Über Intervallpolyeder im R_n

Eike Hertel

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

Die folgenden Betrachtungen stellen eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Hadwiger [1] dar. Gleichzeitig werden damit die auf die Ebene beschränkten Untersuchungen in [3] abgerundet.

1. Intervallpolyeder und Zerlegungsgleichheit

Ist im n-dimensionalen euklidischen Raum R_n ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem fest gegeben, so verstehen wir mit Hadwiger ([1], S. 33) unter einem (eigentlichen) Intervall X die Menge aller Punkte, deren Koordinaten x_i die Ungleichungen $\alpha_i \leqq x_i \leqq \beta_i$ mit $\alpha_i < \beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ erfüllen. Die Menge aller (eigentlichen) Intervalle des R_n sei $\mathfrak{J}_n{}^0$. Der Durchschnitt $C = X \cap Y$ zweier eigentlicher Intervalle ist entweder wieder ein eigentliches Intervall oder ganz in einer Ebene E_k $(k < n)$ enthalten. Im letzten Fall heißt C uneigentliches Intervall, wobei auch $C = \emptyset$ zugelassen ist. Wenn der Durchschnitt zweier Intervalle uneigentlich ist, so soll ihre Vereinigung als elementargeometrische Summe geschrieben werden:

$$C = X + Y \overset{\text{def}}{=} C = X \cup Y \wedge X \cap Y \text{ uneigentlich.}$$

Definition 1. Eine Punktmenge A des R_n heißt *Intervallpolyeder*, wenn sie sich als elementargeometrische Summe endlich vieler eigentlicher Intervalle darstellen läßt:

$$A = \sum_1^m X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_m \text{ mit } X_i \in \mathfrak{J}_n{}^0 \text{ und}$$

$$X_i \cap X_j \text{ uneigentlich für } i \neq j \; (i, j = 1, 2, \ldots, m).$$

Die Menge aller so definierten Intervallpolyeder des R_n sei $\mathfrak{J}_n$. Die oben erklärte Operation $+$ läßt sich sinngemäß auf $\mathfrak{J}_n$ erweitern. Dabei werde der Durchschnitt $A \cap B$ zweier Intervallpolyeder, der in endlich vielen echten Unterräumen des R_n liegt, ebenfalls uneigentlich genannt. Unter Verwendung der Gruppe der Translationen im R_n lassen sich folgende Relationen definieren.

Definition 2. a) Zwei Punktmengen P und Q des R_n heißen *translationsgleich* ($P \stackrel{t}{=} Q$), wenn es eine Translation t_0 gibt, die P in Q überführt: $t_0(P) = Q$.

b) Zwei Intervallpolyeder A und B heißen *intervallzerlegungsgleich*, kurz *zerlegungsgleich* ($A \sim B$), wenn sich A und B in endlich viele paarweise translationsgleiche Intervalle zerlegen lassen:

$$A \sim B \stackrel{\text{def}}{=} A = \sum_1^m X_i \wedge B = \sum_1^m Y_i \wedge X_i, Y_i \in \mathfrak{J}_n{}^0 \wedge X_i \stackrel{t}{=} Y_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Bezüglich der zuletzt definierten Relation gilt der folgende

Satz 1. *Die Zerlegungsgleichheit $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation über $\mathfrak{J}_n$, und es gilt der Additionssatz*

$$A \cap B, C \cap D \text{ uneigentlich} \wedge A \sim C \wedge B \sim D \to A + B \sim C + D. \qquad \text{(Ad)}$$

Der Beweis dieses Satzes ist der gleiche wie der des entsprechenden Satzes für die Ebene R_2 in [3], S. 299—300, und er kann deshalb hier übergangen werden.

2. Funktionale über $\mathfrak{J}_n$

Um die Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit von Intervallpolyedern zu beantworten, wird zunächst das auf $\mathfrak{J}_n{}^0$ eingeschränkte Problem betrachtet. HADWIGER zeigte, daß zwei Intervalle X und Y dann und nur dann zerlegungsgleich sind, wenn für alle translationsinvarianten und addierbaren Intervallfunktionale Φ_0 die Bedingungen $\Phi_0(X) = \Phi_0(Y)$ erfüllt sind ([1], S. 35). Dabei heißt Φ_0 translationsinvariant, wenn

$$\Phi_0(X) = \Phi_0(X') \text{ für } X \stackrel{t}{=} X' \qquad (2.1)$$

gilt, und addierbar, wenn für $X = \sum_1^m Z_i$ mit $X, Z_i \in \mathfrak{J}_n{}^0$

$$\Phi_0(X) = \sum_1^m \Phi_0(Z_i) \qquad (2.2)$$

ist.

Das allgemeinste translationsinvariante und addierbare Intervallfunktional, d. h. die allgemeinste Lösung des Funktionalgleichungssystem (2.1), (2.2) ist

$$\Phi_0(X) = \sum_{\tau_1} \cdots \sum_{\tau_n} c(\tau_1, \ldots, \tau_n)\, p_{\tau_1}(a_1) \cdots p_{\tau_n}(a_n). \qquad (2.3)$$

Dabei sind a_i die Kantenlängen von X, $p_{\tau_i}(a_i)$ ist Koeffizient in der Darstellung $a_i = \sum_\tau p_\tau(a_i)\, \omega_\tau$ der Zahl a_i als Linearkombination mit rationalen Koeffizienten nach der Hamelschen Basis ω_τ aller reellen Zahlen (vgl. [2]); c ist eine beliebig wählbare reellwertige Funktion über der Menge aller n-Tupel von Indizes $\tau \in \Xi$, der überabzählbaren Indexmenge der Hamelschen Basis. Die Summe in (2.3) erstreckt sich schließlich über alle n-Tupel $[\tau_1, \ldots, \tau_n]$ mit $\tau_i \in \Xi$, reduziert sich aber in jedem konkreten Fall auf eine endliche Summe. Bei festem Index τ gilt endlich noch

$$p_\tau(a + b) = p_\tau(a) + p_\tau(b) \tag{2.4}$$

und

$$p_\tau(ra) = r \cdot p_\tau(t) \text{ für rationales } r. \tag{2.5}$$

Das allgemeinste translationsinvariante und addierbare Intervallfunktional (2.3) ist also die allgemeine Lösung der Cauchy-Hamelschen Funktionalgleichung von n Veränderlichen (den Kantenlängen von X):

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + b_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n) + f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Die Beantwortung der Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit von Intervallpolyedern ergibt sich durch Fortsetzung des Funktionals Φ_0 auf $\mathfrak{J}_n$ vermöge des Ansatzes

$$\Phi(A) = \sum_1^m \Phi_0(X_i), \tag{2.6}$$

wobei $A = \sum_1^m X_i$ eine nach Definition 1 gegebene Darstellung des Intervallpolyeders $A \in \mathfrak{J}_n$ als elementargeometrische Summe von Intervallen $X_i \in \mathfrak{J}_n{}^0$ ist. Daß der Wert des Funktionals $\Phi(A)$ unabhängig von der Darstellung von A als Summe von Intervallen ist und daß Φ auf $\mathfrak{J}_n{}^0$ mit Φ_0 übereinstimmt, ergibt sich sehr leicht (vgl. [3], S. 301). Schließlich ist das Funktional Φ translationsinvariant und einfach additiv:

$$\Phi(A) = \Phi(A') \text{ für } A \overset{t}{=} A', \tag{2.7}$$

$$\Phi(A + B) = \Phi(A) + \Phi(B). \tag{2.8}$$

Damit ergibt sich sofort der

Satz 2. $A, B \in \mathfrak{J}_n \wedge A \sim B \rightarrow \Phi(A) = \Phi(B)$ *für alle* Φ *mit* (2.7) *und* (2.8).

Beweis. Die Relation $A \sim B$ sei realisiert durch

$$A = \sum_1^m X_i \text{ und } B = \sum_1^m Y_i \text{ mit } X_i, Y_i \in \mathfrak{J}_n{}^0 \text{ und } X_i \overset{t}{=} Y_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Mit (2.7) folgt daraus $\Phi(X_i) = \Phi(Y_i)$ für $i = 1, \ldots, m$ bzw. $\sum_1^m \Phi(X_i) = \sum_1^m \Phi(Y_i)$, und mit (2.8) ergibt sich im Sinne einer Induktion nach m

$$\Phi\left(\sum_1^m X_i\right) = \Phi\left(\sum_1^m Y_i\right),$$

also $\Phi(A) = \Phi(B)$, w.z.b.w.

3. Hinreichende Bedingungen

Es zeigt sich, daß die mit Satz 2 gefundenen notwendigen Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit von Intervallpolyedern auch hinreichend sind, d. h., es gilt der

Satz 3. *Aus* $\Phi(A) = \Phi(B)$ *für alle* Φ *mit* (2.7) *und* (2.8) *folgt* $A \sim B$.

Zum Beweis dieses Satzes wird der folgende Hilfssatz benötigt.

Hilfssatz 1. *Wenn $B, C, D \in \mathfrak{J}_n$ und $Y^1, Y^2 \in \mathfrak{J}_n^0$ gilt, so folgt aus* (a) $B + C \sim Y^2$ *und* (b) $D \sim B + Y^1$ *auch* $C + D \sim Y^1 + Y^2$.

Beweis. Die Relation (a) läßt sich sicher so realisieren, daß gilt $B \sim Y_B^2$ und $C \sim Y_C^2$ mit $Y_B^2 + Y_C^2 = Y^2$, wobei Y_B^2 und Y_C^2 nicht notwendig aus $\mathfrak{J}_n^0$ sind. Entsprechend sei bezüglich (b) $D_B \sim B$ und $D_Y \sim Y^1$ mit $D_B + D_Y = D$. Mit der Transitivität der Relation $\sim$ folgt $D_B \sim Y_B^2$, so daß sich mit dem Additionssatz (Ad) $C + D_B + D_Y \sim Y_C^2 + Y_B^2 + Y^1$ bzw. $C + D \sim Y^1 + Y^2$ ergibt.

Der Beweis von Satz 3 erfolgt nun durch vollständige Induktion nach der Dimension n des Raumes R_n:

1. Der Fall $n = 1$ ist trivial; es reicht aus, als Funktional Φ lediglich die Längenfunktion heranzuziehen.
2. Satz 3 sei richtig für alle Dimensionen $\leqq n - 1$.
3. Zum Nachweis der Gültigkeit von Satz 3 im R_n wird zunächst die folgende schwächere Aussage bewiesen.

Hilfssatz 2. $A \in \mathfrak{J}_n \wedge Y \in \mathfrak{J}_n^0 \wedge \Phi(A) = \Phi(Y)$ *für alle* $\Phi \rightarrow A \sim Y$.

Beweis. Sei $A = X_1 + \cdots + X_k$ eine Darstellung von A als Summe von Intervallen $X_i \in \mathfrak{J}_n^0$. Dann soll der Beweis von Hilfssatz 2 durch Induktion über die Anzahl der Summanden von A geführt werden:

a) $k = 1$ bedeutet $A = X_1 \in \mathfrak{J}_n^0$. Daß aber für zwei Intervalle X_1 und Y aus der Gleichheit der Funktionale Φ bzw. Φ_0 ihre Zerlegungsgleichheit folgt, liefert gerade das Ergebnis von Hadwiger, welches auch folgendermaßen formuliert werden kann: Zwei Intervalle X und Y mit den Kantenlängen a_i und b_i sind dann und nur dann zerlegungsgleich, wenn $a_i/b_i = r_i$ (rational) und $r_1 \cdots r_k = 1$ ist ([1], S. 36).
b) Hilfssatz 2 sei richtig für alle Intervallpolyeder A, die sich als Summe von weniger als k Intervallen darstellen lassen.
c) Sei jetzt $A = X_1 + \cdots + X_k$ und $\Phi(A) = \Phi(Y)$ bzw. mit (2.6) $\sum_1^k \Phi_0(X_i) = \Phi_0(Y)$. Mit (2.3) wird also

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{\tau_1} \cdots \sum_{\tau_n} c(\tau_1, \ldots, \tau_n)\, p_{\tau_1}(a_1^i) \cdots p_{\tau_n}(a_n^i) = \sum_{\tau_1} \cdots \sum_{\tau_n} c(\tau_1, \ldots, \tau_n)\, p_{\tau_1}(b_1) \cdots p_{\tau_n}(b_n), \tag{3.1}$$

wenn $a_1^i, \ldots, a_n^i$ die Kantenlängen des Intervalls X_i und $b_1, \ldots, b_n$ die Kantenlängen von Y sind. Mit $c(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \omega_{\tau_1} \cdots \omega_{\tau_n}$ ergibt sich aus (3.1) $\sum_{i=1}^k a_1^i \cdots a_n^i = b_1 \cdots b_n$, also die Inhaltsgleichheit $V(A) = V(Y)$ der Polyeder A und Y. Nun wird

$$c(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \begin{cases} \bar{c}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) & \text{für } \tau_i = \sigma_i \ (i = 1, \ldots, n) \wedge p_{\sigma_n}(b_n) = s, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gesetzt, wo s eine von Null verschiedene rationale Zahl und $\bar{c}$ eine beliebig wählbare reellwertige Funktion aller $(n-1)$-Tupel von Indizes aus Ξ ist. Damit ergibt sich aus $\Phi(A) = \Phi(Y)$

$$\sum_{i=1}^{k} \bar{c}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})\, p_{\sigma_1}(a_1^i) \cdots p_{\sigma_n}(a_n^i) = \bar{c}(\ldots)\, p_{\sigma_1}(b_1) \cdots p_{\sigma_n}(b_n). \tag{3.2}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $p_{\sigma_n}(a_n{}^i) = s_i \neq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, l$ mit $l \leqq k$, so daß sich (3.2) aufschreiben läßt als

$$\sum_{i=1}^{l} \bar{c}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})\, p_{\sigma_1}(a_1{}^i) \cdots p_{\sigma_{n-1}}(a_{n-1}^i) \cdot s_i = \bar{c}(\ldots)\, p_{\sigma_1}(b_1) \cdots p_{\sigma_{n-1}}(b_{n-1}) \cdot s.$$

Mit $s_i/s = r_i$ (rational) und (2.5) wird daraus

$$\sum_{i=1}^{l} \bar{c}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})\, p_{\sigma_1}(r_i a_1{}^i) p_{\sigma_2}(a_2{}^i) \cdots p_{\sigma_{n-1}}(a_{n-1}^i) = \bar{c}(\ldots)\, p_{\sigma_1}(b_1) \cdots p_{\sigma_{n-1}}(b_{n-1}) \tag{3.3}$$

für alle $[\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}]$.
Nun werden Intervalle $\overline{X}_i$ mit Kantenlängen $\bar{a}_1{}^i, \ldots, \bar{a}_n{}^i$ betrachtet, wobei $\bar{a}_1{}^i = |r_i| \cdot a_1{}^i$, $\bar{a}_j{}^i = a_j{}^i$ für $j = 2, 3, \ldots, n-1$ und $\bar{a}_n{}^i = |1/r_i| \cdot a_n{}^i$ gilt. Mit dem Induktionsbeginn a) ergibt sich also $X_i \sim \overline{X}_i$ $(i = 1, \ldots, l)$, nach dem Additionssatz (Ad) ist also

$$A \sim \overline{X}_1 + \cdots + \overline{X}_l + X_{l+1} + \cdots + X_k. \tag{3.4}$$

O.B.d.A. sei in (3.3) $r_i > 0$ für $i = 1, \ldots, m$ $(m \leqq l)$, dann geht (3.3) mit den neuen Bezeichnungen über in

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{c}(\ldots)\, p_{\sigma_1}(\bar{a}_1{}^i) \cdots p_{\sigma_{n-1}}(\bar{a}_{n-1}^i) = \sum_{i=m+1}^{l} \bar{c}(\ldots)\, p_{\sigma_1}(\bar{a}_1{}^i) \cdots p_{\sigma_{n-1}}(\bar{a}_{n-1}^i)$$
$$+ \bar{c}(\ldots)\, p_{\sigma_1}(b_1) \cdots p_{\sigma_{n-1}}(b_{n-1})$$

bzw. nach Summation über alle möglichen $(n-1)$-Tupel $[\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}]$ in

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} \sum_{\sigma_1} \cdots \sum_{\sigma_{n-1}} \bar{c}(\ldots)\, p_{\sigma_1}(\bar{a}_1{}^i) \cdots p_{\sigma_{n-1}}(\bar{a}_{n-1}^i) \\ &= \sum_{i=m+1}^{l} \sum_{\sigma_1} \cdots \sum_{\sigma_{n-1}} \bar{c}(\ldots)\, p_{\sigma_1}(\bar{a}_1{}^i) \cdots p_{\sigma_{n-1}}(\bar{a}_{n-1}^i) \\ &\quad + \sum_{\sigma_1} \cdots \sum_{\sigma_{n-1}} \bar{c}(\ldots)\, p_{\sigma_1}(b_1) \cdots p_{\sigma_{n-1}}(b_{n-1}). \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Durch das Symbol $\overline{X}_i = (Z_i, \bar{a}_n{}^i)$ $(i = 1, \ldots, l)$ bzw. $Y = (Z, b_n)$ soll angedeutet werden, daß das Intervall $\overline{X}_i$ durch ein $(n-1)$-dimensionales Intervall $Z_i \in \mathfrak{J}_{n-1}^0$ und die Kante $\bar{a}_n{}^i$ erzeugt wird (analog für Y). Nach eventuellen Translationen der $\overline{X}_i$ ist erreichbar, daß alle Z_i $(i = 1, \ldots, l)$ und Z in einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene E_{n-1} des R_n liegen; dann bedeutet (3.5) aber $\sum_1^m \Phi_0(Z_i) = \sum_{m+1}^l \Phi_0(Z_i) + \Phi_0(Z)$ und somit nach der Induktionsannahme 2

$$\sum_1^m Z_i \sim \sum_{m+1}^l Z_i + Z. \tag{3.6}$$

O.B.d.A. gelte nun $\min\,\{\bar{a}_n{}^i : 1 \leqq i \leqq l\} = \bar{a}_n{}^1 = t$. Dann werde die folgende Zerlegung der Intervalle $\overline{X}_i$ bzw. Y durch Schnitte parallel zu E_{n-1} vorgenommen:

$$\overline{X}_i = X_i{}^1 + X_i{}^2 \text{ mit } X_i{}^1 = (Z_i, t),\ X_i{}^2 = \begin{cases} (Z_i, \bar{a}_n{}^i - t) & \text{für } \bar{a}_n{}^i > t, \\ \emptyset & \text{für } \bar{a}_n{}^i = t \end{cases}$$

und

$$Y = Y^1 + Y^2 \text{ mit } Y^1 = (Z, t),\ Y^2 = (Z, b_n - t).$$

Aus (3.6) folgt damit

$$\sum_1^m X_i^1 \sim \sum_{m+1}^l X_i^1 + Y^1. \tag{3.7}$$

Nach Satz 2 muß also

$$\Phi\left(\sum_1^m X_i^1\right) = \Phi(Y^1) + \Phi\left(\sum_{m+1}^l X_i^1\right) \tag{3.8}$$

gelten. Aus (3.4) und der Voraussetzung $\Phi(A) = \Phi(Y)$ folgt ebenfalls mit Satz 2

$$\Phi(A) = \Phi\left(\sum_1^k X_i\right) = \Phi\left(\sum_1^l \overline{X}_i + \sum_{l+1}^k X_i\right) = \Phi(Y)$$

bzw. unter Beachtung von (2.8) und $X_1^2 = \emptyset$

$$\Phi\left(\sum_1^m X_i^1\right) + \Phi\left(\sum_2^m X_i^2\right) + \Phi\left(\sum_{m+1}^l \overline{X}_i\right) + \Phi\left(\sum_{l+m}^k X_i\right) = \Phi(Y^1) + \Phi(Y^2).$$

Von dieser Gleichung wird die sich aus (3.8) ergebende Beziehung

$$\Phi\left(\sum_1^m X_i^1\right) - \Phi\left(\sum_{m+1}^l X_i^1\right) = \Phi(Y^1)$$

subtrahiert; das liefert

$$\Phi\left(\sum_2^m X_i^2 + \sum_{m+1}^l X_i^1 + \sum_{m+1}^l \overline{X}_i + \sum_{l+1}^k X_i\right) = \Phi(Y^2). \tag{3.9}$$

Mit $\overline{\overline{X}}_i = (Z_i, \bar{a}_n^i + t)$ $(i = m+1, \ldots, l)$ wird nach eventueller Verschiebung der X_i^1

$$\sum_{m+1}^l \overline{\overline{X}}_i \sim \sum_{m+1}^l X_i^1 + \sum_{m+1}^l \overline{X}_i,$$

woraus mit Satz 2 und (3.9)

$$\Phi\left(\sum_2^m X_i^2 + \sum_{m+1}^l \overline{\overline{X}}_i + \sum_{l+1}^k X_i\right) = \Phi(Y^2) \tag{3.10}$$

folgt. In (3.10) sind links höchstens $k-1$ Intervalle als Summanden enthalten, nach der Induktionsannahme b) gilt also

$$\sum_2^m X_i^2 + \sum_{m+1}^l \overline{\overline{X}}_i + \sum_{l+1}^k X_i \sim Y^2$$

bzw.

$$\sum_2^m X_i^2 + \sum_{m+1}^l X_i^1 + \sum_{m+1}^l \overline{X}_i + \sum_{l+1}^k X_i \sim Y^2. \tag{3.11}$$

Mit der vereinfachten Bezeichnung $\sum_{m+1}^l X_i^1 = B$, $\sum_1^m X_i^1 = D$ und $\sum_2^m X_i^2 + \sum_{m+1}^{l} \overline{X}_i + \sum_{l+1}^k X_i = C$ gehen (3.11) und (3.7) über in $B + C \sim Y^2$ bzw. $D \sim B + Y^1$, woraus mit Hilfssatz 1 folgt $C + D \sim Y^1 + Y^2$ oder ausführlich

$$\sum_1^m X_i^1 + \sum_2^m X_i^2 + \sum_{m+1}^l \overline{X}_i + \sum_{l+1}^k X_i \sim Y,$$

also $\sum_1^l \overline{X}_i + \sum_{l+1}^k X_i \sim X$ bzw. mit (3.4) $A \sim Y$, womit der Hilfssatz 2 bewiesen ist. Nun läßt sich der Induktionsschritt 3 beim Beweis von Satz 3 leicht im allgemeinen Fall ausführen. Sei dazu

$$A = \sum_1^k X_i, \quad B = \sum_1^l Y_i \quad \text{mit} \quad X_i, Y_i \in \mathfrak{J}_n^0 \quad \text{und} \quad \Phi(A) = \Phi(B).$$

Wie oben ergibt sich daraus die Inhaltsgleichheit $V(A) = V(B)$. Mit $A = X_1 + A_0$ muß es also möglich sein, $B\,(= B_1 + B_0)$ so zu zerlegen, daß $B_0 \sim A_0$ wird, also $\Phi(B_0) = \Phi(A_0)$, woraus mit $\Phi(A) = \Phi(B)$ folgt $\Phi(X_1) = \Phi(B_1)$. Damit sind aber die Voraussetzungen von Hilfssatz 2 gegeben ($X_1 \in \mathfrak{J}_n^0$), so daß auch $X_1 \sim B_1$ wird und somit unter Beachtung von (Ad) $A \sim B$, womit Satz 3 endgültig bewiesen ist.

Zu Satz 3 ergibt sich als Korollar der folgende

Subtraktionssatz. $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathfrak{J}_n \wedge A_1 + B_1 \sim A_2 + B_2 \wedge B_1 \sim B_2 \rightarrow \rightarrow A_1 \sim A_2$.

Beweis. Mit Satz 2 muß gelten $\Phi(A_1 + B_1) = \Phi(A_2 + B_2)$ und $\Phi(B_1) = \Phi(B_2)$. Unter Beachtung der Additivität (2.8) des Funktionals Φ ergibt sich durch Subtraktion dieser Gleichungen $\Phi(A_1) = \Phi(A_2)$ und daraus mit Satz 3 sofort $A_1 \sim A_2$, was zu beweisen war.

LITERATUR

[1] HADWIGER, H.: Über addierbare Intervallfunktionale. Tôhoku Math. J. (II) *4* (1952) 33—37.

[2] HAMEL, G.: Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Math. Ann. *60* (1905) 459—462.

[3] HERTEL, E.: Über Intervallpolygone. Wiss. Z. Univ. Jena, Math.-Nat. Reihe, *18* (1969) 299—303.

Manuskripteingang: 5. 10. 1970

VERFASSER:

EIKE HERTEL, Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena