_1z_2)(xy), \ \forall\ z_1, z_2 \in Z, \ \forall\ x, y \in S, \tag{1a}$$

genügen. (Statt der Gleichung (1a) hätte man ebensogut

$$(xz_1)(yz_2) = (xy)(z_1z_2), \ \forall\ z_1, z_2 \in Z, \ \forall\ x, y \in S, \tag{1b}$$

der Definition zugrunde legen können.) Dementsprechend erklären wir als

Definition. Unter einem *i-Zentrum* Z_i der n-Loop $\big(S, (x_1, \ldots, x_n)\big)$ werde eine Untermenge $Z_i \subseteqq S$ verstanden, die den folgenden Bedingungen genügt: A. Es sei

$$\begin{aligned}&\big((z_{11}, \ldots, z_{1,i-1}, x_1, z_{1,i+1}, \ldots, z_{1n}), \ldots, (z_{n1}, \ldots, z_{n,i-1}, x_n, z_{n,i+1}, \ldots, z_{nn})\big)\\ &= \big((z_{11}, \ldots, z_{n1}), \ldots, (z_{1,i-1}, \ldots, z_{n,i-1}), (x_1, \ldots, x_n), \ldots, (z_{1n}, \ldots, z_{nn})\big)\end{aligned} \qquad (1)_i$$

für alle $z_{jk} \in Z_i$ und alle $x_j \in S$;
B. wenigstens eines der Einselemente e von S gehöre zu Z_i;
C. für jedes $y \in S, y \notin Z_i$ genügt die Menge $N = Z_i \cup \langle y \rangle$ nicht der Bedingung $(1)_i$.

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden gewisse Operatoren eingeführt. Ist $C \subseteqq S$ eine nichtleere Untermenge von S, $C^{n-1} = \langle [z_1, \ldots, z_{n-1}] \mid z_i \in C \rangle$ das kartesische Produkt von $n-1$ Faktoren C, so definieren wir zu jedem Element $\zeta = [z_1, \ldots, z_{n-1}] \in C^{n-1}$ (diese Elemente sollen Operatoren heißen) und jedem Index $i = 1, \ldots, n$ eine Operatoranwendung $\zeta^{(i)}$ (eine umkehrbar eindeutige Abbildung von S auf sich, da S Loop ist) durch die Gleichung

$$x\zeta^{(i)} = (z_1, \ldots, z_{i-1}, x, z_i, \ldots, z_{n-1}), \ \forall\ x \in S. \tag{2}$$

Falls es sich bei C um ein n-Untergruppoid von S handelt, übertragen wir die n-äre Verknüpfung von C auf C^{n-1}: Zu je n beliebigen Elementen $\zeta_j = [z_{j1}, \ldots, z_{j,n-1}] \in C^{n-1}$, $j = 1, \ldots, n$, legen wir

$$\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = [z_1, \ldots, z_{n-1}] \in C^{n-1} \text{ mit } z_i = (z_{1i}, \ldots, z_{ni}), \ i = 1, \ldots, n-1, \tag{3}$$

als n-äres Produkt fest. Für die i-te Operatoranwendung des Operators ζ werden wir entsprechend Gleichung (3) auch $\zeta^{(i)} = (\zeta_1^{(i)}, \ldots, \zeta_n^{(i)})$ schreiben. Im übrigen muß bei (3) nicht gefordert werden, daß C ein n-Untergruppoid von S ist; nur gilt für eine beliebige nichtleere Untermenge C von S nicht mehr notwendig $\zeta \in C^{n-1}$, sondern lediglich $\zeta \in S^{n-1}$. Ist ferner $\zeta = [z_1, \ldots, z_{n-1}] \in C^{n-1}$ und $s = \begin{pmatrix} 1 \ldots n-1 \\ 1' \ldots (n-1)' \end{pmatrix}$ eine Permutation der natürlichen Zahlen $1, \ldots, n-1$, so werde durch

$$\zeta^s = [z_{1'}, \ldots, z_{(n-1)'}] \in C^{n-1}$$

eine Anwendung von s auf ζ erklärt. Entsprechend soll bei $\zeta^{(i)}$ verfahren werden; trivialerweise ist dabei $\zeta^{(i)s} = \zeta^{(s)i}$. Nunmehr lassen sich die Gleichungen $(1)_i$ einfach als

$$(x_1\,\zeta_1^{(i)}, \ldots, x_n\,\zeta_n^{(i)}) = (x_1, \ldots, x_n)\,(\zeta_1^{(i)}, \ldots, \zeta_n^{(i)}) \qquad (\bar{1})_i$$

schreiben. Eine Rolle werden später die Kommutativgesetze

$$x\,\zeta^{(i)} = x\,\zeta^{(j)},\ \forall\, x \in S,\ \forall\, \zeta \in C^{n-1},\ 1 \leqq i < j \leqq n, \tag{4$_{ij}$}$$

und allgemeiner die Kommutativgesetze

$$x\zeta^{(i)} = x\,\zeta^{(j)h},\ \forall\, x \in S,\ \forall\, \zeta \in C^{n-1},\ h \in \mathfrak{S}_{n-1},\ 1 \leqq i \leqq j \leqq n, \tag{5$_{ij,h}$}$$

spielen, wobei $\mathfrak{S}_{n-1}$ die symmetrische Gruppe der Zahlen $1, \ldots, n-1$ bedeuten möge.

Für die Untersuchung der i-Zentren einer n-Loop auf ihre algebraische Beschaffenheit sind einige Vorbetrachtungen nützlich. Wir setzen in $(1)_i$ sämtliche Elemente außer $z_{1k_1}, \ldots, z_{j-1,k_{j-1}}, x_j, z_{j+1,k_{j+1}}, \ldots, z_{nk_n}$ gleich e, wobei e eines der Einselemente von S sei, die nach Definition zu Z_i gehören. Die Indizes $k_1, \ldots, k_{j-1}, k_{j+1}, \ldots, k_n$, unter denen die natürliche Zahl i sicher nicht vorkommt, seien paarweise verschieden, so daß $q = \begin{pmatrix} 1 \ldots j-1\; j\; j+1 \ldots n \\ k_1 \ldots k_{j-1}\; i\; k_{j+1} \ldots k_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$ eine Permutation der natürlichen Zahlen $1, \ldots, n$ wird. Offenbar kann man für q durch passende Wahl der Indizes k_r jede Permutation aus $\mathfrak{S}_n$ erhalten, die j in i überführt. Unter Benutzung der inversen Permutation $q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \ldots i-1\; i\; i+1 \ldots n \\ q_1 \ldots q_{i-1}\; j\; q_{i+1} \ldots q_n \end{pmatrix}$ geht $(1)_i$ durch die genannte Spezialisierung der Elemente über in

$$(z_{1k_1}, \ldots, z_{j-1,k_{j-1}}, x_j, z_{j+1,k_{j+1}}, \ldots, z_{nk_n}) = (z_{q_1 1}, \ldots, z_{q_{i-1},i-1}, x_j, \ldots, z_{q_n n}).$$

Da hierin die ersten Indizes der Größen z_{rs} zu deren Unterscheidung schon genügen, erhält man mit $q^{-1} = h \cdot (ij)$, $h = \begin{pmatrix} 1 \cdots i-1\; i\; i+1 \cdots n \\ h_1 \cdots h_{i-1}\; i\; h_{i+1} \cdots h_n \end{pmatrix}$, (ij) Zweierzyklus oder (für $i = j$) identische Permutation, statt dessen die Gleichung

$$(z_1, \ldots, z_{j-1}, x_j, z_{j+1}, \ldots, z_n) = (z_{h_1}, \ldots, z_{h_{i-1}}, x_j, z_{h_{i+1}}, \ldots, z_{h_n}),$$

die sich mittels $\zeta = [z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n]$ kürzer als

$$x_j\zeta^{(i)} = x_j\zeta^{(j)h} \tag{6}$$

formulieren läßt. Schreibt man die Gleichung (6) einmal für den Index j auf der linken Seite und mit der identischen Permutation $h = h_0$ hin, das andere Mal für den Index k auf der linken Seite und eine beliebige Permutation h, so folgt durch Vergleich:

In jedem i-Zentrum Z_i gelten sämtliche Kommutativgesetze $(5)_{jk,h}$ und insbesondere sämtliche Kommutativgesetze $(4)_{jk}$.

Des weiteren setzen wir in $(1)_i$ sämtliche Elemente z_{rs} gleich e, deren erster Index von j verschieden ist; mit anderen Worten wird in $(1)_i$ $\zeta_1 = \cdots = \zeta_{j-1} = \zeta_{+1} = \cdots = \zeta_n = [e, \ldots, e] = \varepsilon$. Man bekommt

$$(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j\zeta_j{}^{(i)}, x_{j+1}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)\zeta_j{}^{(i)} \tag{7}$$

und durch wiederholte Anwendung von (7)

$$(x_1\zeta_1{}^{(i)}, \ldots, x_n\zeta_n{}^{(i)}) = (x_1, \ldots, x_n)\,\zeta_1{}^{(i)} \cdots \zeta_n{}^{(i)}. \tag{8}$$

Man sieht, daß die Reihenfolge, in der man von (7) nach (8) die Operatoren nach außen zieht, beliebig ist. Daher gilt in Verallgemeinerung von (8)

$$(x_1\zeta_1{}^{(i)}, \ldots, x_n\zeta_n{}^{(i)}) = (x_1, \ldots, x_n)\,\zeta_{1'}^{(i)} \cdots \zeta_{n'}^{(i)}, \tag{9}$$

wobei $\begin{pmatrix} 1 \dots n \\ 1' \dots n' \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$ eine beliebige Permutation bedeutet. Nun behaupten wir den folgenden

Satz. *Jedes i-Zentrum Z_i, $1 \leqq i \leqq n$, einer n-Loop S ist auch j-Zentrum von S für $j = 1, \dots, n$ und stellt eine n-Untergruppe von S dar.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß jedes i-Zentrum Z_i eine n-Unterloop von S ist. Wenn wir nachweisen können, daß $(1)_i$ auch gilt, sofern man beliebige der Größen z_{jk} durch n-äre Produkte $(z_{jk}^{(1)}, \dots, z_{jk}^{(n)})$ von Elementen aus Z_i ersetzt, so folgt mit Rücksicht auf die Maximalitätsforderung C, daß Z_i bezüglich der n-ären Operation abgeschlossen ist. Wegen $e \in Z_i$ und $z = (z, e, \dots, e)$ genügt es, sämtliche Größen z_{jk} auf einmal durch n-äre Produkte zu ersetzen. Also ist für beliebige $z_{jk}^{(r)} \in Z_i$ die Gültigkeit von

$$\begin{aligned}&\Big(\big((z_{11}^{(1)}, \dots, z_{11}^{(r)}), \dots, x_1, \dots, (z_{1,n-1}^{(1)}, \dots, z_{1,n-1}^{(n)})\big), \dots, \big((z_{n1}^{(1)}, \dots, z_{n1}^{(n)}), \dots, x_n, \dots,\\ &(z_{n,n-1}^{(1)}, \dots, z_{n,n-1}^{(n)})\big)\Big) = \Big(\big((z_{11}^{(1)}, \dots, z_{11}^{(n)}), \dots, (z_{n1}^{(1)}, \dots, z_{n1}^{(r)})\big), \dots, (x_1, \dots, x_n), \dots,\\ &\big((z_{1,n-1}^{(1)}, \dots, z_{1,n-1}^{(n)}), \dots, (z_{n,n-1}^{(1)}, \dots, z_{n,n-1}^{(n)})\big)\Big)\end{aligned} \tag{10}$$

aus $(1)_i$ herzuleiten. In (10) haben wir die zweiten Indizes k von $z_{jk}^{(r)}$ gegenüber denen in $(1)_i$ etwas anders, nämlich durchgehend von 1 bis $n-1$ gewählt; die Größen $x_1, \dots, x_n, (x_1, \dots, x_n)$ sind jeweils die i-ten Argumente). Die Gleichung (10) läßt sich bei Benutzung der Operatoren $\zeta_{jk} = [z_{jk}^{(1)}, \dots, z_{jk}^{(i-1)}, z_{jk}^{(i+1)}, \dots, z_{jk}^{(n)}]$ auch in der Form

$$\begin{aligned}&\big((z_{11}^{(i)}\zeta_{11}^{(i)}, \dots, x_1, \dots, z_{1,n-1}^{(i)}\zeta_{1,n-1}^{(i)}), \dots, (z_{n1}^{(i)}\zeta_{n1}^{(i)}, \dots, x_n, \dots, z_{n,n-1}^{(i)}\zeta_{n,n-1}^{(i)})\big)\\ &= \big((z_{11}^{(i)}\zeta_{11}^{(i)}, \dots, z_{n1}^{(i)}\zeta_{n1}^{(i)}), \dots, (x_1, \dots, x_n), \dots, (z_{1,n-1}^{(i)}\zeta_{1,n-1}^{(i)}, \dots, z_{n,n-1}^{(i)}\zeta_{n,n-1}^{(i)})\big)\end{aligned} \tag{10'}$$

schreiben. Man formt nun die linke Seite L von (10') mit Hilfe von (9) und $(1)_i$ folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}L &= \big((z_{11}^{(i)}, \dots, x_1, \dots, z_{1,n-1}^{(i)})\,\zeta_{11}^{(i)} \cdots \zeta_{1,n-1}^{(i)}, \dots, (z_{n1}^{(i)}, \dots, x_n, \dots, z_{n,n-1}^{(i)})\,\zeta_{n1}^{(i)} \cdots \zeta_{n,n-1}^{(i)}\big)\\ &= \big((z_{11}^{(i)}, \dots, x_1, \dots, z_{1,n-1}^{(i)}), \dots, (z_{n1}^{(i)}, \dots, x_n, \dots, z_{n,n-1}^{(i)})\big)\,\zeta_{11}^{(i)} \cdots \zeta_{n,n-1}^{(i)}\\ &= \big((z_{11}^{(i)}, \dots, z_{n1}^{(i)}), \dots, (x_1, \dots, x_n), \dots, (z_{1,n-1}^{(i)}, \dots, z_{n,n-1}^{(i)})\big)\,\zeta_{11}^{(i)} \cdots \zeta_{n,n-1}^{(i)}\\ &= \big((z_{11}^{(i)}, \dots, z_{n1}^{(i)})\,\zeta_{11}^{(i)} \cdots \zeta_{n1}^{(i)}, \dots, (x_1, \dots, x_n), \dots, (z_{1,n-1}^{(i)}, \dots, z_{n,n-1}^{(i)})\,\zeta_{1,n-1}^{(i)} \cdots \zeta_{n,n-1}^{(i)}\big)\\ &= \big((z_{11}^{(i)}\,\zeta_{11}^{(i)}, \dots, z_{n1}^{(i)}\,\zeta_{n1}^{(i)}), \dots, (x_1, \dots, x_n), \dots, (z_{1,n-1}^{(i)}\,\zeta_{1,n-1}^{(1)}, \dots, z_{n,n-1}^{(i)}\,\zeta_{n,n-1}^{(i)})\big).\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck stellt aber die rechte Seite der Gleichung (10') dar, und wir haben (10') damit bewiesen. Nach Definition besitzt Z_i ein Einselement e; also muß für die n-Unterloop-Eigenschaft von Z_i nur noch die Lösbarkeit der Gleichungen

$$u_j\zeta^{(j)} = (z_1, \dots, z_{j-1}, u_j, z_{j+1}, \dots, z_n) = z, \qquad j = 1, \dots, n, \tag{11$_j$}$$

nach u_j für beliebige $z_1, \dots, z_n, z \in Z_i$ gezeigt werden. Auf Grund der in Z_i gültigen Gleichungen $(4)_{jk}$ sind die (in S eindeutig bestimmten) Lösungen u_j paarweise gleich: $u_1 = \dots = u_n \doteq u$. Wie bei den n-ären Produkten zeigen wir nun, daß die Elemente u wegen C) von vornherein zu Z_i gehören müssen. Hierzu wählen wir Elemente $u_{11}, \dots, u_{n,n-1} \in S$, die Lösungen der Gleichungen

$$u_{jk}\zeta_{jk}^{(i)} = z_{jk}, \qquad z_{jk} \in Z_i, \; \zeta_{jk} \in Z_i^{n-1}, \tag{12}$$

sein mögen. Unter den u_{jk} können sich auch willkürlich gewählte Elemente $z_{jk} \in Z_i$ befinden; man braucht dann nur für die zugehörigen Operatoren ζ_{jk} jeweils den identischen Operator $\varepsilon = [e, \ldots, e]$ zu wählen. Offenbar liefern die Operatoren ζ_{jk}, da sie mit Elementen aus einer n-Loop S gebildet werden, umkehrbar eindeutige Abbildungen $\zeta_{jk}^{(i)}$. Um die Gültigkeit von

$$\begin{aligned}&\big((u_{11}, \ldots, x_1, \ldots, u_{1,n-1}), \ldots, (u_{n1}, \ldots, x_n, \ldots, u_{n,n-1})\big)\\ &= \big((u_{11}, \ldots, u_{n1}), \ldots, (x_1, \ldots, x_n), \ldots, (u_{1,n-1}, \ldots, u_{n,n-1})\big)\end{aligned} \tag{13}$$

nachzuweisen, wendet man auf die linke Seite L der Relation (13) den Operator $\zeta = \zeta_{11} \cdots \zeta_{n,n-1}$ an, und zwar bilde man den Ausdruck $L\zeta^{(i)}$. Diesen forme man mittels (9) und $(1)_i$ um:

$$\begin{aligned}L\zeta^{(i)} &= \big((u_{11}, \ldots, x_1, \ldots, u_{1,n-1}), \ldots, (u_{n1}, \ldots, x_n, \ldots, u_{n,n-1})\big)\, \zeta_{11}^{(i)} \cdots \zeta_{n,n-1}^{(i)}\\ &= \big((u_{11}, \ldots, x_1, \ldots, u_{1,n-1})\, \zeta_{11}^{(i)} \cdots \zeta_{1,n-1}^{(i)}, \ldots, (u_{n1}, \ldots, x_n, \ldots, u_{n,n-1})\, \zeta_{n1}^{(i)} \cdots \zeta_{n,n-1}^{(i)}\big)\\ &= \big((z_{11}, \ldots, x_1, \ldots, z_{1,n-1}), \ldots, (z_{n1}, \ldots, x_n, \ldots, z_{n,n-1})\big)\\ &= \big((z_{11}, \ldots, z_{n1}), \ldots, (x_1, \ldots, x_n), \ldots, (z_{1,n-1}, \ldots, z_{n,n-1})\big)\\ &= \big((u_{11}, \ldots, u_{n1}), \ldots, (x_1, \ldots, x_n), \ldots, (u_{1,n-1}, \ldots, u_{n,n-1})\big)\, \zeta_{11}^{(i)} \cdots \zeta_{n,n-1}^{(i)}\\ &= R\zeta^{(i)},\end{aligned}$$

wobei R die rechte Seite von (13) bedeutet. Wegen der Eineindeutigkeit von $\zeta^{(i)}$ folgt $L = R$, also (13). Das heißt: Z_i ist n-Unterloop von S.

Als nächstes zeigen wir: Jedes i-Zentrum Z_i von S ist auch j-Zentrum für jedes andere j, $1 \leqq j \leqq n$. Da Z_i bereits als n-Unterloop von S nachgewiesen ist, gehört der auf der rechten Seite von $(\bar{1})_i$ verwendete Operator $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ ebenfalls zu Z_i^{n-1}, so daß man auf beiden Seiten von $(\bar{1})_i$ die Gleichung $(4)_{ij}$ anwenden kann. Daher erfüllt Z_i die Bedingungen A und trivialerweise B in der Definition des j-Zentrums. Angenommen, die noch ausstehende j-Zentrumsbedingung C wäre in Z_i nicht erfüllt. Dann bette man Z_i in ein j-Zentrum M von S ein, das eine echte, hinsichtlich der Gültigkeit von $(\bar{1})_j$ maximale Obermenge von Z_i und ebenfalls n-Unterloop von S wäre. Daraus folgt diesmal die Gültigkeit von $(\bar{1})_i$ in M, was einen Widerspruch zu der Voraussetzung bedeuten würde, daß Z_i die i-Zentrumsbedingung C erfüllen möge. In Z_i kann folglich die j-Zentrumsbedingung C nicht verletzt sein, d. h., Z_i ist j-Zentrum.

Der Beweis unseres Satzes ist vollständig, wenn wir noch zeigen, daß (zum Beispiel) jedes n-Zentrum Z_n von S sogar eine n-Untergruppe ist. Zum Nachweis der Assoziativität von Z_n gehen wir von $(1)_n$ aus und lassen darin von den Größen z_{ij} einmal nur $z_{11}, \ldots, z_{1,n-1}$ von e verschieden, das andere Mal nur $z_{21}, \ldots, z_{2,n-1}$. So ergeben sich — bei passendem Wechsel der Indizes — die Gleichungen

$$\begin{aligned}\big((z_2, \ldots, z_n, x_1), x_2, \ldots, x_n\big) &= \big(z_2, \ldots, z_n, (x_1, \ldots, x_n)\big),\\ \big(x_1, (z_2, \ldots, z_n, x_2), \ldots, x_n\big) &= \big(z_2, \ldots, z_n, (x_1, \ldots, x_n)\big).\end{aligned}$$

Die beiden linken Seiten dieser Gleichungen ergeben, wenn man die erstere noch mittels $(4)_{1n}$ umformt, durch Vergleich

$$\big((x_1, z_2, \ldots, z_n), x_2, \ldots, x_n\big) = \big(x_1, (z_2, \ldots, z_n, x_2), \ldots, x_n\big).$$

Ein Spezialfall hiervon für $x_1 = z_1, x_2 = z_{n+1}, \ldots, x_n = z_{2n-1} \in Z_n$ ist

$$\big((z_1, \ldots, z_n), z_{n+1}, \ldots, z_{2n-1}\big) = \big(z_1, (z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}), \ldots, z_{2n-1}\big), \ \forall\, z_1, \ldots, z_{2n-1} \in Z_n. \tag{14}$$

Aus (14) folgt nach einem Resultat von BELOUSOV, daß in Z_n sämtliche Assoziativitätsbedingungen für n-Gruppen (vgl. HOSSZÚ [4]) gelten, womit wir gezeigt haben, daß jedes n-Zentrum von S, also auch jedes i-Zentrum, $1 \leqq i \leqq n$, eine n-Untergruppe von S ist. Auf Grund unseres Satzes sprechen wir von nun an statt von i-Zentren einfach von *Zentren* einer n-Loop S, von denen es allerdings bis jetzt zu jedem Einselement e von S mehrere und überdies zu verschiedenen Einselementen e, f von S verschiedene geben kann. Daß die erste Möglichkeit nicht eintritt, zeigen wir im folgenden

Lemma. *Zu jedem Einselement e einer n-Loop S gibt es genau ein Zentrum $Z(e)$, dem e angehört.*

Beweis. Ist die n-Loop S und eines ihrer Einselemente e gegeben, so erfüllt die Menge $Z_0 = \langle e \rangle$ sicher die Bedingungen A und B der Zentrumsdefinition. Anschließend konstruiert man ein e enthaltendes Zentrum Z von S als maximale Obermenge von Z_0, die A und B, d. h. aber, auch C erfüllt.

Für den zweiten Teil des Beweises nehmen wir die Existenz zweier verschiedener Zentren Z und $\bar{Z}$ mit $e \in Z \cap \bar{Z}$ an. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir zusätzlich $\bar{Z} \nsubseteq Z$ voraussetzen. Folglich existiert ein Element $\bar{z} \in \bar{Z}, \bar{z} \notin Z$. Wir zeigen, daß — entgegen der Bedingung C in der Definition von Z — die Menge $Z_1 = Z \cup \langle \bar{z} \rangle$ ebenfalls die Bedingung A erfüllt. Hierzu genügt es, die Gültigkeit der Gleichungen (7) nachzuweisen. Wir beschränken uns auf eine von ihnen,

$$(x_1 \bar{\zeta}^{(n)}, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) \bar{\zeta}^{(n)}, \tag{15}$$

weil bei den übrigen alles analog verläuft. Der Operator $\bar{\zeta}$ in (15) ist mit Elementen aus Z_1 gebildet. Wir dürfen annehmen, daß in $\bar{\zeta}$ das Element $\bar{z}$, aber nicht nur dieses vorkommt (weil andernfalls nichts zu beweisen ist), ferner, daß $\bar{z}$ in $\bar{\zeta}$ vor den Elementen aus Z steht. Die linke Seite von (15) lautet dann

$$L = \big((\bar{z}, \ldots, \bar{z}, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}, x_1), x_2, \ldots, x_n\big),$$
$$z_{i+1}, \ldots, z_{n-1} \in Z.$$

Unter Verwendung des Operators $\zeta_0 = [e, \ldots, e, \bar{z}] \in \bar{Z}^{n-1}$ folgt, weil $\bar{Z}$ Zentrum ist,

$$\begin{aligned} L &= \big((e, \ldots, e, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}, x_1)\, \zeta_0^{1} \cdots \zeta_0^{(1)}, x_2, \ldots, x_n\big) \\ &= \big((e, \ldots, e, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}, x_1), x_2, \ldots, x_n\big)\, \zeta_0^{(1)} \cdots \zeta_0^{(1)}. \end{aligned}$$

Mit dem Operator $\zeta_1 = [e, \ldots, e, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}] \in Z^{n-1}$ lautet der letzte Ausdruck

$$L = (x_1 \zeta_1^{(n)}, \ldots, x_n)\, \zeta_0^{(1)} \cdots \zeta_0^{(1)},$$

und es ergibt sich, weil Z Zentrum ist,

$$\begin{aligned} L &= (x_1, \ldots, x_n)\, \zeta_1^{(n)}\, \zeta_0^{(1)} \cdots \zeta_0^{(1)} \\ &= \big(e, \ldots, e, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}, (x_1, \ldots, x_n)\big)\, \zeta_0^{(1)} \cdots \zeta_0^{(1)} \\ &= \big(\bar{z}, \ldots, \bar{z}, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}, (x_1, \ldots, x_n)\big) = R, \end{aligned}$$

wobei R die rechte Seite von (15) ist. Man sieht, daß sich auf die gleiche Weise sämtliche Gleichungen (7) herleiten lassen. Die Menge $Z_1 = Z \cup \langle \bar{z} \rangle$ genügt damit den Bedingungen A und B im Widerspruch zur Definition von Z. Folglich sind die Aussagen $\bar{Z} \nsubseteq Z$ und $Z \nsubseteq \bar{Z}$ falsch, wir erhalten $Z = \bar{Z}$.

Zwei verschiedene Einselemente brauchen dagegen in der Tat nicht zum gleichen Zentrum einer n-Loop zu gehören. Um dies zu zeigen, geben wir zunächst eine kommutative 2-Loop (S, xy) mit dem Einselement e und einem Element f an, das der Gleichung

$$f(fx) = x, \forall\, x \in S,$$

also auch den Gleichungen

$$(fx)f = (xf)f = (ff)x, \forall\, x \in S, \tag{16}$$

genügt:

$$\begin{array}{c|cccccccc} \cdot & e & f & u & v & w & x & y & z \\ \hline e & e & f & u & v & w & x & y & z \\ f & f & e & v & u & x & w & z & y \\ u & u & v & w & y & z & e & x & f \\ v & v & u & y & w & e & z & f & x \\ w & w & x & z & e & y & f & u & v \\ x & x & w & e & z & f & y & v & u \\ y & y & z & x & f & u & v & e & w \\ z & z & y & f & x & v & u & w & e \end{array} \tag{17}$$

Wir benutzen die Multiplikation (17), um die 3-Loop $(S, (x_1, x_2, x_3))$ mit $(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2)x_3$ zu konstruieren, die nach (16) sicher die beiden Einselemente e und f besitzt. Die Elemente e und f gehören aber nicht zu ein und demselben Zentrum, denn es ist einerseits

$$((u, e, f), w, y) = ((uf)w)y = y$$

und andererseits

$$((u, w, y), e, f) = ((uw)y)f = x,$$

während doch stets und insbesondere für $x_1 = u, x_2 = w, x_3 = y, z_1 = e, z_2 = f$

$$((x_1, z_1, z_2), x_2, x_3) = ((x_1, x_2, x_3), z_1, z_2)$$

gelten müßte, sofern man z_1, z_2 aus einem Zentrum $Z \subseteqq S$ wählte, das e und f enthielte.

2. Die Nuclei einer n-Loop

Nachdem wir das zum Einselement e einer n-Loop S gehörige Zentrum $Z(e)$ von S definiert haben, lassen sich auch Verallgemeinerungen zu den Nuclei einer 2-Loop finden. Im folgenden sei stets die n-Loop $(S, (x_1, \ldots, x_n))$ mit einem ihrer Einselemente e zugrunde gelegt.

Definition. a) Ist i eine feste natürliche Zahl, $1 \leqq i \leqq n$, so sei unter einem (zu e gehörigen) *i-Nucleus* $N_i(e)$ von S eine Untermenge von S verstanden, die den folgenden Bedingungen genügt:

A_1. Für alle $\zeta = [z_1, \ldots, z_{n-1}] \in N_i(e)^{n-1}$ und alle $x_1, \ldots, x_n \in S$ gilt

$$(x_1\zeta^{(i)}, x_2, \ldots, x_n) = \cdots = (x_1, \ldots, x_{i-1}\zeta^{(i)}, x_i, \ldots, x_n)$$
$$= (x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}\zeta^{(i)}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n\zeta^{(i)}) = (x_1, \ldots, x_n)\zeta^{(i)};$$

B_1. $e \in N_i(e)$;

C_1. falls $y \notin N_i(e)$ ist, genügt $N_i(e) \cup \langle y \rangle$ nicht der Bedingung A_1.

b) Als einen zu e gehörigen *Quernucleus* $Q(e)$ bezeichnen wir eine Untermenge von S mit

A_2. $(x_1\zeta^{(1)}, x_2, \ldots, x_n) = \cdots = (x_1, \ldots, x_i\zeta^{(i)}, \ldots, x_n) = \cdots = (x_1 \ldots, x_n\zeta^{(n)})$

für alle $\zeta = [z_1, \ldots, z_{n-1}] \in Q(e)^{n-1}$ und alle $x_1, \ldots, x_n \in S$;

B_2. $e \in Q(e)$;

C_2. falls $y \notin Q(e)$ ist, genügt $Q(e) \cup \langle y \rangle$ nicht der Bedingung A_2.

Aus den Gleichungen A_1 ergibt sich $x(yz) = (xy)z$ als definierende Gleichung des Rechtsnucleus für $n = 2$ und $i = 1$, ferner $(zx)y = z(xy)$ als definierende Gleichung des Linksnucleus für $n = 2$ und $i = 2$; schließlich stellt A_2 für $n = 2$ die definierende Gleichung $(xz)y = x(zy)$ des Mittelnucleus einer 2-Loop S dar, wobei jeweils das Element z dem betreffenden Nucleus angehören muß. Unsere obige Definition verallgemeinert also in der Tat die genannten Begriffe. Wie schon angekündigt, lassen sich auch ganz analoge Eigenschaften beweisen, was nun geschehen soll. Dabei schließen wir den Fall $n = 2$ ausdrücklich aus, um uns Sonderbetrachtungen zu ersparen.

Satz. *Jeder i-Nucleus* $N_i(e)$, $i = 1, \ldots, n$, *und jeder Quernucleus* $Q(e)$ *von* S *stellt bezüglich der n-ären Operation* $(x_1, \ldots, x_n)$ *eine n-Untergruppe von* S *dar.*

Beweis. Wir verfahren wie beim entsprechenden Beweis für das Zentrum $Z(e)$ und haben also nur zu zeigen: 1. Die Gleichungen A_1 bzw. A_2 gelten auch für n-äre Produkte $(z_1, \ldots, z_n)$ von Elementen aus $N_i(e)$ bzw. $Q(e)$; 2. sie gelten auch für n-äre Produkte $(t_1, \ldots, t_n)$, die aus den Lösungen gewisser Gleichungen $t_j\zeta_j^{(k_j)} = z_j$, $j = 1, \ldots, n$, über $N_i(e)$ bzw. $Q(e)$ gebildet sind; 3. die n-äre Operation von S ist auf $N_i(e)$ bzw. $Q(e)$ assoziativ.

I. Zunächst betrachten wir $N_i(e)$ für ein gewisses festes i, $1 \leqq i \leqq n$. Die Gleichungen A_1 in der Definition besagen, daß man einen Operator $\zeta^{(i)}$ aus jedem Argument eines n-ären Produktes mit Ausnahme des i-ten Arguments ausklammern kann. Hieraus folgt für $n > 2$ und $i \neq 1$, $i \neq 2$

$$\begin{aligned} T_0 &= (x_1\zeta_1^{(i)}, x_2\zeta_2^{(i)}, x_3, \ldots, x_n) \\ &= (x_1\zeta_1^{(i)}, x_2, \ldots, x_n)\zeta_2^{(i)} = (x_1, \ldots, x_n)\zeta_1^{(i)}\zeta_2^{(i)} \end{aligned}$$

einerseits und

$$T_0 = (x_1, x_2\zeta_2^{(i)}, \ldots, x_n)\zeta_1^{(i)} = (x_1, \ldots, x_n)\zeta_2^{(i)}\zeta_1^{(i)}$$

andererseits, also für $x_1 = x$, $x_2 = \cdots = x_n = e$

$$x\zeta_1^{(i)}\zeta_2^{(i)} = x\zeta_2^{(i)}\zeta_1^{(i)}. \tag{1}$$

Ist aber $i = 1$ oder $i = 2$, so wähle man zur Herleitung von (1) zwei andere Argumente $1', 2'$ zwischen 1 und n mit $i \neq 1'$, $i \neq 2'$. Mittels Gleichung (1) läßt sich der Ausdruck $T_1 = (z_1, \ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1}, \ldots, z_n) = x\zeta^{(i)}$ unter Verwendung der Operatoren $\zeta_j = [z_j, e, \ldots, e]$ folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} T_1 = x\zeta^{(i)} &= (e, \ldots, e, x, e, \ldots, e)\,\zeta_1^{(i)} \cdots \zeta_{i-1}^{(i)}\zeta_{i+1}^{(i)} \cdots \zeta_n^{(i)} = x\zeta_{\bar{1}}^{(i)} \cdots \zeta_{\bar{n}}^{(i)} \\ &= (z_{\bar{1}}, \ldots, z_{\overline{i-1}}, x, z_{\overline{i+1}}, \ldots, z_{\bar{n}}) = x\zeta^{(i)s}; \end{aligned}$$

wir erhalten

$$x\zeta^{(i)} = x\zeta^{(i)s}, \tag{2}$$

wobei s eine beliebige Permutation der Zahlen $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ ist. Wählt man auch $x = z_i \in N_i(e)$, so folgt aus (1) noch

$$z_i\zeta^{(i)} = e\zeta_i^{(i)}\zeta_1^{(i)} \cdots \zeta_n^{(i)} = e\zeta_{1'}^{(i)}, \cdots \zeta_{n'}^{(i)},$$

d. h.

$$(z_1, \ldots, z_n) = (z_{1'}, \ldots, z_{n'}) \tag{3}$$

mit einer beliebigen Permutation $t = \begin{pmatrix} 1 \cdots n \\ 1' \cdots n' \end{pmatrix}$ der natürlichen Zahlen $1, \ldots, n$. (Eine n-Loop S, in der für beliebige $z_1, \ldots, z_n \in S$ und alle $t \in \mathfrak{S}_n$ die Gleichung (3) gilt, soll *total kommutativ* heißen.) Schließlich liefert der Vergleich des j-ten und des letzten Terms in A_1, sofern alle beteiligten Elemente außer $x_j = x$ aus $N_i(e)$ genommen werden,

$$x\zeta_1^{(i)}\zeta_2^{(j)} = x\zeta_2^{(j)}\zeta_1^{(i)}, \quad j \neq i. \tag{4}$$

Nun betrachten wir für ein beliebiges $j \neq i$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} T_2 &= \big(x_1, \ldots, \big((z_{11}, \ldots, z_{1n}), \ldots, x_j, \ldots, (z_{n1}, \ldots, z_{nn})\big), \ldots, x_n\big) \\ &\doteq \big(x_1, \ldots, x_{j-1}, (z_{1i}\zeta_1^{(i)}, \ldots, z_{i-1,i}\zeta_{i-1}^{(i)}, x_j, \ldots, z_{ni}\zeta_n^{(i)}), \ldots, x_n\big) \end{aligned} \tag{5}$$

und erhalten, indem wir die Gleichungen A_1 anwenden, zunächst

$$\begin{aligned} T_2 &= (x_1, \ldots, x_{j-1}, (z_{1i}, \ldots, x_j, \ldots, z_{ni})\zeta_1^{(i)} \cdots \zeta_{i-1}^{(i)}\zeta_{i+1}^{(i)} \cdots \zeta_n^{(i)}, \ldots, x_n) \\ &\doteq (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j\bar{\zeta}^{(i)}\zeta_1^{(i)} \cdots \zeta_n^{(i)}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

und dann nach A_1 und (1)

$$T_2 = (x_1, \ldots, x_n)\zeta_n^{(i)} \cdots \zeta_1^{(i)}\bar{\zeta}^{(i)} = (x_1, \ldots, x_n)\,\bar{\zeta}^{(i)}\zeta_1^{(i)} \cdots \zeta_n^{(i)}.$$

Hiervon folgt durch rückläufige Anwendung der zuvor vollzogenen Umformungen

$$T_2 = \big((z_{11}, \ldots, z_{1n}), \ldots, (z_{i-1,1}, \ldots, z_{i-1,n}), (x_1, \ldots, x_n), \ldots, (z_{n1}, \ldots, z_{nn})\big). \tag{6}$$

Der Vergleich von (5) und (6) liefert, da j ein beliebiger von i verschiedener Index zwischen 1 und n sein durfte, die verlangte Gültigkeit der Gleichungen A_1 für n-äre Produkte $(z_{k1}, \ldots, z_{kn})$ von Elementen $z_{kr} \in N_i(e)$.

Anschließend benötigen wir die Gültigkeit der folgenden Aussage: Die (in S eindeutige) Lösung t einer Gleichung

$$t\zeta^{(i)} = z_j, \ j \neq i, \ \zeta = [z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n] \in N_i(e)^{n-1}, z_j \in N_i(e), \tag{7}$$

ist auch Lösung der Gleichung

$$t\zeta^{(i)} = z_j. \tag{8}$$

Sei nämlich t Lösung von (7), so bilde man mit dem Element $\bar{t} = t\,\zeta^{(i)}$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} T_3 &= \bar{t}\zeta^{(j)} = t\zeta^{(i)}\zeta^{(j)} = t\zeta^{(j)}\zeta^{(i)} = z_j\zeta^{(i)} \\ &= (z_1, \ldots, z_i, z_j, z_{i+1}, \ldots, z_n), \end{aligned}$$

wobei (4) verwendet worden ist. Aus (3) ergibt sich nun

$$\bar{t}\,\zeta^{(j)} = (z_1, \ldots, z_{j-1}, \bar{t}, z_{j+1} \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \ldots, z_n)$$

und hieraus durch Kürzen die behauptete Gleichung

$$\bar{t} = t\,\zeta^{(i)} = z_j.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir also im zweiten für $N_i(e)$ erforderlichen Teil des Beweises annehmen, die Elemente t_k im Operator $\vartheta = [t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n]$ des Ausdrucks

$$T_4 = (x_1, \ldots, x_j\,\vartheta^{(i)}, \ldots, x_n), \quad j \neq i,$$

seien Lösungen gewisser Gleichungen

$$t_k \zeta_k{}^{(i)} = z_k, \quad \zeta_k \in N_i(e)^{n-1}, z_k \in N_i(e). \tag{9}$$

Unter Verwendung von A_1, (1) und (9) folgt

$$\begin{aligned} T_4 \zeta_1{}^{(i)} \cdots \zeta_{i-1}^{(i)}\, \zeta_{i+1}^{(i)} \cdots \zeta_n{}^{(i)} &= (x_1, \ldots, x_j \vartheta^{(i)}\, \zeta_1{}^{(i)} \cdots \zeta_n{}^{(i)}, \ldots, x_n) \\ &= (x_1, \ldots, (z_1, \ldots, z_{i-1}, x_j, \ldots, z_n), \ldots, x_n) \doteq (x_1, \ldots, x_j \bar{\zeta}^{(i)}, \ldots, x_n) \\ &= (x_1, \ldots, x_n)\, \bar{\zeta}^{(i)} = (x_1, \ldots, x_n)\, \vartheta^{(i)}\, \zeta_1{}^{(i)} \cdots \zeta_n{}^{(i)}. \end{aligned}$$

Das bedeutet, da die $\zeta_k{}^{(i)}$, $k \neq i$, eineindeutige Abbildungen von S auf sich sind,

$$T_4 = (x_1, \ldots, x_j \vartheta^{(i)}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)\vartheta^{(i)}, \quad j \neq i,$$

wie wir im zweiten Teil des Beweises zeigen mußten.

Für den dritten Teil führen wir auf S die 2-Loop-Multiplikation

$$ab = (b, e, \ldots, e, a, e, \ldots, e) \tag{10}$$

mit dem Einselement e ein (a steht auf der rechten Seite als i-tes Argument, falls $i \neq 1$ ist; für $i = 1$ sind (10) und die folgenden Rechnungen in naheliegender Weise zu modifizieren). Lassen wir im ersten und letzten Term von A_1 nur x_1, x_i und das erste ζ-Argument z_1 von e verschieden, so ergibt sich

$$x_i(x_1 z_1) = (x_i x_1) z_1, \quad \forall\, x_i, x_1 \in S, \ \forall\, z_1 \in N_i(e), \tag{11}$$

woraus die Assoziativität der binären Multiplikation (10) auf $N_i(e)$ folgt, deren Kommutativität auf $N_i(e)$ schon aus (3) abzulesen ist. Nun wird mit $\zeta_j = [z_j, e, \ldots, e]$, $j \neq i, j = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} x\zeta^{(i)} &\doteq (z_1, \ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1}, \ldots, z_n) = x\zeta_1{}^{(i)} \cdots \zeta_n{}^{(i)} \\ &= \Big(\cdots \Big(\Big(\cdots (x z_1)\, z_2 \cdots z_{i-1}\Big)\, z_{i+1}\Big) \cdots\Big)\, z_n. \end{aligned}$$

Das bedeutet gemäß (10), (11) und (3)

$$(z_1, \ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1}, \ldots, z_n) = x z_1 \cdots z_{i-1} z_{i+1} \cdots z_n \tag{12}$$

und insbesondere

$$(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_n) = z_1 \cdots z_i \cdots z_n, \tag{13}$$

wobei auf den rechten Seiten von (12) und (13) die Reihenfolge der Größen z_j beliebig ist. Die Gleichung (13) überträgt die Assoziativität der binären Multiplikation (10) in $N_i(e)$ auf die n-äre Operation $(z_1, \ldots, z_n)$, während Gleichung (3) die totale Kommutativität der letzteren bedeutet.

II. Bei $Q(e)$ können wir uns, insoweit ganz analoge Schlußweisen verwendet werden, kürzer fassen. Aus

$$\begin{aligned}&(x_1, x_2, \ldots, x_i \zeta_1^{(i)} \zeta_2^{(i)}, \ldots, x_n) = (x_1 \zeta_1^{(1)}, x_2 \zeta_2^{(2)}, \ldots, x_n)\\ &= (x_1 \zeta_1^{(1)}, x_2, \ldots, x_i \zeta_2^{(i)}, \ldots, x_n)\\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_i \zeta_2^{(i)} \zeta_1^{(i)}, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

folgt mit $x_i = x$ durch Kürzen

$$x \zeta_1^{(i)} \zeta_2^{(i)} = x \zeta_2^{(i)} \zeta_1^{(i)}, \tag{14}$$

falls zunächst $i \neq 1, i \neq 2$ ist. Auf diese Einschränkung läßt sich aber wie bei Gleichung (1) verzichten. Nun erkennt man folgendermaßen, daß erstens die Anwendung der n-ären Operation aus $Q(e)$ nicht herausführt: Es ist nach A_2 und (14)

$$\begin{aligned}&\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, (z_1 \zeta_1^{(1)}, \ldots, z_{i-1} \zeta_{i-1}^{(i-1)}, x_i, z_i \zeta_i^{(i)}, \ldots, z_{n-1} \zeta_{n-1}^{(n-1)}), \ldots, x_j, \ldots, x_n\right)\\ &= \left(x_1, \ldots, x_{i-1}, (z_1, \ldots, z_{i-1}, x_i \zeta_1^{(i)} \cdots \zeta_{n-1}^{(i)}, z_i, \ldots, z_{n-1}), \ldots, x_j, \ldots, x_n\right)\\ &\doteq \left(x_1, \ldots, x_i \zeta_1^{(i)} \cdots \zeta_{n-1}^{(i)} \bar{\zeta}^{(i)}, \ldots, x_j, \ldots, x_n\right)\\ &= \left(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j \zeta_1^{(j)} \cdots \zeta_{n-1}^{(j)} \bar{\zeta}^{(j)}, \ldots, x_n\right)\\ &= \left(x_1, \ldots, x_i, \ldots, (z_1 \zeta_1^{(1)}, \ldots, z_{j-1} \zeta_{j-1}^{(j-1)}, x_j, z_j \zeta_j^{(j)}, \ldots, z_{n-1} \zeta_{n-1}^{(n-1)}), \ldots, x_n\right)\end{aligned}$$

für alle i, j mit $1 \leqq i, j \leqq n, i \neq j$. Zweitens betrachte man für zwei feste Indizes i, j die in S eindeutig bestimmten Lösungen $t, \bar{t}$ der Gleichungen

$$t \zeta^{(j)} = z_j, \quad \bar{t} \zeta^{(i)} = e.$$

Unter Verwendung des Operators $\bar{\zeta} = [e, \ldots, e, z_j, \ldots, e]$, in dem z_j als j-tes Argument steht, gilt dann

$$\begin{aligned}t &= (e, \ldots, e, \bar{t} \zeta^{(i)}, e, \ldots, e, t, e, \ldots, e)\\ &= (e, \ldots, e, \bar{t}, e, \ldots, e, t \zeta^{(j)}, \ldots, e) = \bar{t} \bar{\zeta}^{(i)}\end{aligned}$$

und folglich

$$t \zeta^{(i)} = \bar{t} \bar{\zeta}^{(i)} \zeta^{(i)} = \bar{t} \zeta^{(i)} \bar{\zeta}^{(i)} = e \bar{\zeta}^{(i)} = z_j;$$

d. h., t genügt jeder der Gleichungen

$$t \zeta^{(k)} = z_j, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

falls es einer von ihnen genügt. Nun bilden wir mit den Lösungen $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n$ der somit ohne Einschränkung der Allgemeinheit gewählten Gleichungen

$$t_k \zeta_k^{(k)} = z_k, \quad k = 1, \ldots, n; k \neq i,$$

den Ausdruck

$$T = \left(x_1, \ldots, x_{i-1}, (t_1, \ldots, t_{i-1}, x_i, t_{i+1}, \ldots t_n), x_{i+1}, \ldots, x_n\right) \doteq \left(x_1, \ldots, x_i \vartheta^{(i)}, \ldots, x_n\right).$$

Wegen der Eineindeutigkeit der Abbildungen $\zeta_k^{(i)}, \zeta_k^{(j)}$ existieren zu gegebenen Elementen $x_i, x_j \in S$ sicher Elemente $\bar{x}_i, \bar{x}_j \in S$ mit

$$\bar{x}_r \zeta_1^{(r)} \cdots \zeta_{i-1}^{(r)} \zeta_{i+1}^{(r)} \cdots \zeta_n^{(r)} = x_r, \qquad r = i, j.$$

Dann folgt nach A_2, (14) und (15)

$$\begin{aligned} T &= (x_1, \ldots, \bar{x}_i \zeta_1^{(i)} \cdots \zeta_{i-1}^{(i)} \zeta_{i+1}^{(i)} \cdots \zeta_n^{(i)} \vartheta^{(i)}, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \\ &= (x_1, \ldots, (z_1, \ldots, z_{i-1}, \bar{x}_i, z_{i+1}, \ldots, z_n), \ldots, x_j, \ldots, x_n) \\ &\doteq (x_1, \ldots, \bar{x}_i \bar{\zeta}^{(i)}, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \\ &= (x_1, \ldots, \bar{x}_i, \ldots, \bar{x}_j \zeta_1^{(j)} \cdots \zeta_{i-1}^{(j)} \zeta_{i+1}^{(j)} \cdots \zeta_n^{(j)} \bar{\zeta}^{(j)}, \ldots, x_n) \\ &= (x_1, \ldots, \bar{x}_i, \ldots, \bar{x}_j \bar{\zeta}^{(j)} \zeta_1^{(j)} \cdots \zeta_n^{(j)}, \ldots, x_n) \\ &= (x_1, \ldots, \bar{x}_i \zeta_1^{(i)} \cdots \zeta_n^{(i)}, \ldots, \bar{x}_j \bar{\zeta}^{(j)}, \ldots, x_n) \\ &= (x_1, \ldots, x_i, \ldots, (z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, \bar{x}_j, \ldots, z_n), \ldots, x_n) \\ &= (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j \vartheta^{(j)}, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

womit bei $Q(e)$ das für 2. Erforderliche getan ist.

Schließlich definieren wir in Analogie zu (10), *diesmal aber zu jedem Index* i, eine binäre Multiplikation

$$ab = (b, e, \ldots, e, a, e, \ldots, e) \tag{16$_i$}$$

(bei der auf der rechten Seite a als i-tes Argument verwendet wird und die für $i = 1$ ebenso wie das folgende in offensichtlicher Weise zu modifizieren ist). Dann erhält man mit $\zeta_j = [z_j, e, \ldots, e], j \neq i, i = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} (z_1, \ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1}, \ldots, z_n) &= (e\zeta_1^{(1)}, \ldots, e\zeta_{i-1}^{(i-1)}, x, \ldots, e\zeta_n^{(n)}) \\ &= x\zeta_1^{(i)} \cdots \zeta_{i-1}^{(i)} \zeta_{i+1}^{(i)} \cdots \zeta_n^{(i)}, \end{aligned}$$

d. h.

$$(z_1, \ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1}, \ldots, z_n) = (\cdots(xz_1)z_2 \cdots)z_n, \tag{17$_i$}$$

woraus sich sofort auch

$$\begin{aligned} (z, e, \ldots, e, x, e, \ldots, e) &= (e, z, e, \ldots, e, x, e, \ldots, e) = \cdots \\ &= (e, \ldots, e, x, e, \ldots, e, z) = xz \end{aligned} \tag{18$_i$}$$

ergibt. Läßt man danach in A_2 nur x_1, x_i und $z_{i-1} = z$ von e verschieden, so liefert der Vergleich der ersten und i-ten Terms in A_2 unter Benutzung von $(16)_i$ und $(18)_i$

$$x_i(zx_1) = (x_i z)x_1. \tag{19$_i$}$$

Die Multiplikation $(16)_i$ ist also auf $Q(e)$ assoziativ und, wie man der Herleitung von $(17)_i$ entnimmt, kommutativ, woraus Assoziativität und totale Kommutativität auch für die n-äre Operation auf $Q(e)$ folgen. Insbesondere gilt, diesmal für jedes i und seine zugehörige binäre Multiplikation $(16)_i$,

$$(z_1, \ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1}, \ldots, z_n) = xz_1 \cdots z_{i-1}z_{i+1} \cdots z_n, \tag{20$_i$}$$
$$\forall x \in S, \forall z_k \in Q(e),$$

während auf $Q(e)$ sämtliche Multiplikationen $(16)_i$ übereinstimmen und

$$(z_1, \ldots, z_n) = z_1 \overset{*}{\cdots} z_n \tag{21}$$

liefern; auf die Reihenfolge der $z_k \in Q(e)$ kommt es in $(20)_i$ und (21) rechts nicht an. Wir haben den Satz damit vollständig bewiesen.

Ferner gilt der

Satz. *Zu jedem Einselement e einer n-Loop S gibt es genau einen i-Nucleus $N_i(e)$ von S für jedes $i = 1, \ldots, n$ und genau einen Quernucleus $Q(e)$, denen e angehört.*

Der Beweis verläuft ganz analog zu dem des entsprechenden Satzes für das Zentrum $Z(e)$ und kann hier unterlassen werden.

Daß zu verschiedenen Einselementen einer n-Loop verschiedene Quernuclei und i-Nuclei gehören können, folgt sofort aus der entsprechenden Aussage über die Zentren und der offenbar gültigen Relation

$$Z(e) \subseteq N_i(e), i = 1, \ldots, n; \quad Z(e) \subseteq Q(e).$$

3. Nuclei und Zentren isotoper n-Loops

3.1 Quernuclei

Wir betrachten zwei n-Loops $(S_1, \{x_1, \ldots, x_n\})$ und $(S_2, (x_1, \ldots, x_n))$, die die Einselemente $f \in S_1$ und $e \in S_2$ besitzen mögen und durch die Gleichung

$$\{x_1, \ldots, x_n\} = (x_1 \varphi_1, \ldots, x_n \varphi_n)\, \psi,$$

worin φ_k, $k = 1, \ldots, n$, und ψ^{-1} eineindeutige Abbildungen von S_1 auf S_2 bedeuten, zueinander isotop sind. Aus (1) folgt

$$x_i = (f_1, \ldots, f_{i-1}, x_i \varphi_i, f_{i+1}, \ldots, f_n)\psi, \tag{2}$$

$$f_i = f\varphi_i, \ \forall\ x_i \in S_1, i = 1, \ldots, n.$$

Führt man eineindeutige Abbildungen F_i, $i = 1, \ldots, n$, von S_2 auf sich durch

$$x F_i \doteq (f_1, \ldots, f_{i-1}, x, f_{i+1}, \ldots, f_n)$$

ein, so wird

$$f_i F_i = (f_1, \ldots, f_n) = f\psi^{-1} = g, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

für die Abbildungen φ_i erhält man

$$x\varphi_i = x\psi^{-1} F_i^{-1}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

so daß wir statt (1) auch

$$\{x_1, \ldots, x_n\} = (x_1 \psi^{-1} F_1^{-1}, \ldots, x_n \psi^{-1} F_n^{-1})\, \psi \tag{6}$$

schreiben können.

Übertragen wir nun die definierenden Gleichungen

$$\big\{\{x_1, z_1, \ldots, z_{n-1}\}, x_2, \ldots, x_n\big\} = \cdots = \big\{x_1, \ldots, x_{i-1}, \{z_1, \ldots, z_{i-1}, x_i, \ldots,\} \ldots, x_n\big\}$$
$$= \cdots = \big\{x_1, \ldots, x_{n-1}, \{z_1, \ldots, z_{n-1}, x_n\}\big\} \tag{7}$$

des Quernucleus $Q(f) \subseteqq S_1$ mittels (6) nach S_2, so erhalten wir aus (7)

$$\big((x_1\psi^{-1}F_1^{-1}, z_1\psi^{-1}F_2^{-1}, \ldots, z_{n-1}\psi^{-1}F_n^{-1})\,\psi\psi^{-1}F_1^{-1}, x_2\psi^{-1}F_2^{-1}, \ldots, x_n\psi^{-1}F_n^{-1}\big)$$
$$= \cdots = \big(x_1\psi^{-1}F_1^{-1}, \ldots, x_{n-1}\psi^{-1}F_{n-1}^{-1}, (z_1\psi^{-1}F_1^{-1}, \ldots, z_{n-1}\psi^{-1}F_{n-1}^{-1}, x_n\psi^{-1}F_n^{-1})\,\psi\psi^{-1}F_n^{-1}\big).$$

Wir vereinfachen diese Beziehung, indem wir

$$x_i\psi^{-1}F_i^{-1} = y_i,\ z_j\psi^{-1} = v_j,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n-1,$$

setzen, so daß sich als zu (7) äquivalente Gleichungen

$$\big((y_1, v_1F_2^{-1}, \ldots, v_{n-1}F_n^{-1})\,F_1^{-1}, y_2, \ldots, y_n\big) = \cdots$$
$$= \big(y_1, \ldots, y_{i-1}, (v_1F_1^{-1}, \ldots, v_{i-1}F_{i-1}^{-1}, y_i, v_{i+1}F_{i+1}^{-1}, \ldots, v_{n-1}F_n^{-1})\,F_i^{-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n\big)$$
$$= \cdots = \big(y_1, \ldots, y_{n-1}, (v_1F_1^{-1}, \ldots, v_{n-1}F_{n-1}^{-1}, y_n)\,F_n^{-1}\big) \tag{8}$$

ergeben, worin die Größen y_j ganz S_2, die Größen v_k ganz $Q(f)\psi^{-1}$ durchlaufen. Ordnet man jedem Operator $\xi = [x_1, \ldots, x_{n-1}] \in S_1^{n-1}$ isotope Operatoranwendungen $\hat{\xi}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$, mittels

$$y\hat{\xi}^{(i)} = (x_1\psi^{-1}F_1^{-1}, \ldots, x_{i-1}\psi^{-1}F_{i-1}^{-1}, y, x_i\psi^{-1}F_{i+1}^{-1}, \ldots, x_{n-1}\psi^{-1}F_n^{-1}) \tag{9}$$

zu, so daß $\hat{\xi}^{(i)}$ eine eineindeutige Abbildung von S_2 auf sich wird, dann ist

$$(x_1\hat{\zeta}^{(1)}F_1^{-1}, x_2, \ldots, x_n) = \cdots = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i\hat{\zeta}^{(i)}F_i^{-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$
$$= \cdots = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\hat{\zeta}^{(n)}F_n^{-1}),\ \forall\ x_1, \ldots, x_n \in S_2,\ \forall\ \zeta \in Q(f)^{n-1}, \tag{10}$$

bis auf die Größen y_k, die wir der Üblichkeit halber wieder durch x_k ersetzt haben, ebenfalls äquivalent zu (8) und (7). Nun definieren wir eine eineindeutige Abbildung H von $Q(f)$ in S_2: Ist

$$z \in Q(f),\ \zeta = [f, \ldots, f\, z] \in Q(f)^{n-1},$$

so sei

$$zH = e\hat{\zeta}^{(1)}F_1^{-1}. \tag{11}$$

Setzt man in (10) sämtliche Elemente $x_j = e$, $j = 1, \ldots, n$, dann folgt aus (11)

$$e\hat{\zeta}^{(1)}F_1^{-1} = \cdots = e\hat{\zeta}^{(i)}\,F_i^{-1} = \cdots = e\hat{\zeta}^{(n)}F_n^{-1} = zH. \tag{11'}$$

Überdies wird

$$fH = eF_1F_1^{-1} = e. \tag{11''}$$

Wir betrachten jetzt für ein beliebiges i, $1 \leqq i \leqq n$, den Ausdruck

$$T = (z_1H, \ldots, z_{i-1}H, x_i, z_iH, \ldots, z_{n-1}H),$$

gebildet mit dem Operator

$$\zeta = [z_1, \ldots, z_{n-1}) \in Q(f)^{n-1},$$

und führen entsprechend der Definition von H die Operatoren

$$\zeta_i = [f, \ldots, f, z_i] \in Q(f)^{n-1},\ i = 1, \ldots, n,$$

ein. Aus (11′) folgt nun

$$T = (e\hat{\zeta}_1^{(1)}\,F_1^{-1}, \ldots, e\hat{\zeta}_{i-1}^{(i-1)}\,F_{i-1}^{-1}, x_i, e\hat{\zeta}_i^{(i+1)}\,F_{i+1}^{-1}, \ldots, e\hat{\zeta}_{n-1}^{(n)}F_n^{-1}),$$

also durch mehrfache Anwendung von (10) und unter Ausnutzung dessen, daß e Einselement von S_2 ist,

$$\begin{aligned} T &= x_i \hat{\zeta}_1^{(i)} F_i^{-1} \hat{\zeta}_2^{(i)} F_i^{-1} \cdots \hat{\zeta}_{n-1}^{(i)} F_i^{-1} \\ &= (f_1, \ldots, f_{i-1}, x_i \hat{\zeta}_1^{(i)} F_i^{-1} \cdots \hat{\zeta}_{n-2}^{(i)} F_i^{-1}, f_{i+1}, \ldots, f_{n-1}, z_{n-1} \psi^{-1} F_n^{-1})\, F_i^{-1} \\ &= (f_1 \hat{\zeta}_1^{(1)} F_1^{-1}, \ldots, f_{i-1} \hat{\zeta}_{i-1}^{(i-1)} F_{i-1}^{-1}, x_i, f_{i+1} \hat{\zeta}_i^{(i+1)} F_{i+1}^{-1}, \ldots, z_{n-1} \psi^{-1} F_n^{-1})\, F_i^{-1}. \end{aligned}$$

Mit $\zeta_0 = [f, \ldots, f, z]$ wird aber

$$\begin{aligned} f_j \hat{\zeta}_0^{(j)} F_j^{-1} &= (f_1, \ldots, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, \ldots, f_{n-1}, z \psi^{-1} F_n^{-1})\, F_j^{-1} \\ &= z \psi^{-1} F_n^{-1} F_n F_j^{-1} = z \psi^{-1} F_j^{-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Daher gilt statt des letzten Ausdrucks für T auch

$$\begin{aligned} T &= (z_1 \psi^{-1} F_1^{-1}, \ldots, z_{i-1} \psi^{-1} F_{i-1}^{-1}, x_i, z_i \psi^{-1} F_{i+1}^{-1} \ldots, z_{n-1} \psi^{-1} F_n^{-1})\, F_i^{-1} \\ &= x_i \hat{\zeta}^{(i)} F_i^{-1}, \end{aligned}$$

d. h. insgesamt

$$x_i \hat{\zeta}^{(i)} F_i^{-1} = (z_1 H, \ldots, z_{i-1} H, x_i, z_i H, \ldots, z_{n-1} H).$$

Auf Grund dieser Beziehung wird (10) äquivalent mit

$$\begin{aligned} &\big((x_1, z_1 H, \ldots, z_{n-1} H), x_2, \ldots, x_n\big) = \cdots = \big(x_1, \ldots, (z_1 H, \ldots, z_{i-1} H, x_i, \ldots), x_{i+1}, \ldots, x_n\big) \\ &\quad = \cdots = \big(x_1, \ldots, x_{n-1}, (z_1 H, \ldots, z_{n-1} H, x_n)\big), \\ &\quad \forall\, x_1, \ldots, x_n \in S_2, \forall\, \zeta = [z_1, \ldots, z_{n-1}] \in Q(f)^{n-1}. \end{aligned}$$

Anschließend zeigen wir, daß die eineindeutige Abbildung H einen Isomorphismus von $Q(f)$ in S_2 darstellt, daß also

$$\{z_1, \ldots, z_n\} H = (z_1 H, \ldots, z_n H) \quad \forall\, z_1, \ldots, z_n \in Q(f) \tag{14}$$

ist. Für beliebige $z_1, \ldots, z_n \in Q(f)$ wird nämlich mit $v_j = z_j \psi^{-1}, j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} \{z_1, \ldots, z_n\} H &= (e, f_2, \ldots, f_{n-1}, \{z_1, \ldots, z_n\} \psi^{-1} F_n^{-1}) F_1^{-1} \\ &= \big(e, f_2, \ldots, f_{n-1}, (v_1 F_1^{-1}, \ldots, v_n F_n^{-1}) F_n^{-1}\big) F_1^{-1} \\ &= \big(e, f_2, \ldots, f_{n-2}, (v_1 F_1^{-1}, \ldots, v_{n-2} F_{n-2}^{-1}, f_{n-1}, v_{n-1} F_n^{-1}) F_{n-1}^{-1}, v_n F_n^{-1}\big) F_1^{-1} \\ &= \big(e, f_2, \ldots, f_{n-2}, (v_1 F_1^{-1}, \ldots, v_{n-2} F_{n-2}^{-1}, v_{n-1} F_{n-1}^{-1}, f_n)\, F_{n-1}^{-1}, v_n F_n^{-1}\big) F_1^{-1}, \end{aligned}$$

wobei der vorletzte Ausdruck unter Benutzung von (8), der letzte auf Grund der (nach S_2 übertragenen) totalen Kommutativität von $Q(f) \subseteqq S_1$ zustandekommt. In der gleichen Weise fährt man fort, die innere Klammer stets unter Zurücklassung eines v_j um einen Schritt nach vorn verschiebend, und erhält beim letzten Schritt

$$\begin{aligned} \{z_1, \ldots, z_n\}\, H &= \big((e, f_2, \ldots, f_{n-1}, v_1 F_n^{-1}) F_1^{-1}, v_2 F_2^{-1}, \ldots, v_n F_n^{-1}\big) F_1^{-1} \\ &= \big((z_1\, H, v_2 F_2^{-1}, \ldots, v_n F_n^{-1})\, F_1^{-1}, e, e, \ldots, e\big). \end{aligned}$$

Für die nächsten Umformungen führen wir die Operatoren $\zeta_i = [f, \ldots, f, z_i]$, $i = 2, \ldots, n$, ein und erhalten auf Grund von (8), (10), (11) und (12)

$$\begin{aligned}\{z_1, \ldots, z_n\} H &= \big(z_1 H, (v_2 F_1^{-1}, e, v_3 F_3^{-1}, \ldots, v_n F_n^{-1}) F_2^{-1}, e, \ldots, e\big) \\ &= \big(z_1 H, (f_1 \hat{\zeta}_2^{(1)} F_1^{-1}, e, v_3 F_3^{-1}, \ldots, v_n F_n^{-1}) F_2^{-1}, e, \ldots, e\big) \\ &= \big(z_1 H, (f_1, e \hat{\zeta}_2^{(2)} F_2^{-1}, v_3 F_3^{-1}, \ldots, v_n F_n^{-1}) F_2^{-1}, e, \ldots, e\big) \\ &= \big(z_1 H, (f_1, z_2 H, v_3 F_3^{-1}, \ldots, v_n F_n^{-1}) F_2^{-1}, e, \ldots, e\big) \\ &= \big(z_1 H, z_2 H, (f_1, v_3 F_2^{-1}, e, v_4 F_4^{-1}, \ldots, v_n F_n^{-1}) F_3^{-1}, e, \ldots, e\big) \\ &= \cdots = (z_1 H, z_2 H, \ldots, z_n H),\end{aligned}$$

wie wir zeigen wollten. Daß H nicht nur, wie man aus (11″) und (13) erkennt, ein Isomorphismus von $Q(f)$ in den zu e gehörigen Quernucleus $Q(e)$ von S_2, sondern sogar ein Isomorphismus von $Q(f)$ auf $Q(e)$ ist, ergibt sich folgendermaßen: Faßt man in umgekehrter Richtung S_2 als ein Isotop von S_1 auf, d. h. schreibt man statt (1)

$$(x_1, \ldots, x_n) = \{x_1 \varphi_1^{-1}, \ldots, x_n \varphi_n^{-1}\} \psi^{-1}, \tag{$\bar{1}$}$$

so führen analoge Betrachtungen zu der Abbildung $\bar{H}$ mit

$$u \bar{H} = \{f, e\psi E_2^{-1}, \ldots, e\psi E_{n-1}^{-1}, u\psi E_n^{-1}\} E_1^{-1}, \quad u \in Q(e), \tag{$\overline{11}$}$$

von $Q(e)$ in $Q(f) \subseteqq S_1$, wobei

$$y E_j = \{e_1, \ldots, e_{j-1}, y, e_{j+1}, \ldots, e_n\}, \; y \in S_1, \; e\varphi_j^{-1} = e_j, \; j = 1, \ldots, n, \tag{$\bar{3}$}$$

gilt. Die Gleichung ($\overline{11}$) lautet, wenn man sie mit Hilfe der n-ären Operation in S_2 ausdrückt,

$$u\bar{H} = (f\psi^{-1} F_1^{-1}, e\psi E_2^{-1} \psi^{-1} F_2^{-1}, \ldots, e\psi E_{n-1}^{-1} \psi^{-1} F_{n-1}^{-1}, u\psi E_n^{-1} \psi^{-1} F_n^{-1}) \psi E_1^{-1}. \tag{15}$$

Setzt man die zur Gleichung (5) analoge Gleichung

$$y \varphi_i^{-1} = y \psi E_i^{-1} \tag{$\bar{5}$}$$

in (5) ein, so erhält man die für alle $y \in S_2$ und alle $i = 1, \ldots, n$ gültige Beziehung

$$y\, \psi E_i^{-1} \psi^{-1} F_i^{-1} = y, \tag{16}$$

mit deren Hilfe statt (15)

$$u\bar{H} = (f_1, e, \ldots, e, u)\, \psi E_1^{-1} \tag{17}$$

geschrieben werden kann. Nun sei $u = zH \in Q(f)H$. In diesem Fall erhalten wir mit $\zeta = [f, \ldots, f, z]$ nach (10), (12) und (16)

$$\begin{aligned}u\bar{H} = zH\bar{H} &= (f_1, e, \ldots, e, e\, \hat{\zeta}^{(n)} F_n^{-1})\, \psi E_1^{-1} = (f_1 \hat{\zeta}^{(1)} F_1^{-1}, \ldots, e)\, \psi E_1^{-1} \\ &= z\psi^{-1} F_1^{-1} \psi E_1^{-1} = z,\end{aligned}$$

d. h.

$$zH\bar{H} = z, \qquad \forall\, z \in Q(f).$$

Wegen der Eineindeutigkeit der Abbildungen H und $\bar{H}$ würde aus $Q(f)H \subset Q(e)$ nun $Q(f)H\bar{H} \subset Q(e)\bar{H} \subseteqq Q(f)$, also $Q(f) \subset Q(f)$ folgen. Aus diesem Widerspruch ergibt sich der

Satz. *Die Quernuclei $Q(f)$ und $Q(e)$ zweier isotoper n-Loops $(S_1, \{x_1, \ldots, x_n\})$ und $\big(S_2, (x_1, \ldots, x_n)\big)$ mit den Einselementen $f \in S_1$ und $e \in S_2$ sind isomorph.*

Der Satz gilt insbesondere, falls die beiden n-Loops identisch sind und zwischen ihnen der identische Isotopismus $\varphi_1 = \cdots = \varphi_n = \psi = \varepsilon$ betrachtet wird. Dann erhalten wir als

Folgerung. *Je zwei Quernuclei $Q(e)$ und $Q(f)$ einer n-Loop mit den Einselementen e und f sind isomorph.*

3.2 i-Nuclei

Wir beabsichtigen, die gleichen Resultate auch für i-Nuclei isotoper n-Loops abzuleiten, legen hierbei für einen festen, von dem Index i verschiedenen Index j die Gleichung

$$\begin{aligned}&\{y_1, \ldots, y_{j-1}, \{z_1, \ldots, z_{i-1}, y_j, z_{i+1}, \ldots, z_n\}, y_{j+1}, \ldots, y_n\}\\ &= \{z_1, \ldots, z_{i-1}, \{y_1, \ldots, y_n\}, z_{i+1}, \ldots, z_n\},\\ &\forall\, y_r \in S_1, \forall z_t \in N_i(f), t \neq i;\ r, t, = 1, \ldots, n,\end{aligned} \tag{18}$$

als eine typische unter den definierenden Gleichungen für den zum Einselement f gehörigen i-Nucleus $N_i(f)$ der n-Loop $(S_1, \{y_1, \ldots, y_n\})$ zugrunde und setzen wiederum $\big(S_2, (x_1, \ldots, x_n)\big)$ mit dem Einselement e als isotope n-Loop voraus, wobei die Gleichung (1) des vorigen Punktes und deren von $Q(f)$ bzw. $Q(e)$ unabhängige Folgerungen und Analogien gelten mögen.

Formuliert man (18) mittels der auf S_2 erklärten n-ären Operation $(x_1, \ldots, x_n)$ und führt die Abkürzungen

$$y_r \psi^{-1} F_r^{-1} = x_r, \quad z_t \psi^{-1} F_t^{-1} = v_t$$

ein, dann erhält man als eine zu (18) äquivalente Gleichung

$$\begin{aligned}&\big(x_1, \ldots, x_{j-1}, (v_1, \ldots, v_{i-1}, x_j F_j F_i^{-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n) F_j^{-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n\big)\\ &= \big(v_1, \ldots, v_{i-1}, (x_1, \ldots, x_n) F_i^{-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\big),\end{aligned} \tag{19}$$

aus der sich für $x_1 = \cdots = x_{j-1} = x_{j+1} = \cdots = x_n = e$

$$(v_1, \ldots, v_{i-1}, x_j F_j F_i^{-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n) F_j^{-1} = (v_1, \ldots, v_{i-1}, x_j F_i^{-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n) \tag{19A}$$

ergibt, wonach auch

$$\begin{aligned}&\big(x_1, \ldots, x_{j-1}, (v_1, \ldots, v_{i-1}, x_j F_i^{-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n), \ldots, x_n\big)\\ &= \big(v_1 \ \ldots, v_{i-1}, (x_1, \ldots, x_n) F_i^{-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\big)\end{aligned} \tag{20}$$

zu (18) und (19) äquivalent wird. Wir verwenden nun wieder die im vorigen Punkt, Gleichung (9), erklärte isotope Operatoranwendung und erhalten statt der Gleichung (20) die Gleichung

$$(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j F_i^{-1} \hat{\zeta}^{(i)}, x_{j+1}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) F_i^{-1} \hat{\zeta}^{(i)}, \tag{21}$$

die für jedes $\zeta = [z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n] \in N_i(f)^{n-1} \subseteqq S_1^{n-1}$ und alle $x_1, \ldots, x_n \in S_2$ gilt. In Analogie zu (11) definieren wir eine eineindeutige Abbildung K_i von $N_i(f)$ in S_2, indem wir jedem $z \in N_i(f)$ mittels $\zeta = [f, \ldots, f, z] \in N_i(f)^{n-1}$ sein Bild

$$z K_i = e F_i^{-1} \hat{\zeta}^{(i)} \tag{22}$$

zuordnen und insbesondere $fK_i = eF_i^{-1}F_i$, d. h.

$$fK_i = e \tag{22'}$$

erhalten. Weiterhin in Analogie zum vorigen Punkt betrachten wir den Ausdruck

$$T = (z_1K_i, \ldots, z_{i-1}K_i, x, z_{i+1}K_i, \ldots, z_nK_i), \tag{23}$$

gebildet mit dem Operator

$$\zeta = [z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n] \in N_i(f)^{n-1},$$

und führen die den z_r zugeordneten Operatoren

$$\zeta_r = [f, \ldots, f, z_r] \in N_i(f)^{n-1}, r \neq i, r = 1, \ldots, n,$$

ein. Nach Definition der Abbildung K_i ist

$$T = (eF_i^{-1}\hat{\zeta}_1^{(i)}, \ldots, eF_i^{-1}\hat{\zeta}_{i-1}^{(i)}, x, eF_i^{-1}\hat{\zeta}_{i+1}^{(i)}, \ldots, eF_i^{-1}\hat{\zeta}_n^{(i)}).$$

Benutzt man die Gleichung (21) für sämtliche zulässigen, d. h. von i verschiedenen Indizes j und die Definition der Abbildung K_i, so folgt

$$\begin{aligned} T &= xF_i^{-1}\hat{\zeta}_n^{(i)} \cdots F_i^{-1}\hat{\zeta}_{i-1}^{(i)}F_i^{-1}\hat{\zeta}_{i+1}^{(i)} \cdots F_i^{-1}\hat{\zeta}_1^{(i)} \\ &= (f_1, \ldots, f_{i-1}xF_i^{-1}, f_{i+1}, \ldots, f_{n-1}, z_n\psi^{-1}F_n^{-1})\, F_i^{-1}\hat{\zeta}_{n-1}^{(i)} \cdots F_i^{-1}\hat{\zeta}_1^{(i)} \\ &= (f_1F_i^{-1}\hat{\zeta}_1^{(i)}, \ldots, f_{i-1}F_i^{-1}\hat{\zeta}_{i-1}^{(i)}, xF_i^{-1}, f_{i+1}F_i^{-1}\hat{\zeta}_{i+1}^{(i)}, \ldots, f_{n-1}F_i^{-1}\hat{\zeta}_{n-1}^{(i)}, z_n\psi^{-1}F_n^{-1}). \end{aligned}$$

Wir bemerken, daß sich die Gleichung (19A) auch in der Form

$$x_jF_jF_i^{-1}\hat{\zeta}^{(i)}F_j^{-1} = x_jF_i^{-1}\hat{\zeta}^{(i)}, \forall \zeta \in N_i(f)^{n-1}, j \neq i, j = 1, \ldots, n, \tag{19B}$$

schreiben läßt. Mit $x_j = f_j$ erhält man unter Benutzung von (12) aus (19B)

$$\begin{aligned} &f_jF_i^{-1}\hat{\zeta}_j^{(i)} = f_jF_jF_i^{-1}\hat{\zeta}_j^{(i)}F_j^{-1} = f_j\hat{\zeta}_j^{(i)}F_j^{-1} = z_j\psi^{-1}F_j^{-1} = v_j, \\ &j \neq i;\, j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Dadurch nimmt T die Form

$$T = (v_1, \ldots, v_{i-1}, xF_i^{-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n) \tag{23A}$$

der beiden Seiten von Gleichung (20) an, die — ebenso wie (19) und (18) — zur Gleichung

$$\begin{aligned} &\big(x_1, \ldots, x_{j-1}, (z_1K_i, \ldots, z_{i-1}K_i, x_j, z_{i+1}K_i, \ldots, z_nK_i), x_{j+1}, \ldots, x_n\big) \\ &= \big(z_1K_i, \ldots, z_{i-1}K_i, (x_1, \ldots, x_n), \ldots, z_nK_i\big), \\ &\forall\, x_r \in S_2, \forall\, z_t \in N_i(f);\; r, t = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{24}$$

äquivalent wird. Diese Gleichung weist K_i als Abbildung von $N_i(f)$ in einen i-Nucleus von S_2 und zwar wegen (22′) in $N_i(e) \subseteq S_2$ nach, da j jede von i verschiedene natürliche Zahl zwischen 1 und n annehmen darf. Für den Nachweis, daß es sich bei K_i um einen Isomorphismus handelt, betrachten wir mit den bisherigen Abkürzungen $v_r = z_r\psi^{-1}F_r^{-1}$, $r = 1, \ldots, n$, den Ausdruck

$$A = \{z_1, \ldots, z_n\}K_i = \big(f_1, \ldots, f_{i-1}, eF_i^{-1}, f_{i+1}, \ldots, f_{n-1}, (v_1, \ldots, v_n)F_n^{-1}\big).$$

Gleichung (19) führt ihn wegen $v_i = z_i\psi^{-1}F_i^{-1} = (z_i\psi^{-1}F_n^{-1})F_nF_i^{-1}$ in

$$A = \left(v_1, \ldots, v_{i-1}, (f_1, \ldots, f_{i-1}, eF_i^{-1}, f_{i+1}, \ldots, f_{n-1}, z_i\psi^{-1}F_n^{-1})F_i^{-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\right)$$
$$= (v_1, \ldots, v_{i-1}, z_iK_iF_i^{-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

über. Durch Vergleich von (23) und (23 A) ergibt sich der letzte Term zu $(z_1K_i, \ldots, z_iK_i, \ldots, z_nK_i)$, wir haben somit, wie wir zeigen wollten,

$$\{z_1, \ldots, z_n\}K_i = (z_1K_i, \ldots, z_nK_i).$$

Wie im vorigen Punkt schließen wir durch Vertauschung von S_1 und S_2, daß K_i ein Isomorphismus von $N_i(f)$ auf $N_i(e)$ ist: Man erhält einen Isomorphismus $\bar{K}_i$ von $N_i(e)$ in $N_i(f)$ durch

$$u\bar{K}_i = \{e_1, \ldots, e_{i-1}, fE_i^{-1}, e_{i+1}, \ldots, e_{n-1}, u\psi E_n^{-1}\}, u \in N_i(e). \tag{$\overline{22}$}$$

Diese Gleichung lautet, ausgedrückt durch die n-äre Operation in S_2:

$$u\bar{K}_i = (e_1\psi^{-1}F_1^{-1}, \ldots, e_{i-1}\psi^{-1}F_{i-1}^{-1}, fE_i\psi^{-1}F_i^{-1}, \ldots, e_{n-1}\psi^{-1}F_{n-1}^{-1}, u\psi E_n^{-1}\psi^{-1}F_n^{-1})\psi.$$

Wir wenden die Gleichungen ($\bar{3}$), ($\bar{5}$), und (16) an; es folgt

$$u\bar{K}_i = (e, \ldots, e, f\psi^{-1}, e, \ldots, e, u)\psi.$$

Für $u = zK_i \in N_i(f)K_i$ wird mit $\zeta = [f, \ldots, f, z]$

$$zK_i\bar{K}_i = (e, \ldots, e, f\psi^{-1}, e, \ldots, e, eF_i^{-1}\zeta^{(i)})\psi = (e, \ldots, e, f\psi^{-1}, e, \ldots, e)F_i^{-1}\zeta^{(i)}\psi$$
$$= f\psi^{-1}F_i^{-1}\zeta^{(i)}\psi = (f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_{n-1}, z\psi^{-1}F_n^{-1})\psi,$$

d. h.

$$zK_i\bar{K}_i = z, \quad \forall z \in N_i(f),$$

woraus sich $N_i(f)K_i = N_i(e)$ ergibt. Also gilt der

Satz. *Für ein beliebiges i, $1 \leqq i \leqq n$, sind die i-Nuclei $N_i(f) \subseteqq S_1$ und $N_i(e) \subseteqq S_2$ zweier isotoper n-Loops $(S_1, \{x_1, \ldots, x_n\})$ bzw. $\left(S_2, (x_1, \ldots, x_n)\right)$ mit den Einselementen f bzw. e isomorph.*

Er liefert wie vorher als

Folgerung. *Je zwei i-Nuclei $N_i(e)$ und $N_i(f)$ einer n-Loop mit den Einselementen e und f sind isomorph.*

3.3 Zentren

Auch über die Zentren isotoper n-Loops lassen sich Aussagen wie in den beiden vorigen Punkten machen. Es seien wie bisher $Q(f)$ und $N_i(f)$, $i = 1, \ldots, n$, partielle Nuclei von $(S_1, \{x_1, \ldots, x_n\})$; $Z(f)$ sei das in dieser n-Loop zu f gehörige Zentrum. Außerdem benutzen wir die Isomorphismen H aus Gleichung (11), $\bar{H}$ aus ($\overline{11}$), $K_i (i = 1, \ldots, n)$ aus (22), $\bar{K}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ aus ($\overline{22}$). Wegen $Z(f) \subseteqq N_i(f) \cap Q(f)$ lassen sich die Abbildungen H und K_i auf $Z(f)$ anwenden; es gilt, wie wir noch beweisen werden, das

Lemma. *Für jedes $z \in Z(f)$ ist $zH = zK_1 = \cdots = zK_n = \bar{z} \in Z(e)$, wobei $Z(e)$ das in $\left(S_2, (x_1, \ldots, x_n)\right)$ zu e gehörige Zentrum bedeutet.*

Umgekehrt folgt dann genauso $\bar{z}\bar{H} = \bar{z}\bar{K}_1 = \cdots = \bar{z}\bar{K}_n = z \in Z(f)$ für alle $\bar{z} \in Z(e)$. Das heißt: Die auf den Originalbereich $Z(f)$ reduzierte Abbildung H stellt einen Isomorphismus $Z(f)$ auf $Z(e)$ dar. Also haben wir (vorbehaltlich des Beweises für das Lemma) den

Satz. a) *Die Zentren* $Z(f) \subseteqq S_1$ *und* $Z(e) \subseteqq S_2$ *zweier isotoper n-Loops* $(S_1, \{x_1, \ldots, x_n\})$ *und* $(S_2, (x_1, \ldots, x_n))$ *mit den Einselementen f bzw. e sind isomorph.*

b) *Je zwei Zentren* $Z(e)$ *und* $Z(f)$ *einer n-Loop mit den Einselementen e und f sind isomorph.*

Zum Beweis des Lemmas betrachten wir für einen festen Index i zwischen 1 und n ein beliebiges Element $z \in Z(f)$ und den zugehörigen Operator $\zeta = [f, \ldots, f, z] \in Z(f)^{n-1}$. Nach Definition von $Z(f)$ gilt mit $e_j = e\varphi_j^{-1}, j = 1, \ldots, n$, insbesondere

$$\{e_1, \ldots, e_{i-1}, e_i\, \zeta^{(i)}, e_{i+1}, \ldots, e_n\} = \{e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_n\}\zeta^{(i)}.$$

Drücken wir diese Gleichung durch die n-äre Operation in S_2 aus, so folgt

$$\begin{aligned}&\big(e, \ldots, e, (f_1, \ldots, f_{i-1}, e, f_{i+1}, \ldots, f_{n-1}, z\varphi_n)\varphi_i, e, \ldots, e\big)\\ &= \big(f_1, \ldots, f_{i-1}, (e, \ldots, e)\psi\varphi_i, f_{i+1}, \ldots, f_{n-1}, z\varphi_n\big),\end{aligned}$$

d. h.

$$(f_1, \ldots, f_{i-1}, e, f_{i+1}, \ldots, f_{n-1}, z\psi^{-1}F_n^{-1})F_i^{-1} = (f_1, \ldots, f_{i-1}, eF_i^{-1}, f_{i+1}, \ldots, f_{n-1}, z\psi^{-1}F_n^{-1})$$

und besagt

$$zH = e\hat{\zeta}^{(i)}F_i^{-1} = eF_i^{-1}\hat{\zeta}^{(i)} = zK_i,$$

so daß, weil i beliebig war, der erste Teil des Lemmas bewiesen ist. Beim Nachweis, daß $zH \in Z(e)$ für alle $z \in Z(f)$ gilt, brauchen wir auf Grund der Definitionen von Zentrum und i-Nucleus nur die Gültigkeit von

$$\begin{aligned}&(x_1, \ldots, x_{i-1}, (z_1H_1, \ldots, z_{i-1}H, x_i, z_{i+1}H, \ldots, z_nH), x_{i+1}, \ldots, x_n)\\ &= (z_1H, \ldots, z_{i-1}H, (x_1, \ldots, x_n), z_{i+1}H, \ldots, z_nH) \qquad (25)\end{aligned}$$

für alle $x_1, \ldots, x_n \in S_2$, alle $z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n \in Z(f) \subseteqq S_1$ und einen einzigen festen Index i, $1 \leqq i \leqq n$, zu zeigen. Dazu gehen wir von der in S_1 gültigen Gleichung

$$\begin{aligned}&\big\{y_1, \ldots, y_{i-1}, \{z_1, \ldots, z_{i-1}, y_i, z_{i+1}, \ldots, z_n\}, y_{i+1}, \ldots, y_n\big\}\\ &= \big\{z_1, \ldots, z_{i-1}, \{y_1, \ldots, y_n\}, \ldots, z_n\big\},\\ &\forall\, y_1, \ldots, y_n \in S_1,\ \forall\, z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n \in Z(f),\end{aligned}$$

aus und übertragen sie ganz genauso nach S_2, wie wir im vorigen Punkt aus (18) die Gleichung (24) hergeleitet haben, was uns diesmal auf die verlangte Gleichung (25) führt. Das Lemma und der Satz sind damit bewiesen.

LITERATUR

[1] ACZÉL, J., G. PICKERT und F. RADÓ: Nomogramme, Gewebe und Quasigruppen. Mathematica *2* (25), 1 (1960) 5–24.

[2] BELOUSOV, V. D., und M. D. SANDIK: n-äre Quasigruppen und Loops (russ.), Sib. matem. ž. *7*, No. 1 (1966) 31–54.

[3] BRUCK, R. H.: A survey of binary systems. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1966.

[4] HOSSZÚ, M.: On the explicit form of n-group operations. Publ. Math. Debrecen *10* (1963) 88–92.
[5] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955.
[6] RADÓ, F.: Generalizarea tesuturilor spatiale pentru structuri algebrice, Studia Univ. „Babes-Bolyai, Math.-phys.", 1960, No. 1, 41–55.
[7] REES, D.: The nuclei of non-associative division algebras, Proc. Cambridge Phil. Soc. *46* (1950) 1–18.
[8] SANDIK, M. D.: Über die Einselemente in n-Loops (russ.), Issled. po algebre i mat. analizu, Kartja Moldovenjaskė, 1965, 140–146.

Manuskripteingang: 16. 10. 1970

VERFASSER:

HANS-HENNING BUCHSTEINER, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg