Über die h_1-Bedingung in der idealtheoretischen Multiplizitätstheorie

JÜRGEN STÜCKRAD und WOLFGANG VOGEL

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

Auf der Akademie-Tagung „Über neuere Probleme der Algebra und Zahlentheorie" in Berlin 1962 formulierte W. VOGEL das folgende Problem:

Sei $R =: K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein Polynomring in den $n + 1$ Unbestimmten $x_0, \ldots, x_n$ über einem beliebigen Körper K. Es sei $\mathfrak{a}$ ein d-dimensionales homogenes Ideal und F eine Form in R. $H(t, \mathfrak{a})$ bezeichne die Hilbert-Funktion von $\mathfrak{a}$, d. h.

$$H(t, \mathfrak{a}) = h_0(\mathfrak{a}) \cdot \binom{t}{d} + h_1(\mathfrak{a}) \cdot \binom{t}{d-1} + \cdots + h_d(\mathfrak{a}),$$

wobei $h_0(\mathfrak{a}) > 0$, $h_1(\mathfrak{a}), \ldots, h_d(\mathfrak{a})$ ganzrationale Zahlen sind und d die Dimension von $\mathfrak{a}$ ist (siehe [4]).

Die Frage ist, ob der folgende Satz gilt:

Satz. *Sei* $\dim(\mathfrak{a}, F) = d - 1$. *Wenn* $h_1(\mathfrak{a}) = h_1(\mathfrak{a}:F)$, *dann ist* F *in keinem zu* $\mathfrak{a}$ *gehörigen* $(d - 1)$*-dimensionalen Primideal enthalten.*

Bisher konnte dieses Problem noch nicht vollständig gelöst werden (siehe [2, 6, 9]). In der Zwischenzeit wurden in [1] mehrere Ergebnisse mit Methoden der homologischen Algebra für die idealtheoretische Multiplizitätstheorie hergeleitet. Mit einem dieser Resultate kann nun der Beweis des Satzes geliefert werden. Wir geben dann noch einige Folgerungen, die von selbständigem Interesse sind.

Beweis des Satzes. $\mathfrak{a}$ habe folgende Primärzerlegung:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s \cap \mathfrak{q}_{s+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t \cap \mathfrak{r},$$

wobei $\mathfrak{q}_i$ $\mathfrak{p}_i$-primär für $i = 1, \ldots, t$ mit $\dim \mathfrak{q}_i = d$ für $i = 1, \ldots, s$ und $\dim \mathfrak{q}_j = d - 1$ für $j = s + 1, \ldots, t$ ist. $\mathfrak{r}$ bezeichne den Durchschnitt der übrigen Primärkomponenten von $\mathfrak{a}$, also $\dim \mathfrak{r} \leqq d - 2$. Analog sei

$$(\mathfrak{a}, F) = \mathfrak{q}_1' \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r' \cap \mathfrak{r}',$$

wobei $\mathfrak{q}_i'$ $\mathfrak{p}_i'$-primär und $\dim \mathfrak{q}_i' = d - 1$ für $i = 1, \ldots, r$ ist und $\dim \mathfrak{r} \leqq d - 2$. Da nach Voraussetzung $h_1(\mathfrak{a}) = h_1(\mathfrak{a}:F)$ ist, folgt nach [8], Satz 2, die Gültigkeit des Bezoutschen Satzes (im Sinne von [4]): $h_0(\mathfrak{a}, F) = h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(F)$. Daher folgt in diesem speziellen Fall ($\varrho = 1$) aus dem Korollar 2 zu Satz 3 in [1], daß F in keinem $\mathfrak{p}_k$ ($1 \leqq k \leqq t$) enthalten ist, für das ein $\mathfrak{p}_j'$ ($1 \leqq j \leqq r$) derart existiert, daß $\mathfrak{p}_k \subseteqq \mathfrak{p}_j'$ ist. Hiermit zeigen wir nun, daß unter den Voraussetzungen des Satzes

$$\mathfrak{p}_j' \neq \mathfrak{p}_i \text{ für alle } j = 1, \ldots, r \text{ und } i = s + 1, \ldots, t$$

gilt. Angenommen, wir hätten $\mathfrak{p}_j = \mathfrak{p}_i$ für ein gewisses j und i. Dann ist $F \in \mathfrak{p}_i$ wegen $(\mathfrak{a}, F) \subseteqq p_j'$. Nach der obigen Bemerkung ist dies ein Widerspruch, weil der Bezoutsche Satz gilt.

Wir beweisen nun die Aussage des Satzes.
Angenommen, es gilt $F \in \mathfrak{p}_i$ mit $s + 1 \leqq i \leqq t$. Dann betrachten wir

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{p}_i} \supset \mathfrak{p}_i \cdot R_{\mathfrak{p}_i} \supseteqq (\mathfrak{a}, F) \cdot R_{\mathfrak{p}_i} &= \mathfrak{q}_1' \cdot R_{\mathfrak{p}_i} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r' \cdot R_{\mathfrak{p}_i} \cap \mathfrak{r}' \cdot R_{\mathfrak{p}_i} \\ &= R_{\mathfrak{p}_i} \cap \cdots \cap R_{\mathfrak{p}_i} \cap R_{\mathfrak{p}_i} = R_{\mathfrak{p}_i}, \end{aligned}$$

da $\mathfrak{q}_j'$ für alle $j = 1, \ldots, r$ und $\mathfrak{r}'$ nicht in $\mathfrak{p}_i$ enthalten sind; Widerspruch, q. e. d.

Korrolar 1. *Es sei $\mathfrak{a}$ wie oben und $\mathfrak{b} = (F_1, \ldots, F_\varrho)$ ein homogenes Ideal in R mit $\dim(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = d - \varrho$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) $h_1(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_j) = h_1\big((\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_j):F_{j+1}\big)$ *für alle* $j = 0, \ldots, \varrho - 1$ $\big((\mathfrak{a}, F_0) =: \mathfrak{a}\big)$.

(ii) F_{j+1} *ist in keinem* $(d - j - 1)$*-dimensionalen Primideal enthalten, das zu* $(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_j)$ *für alle* $j = 0, \ldots, \varrho - 1$ *gehört.*

Beweis. Satz und [4], 143.3.

Korollar 2. *Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ wie in Korollar* 1. *Dann haben wir: Der Bezoutsche Satz* $h_0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = h_0(\mathfrak{a}) \cdot h_0(\mathfrak{b})$ *gilt genau dann, wenn die Bedingung* (ii) *des Korollars* 1 *erfüllt ist.*

Beweis. Korollar 1 und Satz 2 in [8].

Für ein weiteres Korollar geben wir die folgenden Bezeichnungen:
Das Ideal $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ möge folgende Primärzerlegung besitzen:

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s \cap R(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$

wobei die $\mathfrak{q}_i$ $\mathfrak{p}_i$-primär und die höchstdimensionalen zu $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ gehörigen Primärkomponenten sind, und $R(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ bezeichne den Durchschnitt der übrigen Komponenten. A_v bezeichne den regulären lokalen Ring $R_{\mathfrak{p}_v}$ für alle $v = 1, \ldots, s$. Ferner sei $\mathfrak{a}_v =: A_v \cdot \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_v =: A_v \cdot \mathfrak{b}$.
Die Primärkomponente $\mathfrak{q}_v$ habe die idealtheoretische Multiplizität μ_v im Sinne von W. GRÖBNER [4], 127.16., S. 88–89.

$$\chi^{A_v}(A_v/\mathfrak{a}_v, A_v/\mathfrak{b}_v) =: \sum_{i \geqq 0} (-1)^i L\big(\mathrm{Tor}_i^{A_v}(A_v/\mathfrak{a}_v, A_v/\mathfrak{b}_v)\big)$$

bezeichne die Schnittmultiplizität im Sinne von J.-P. SERRE [7], S. V–12, da A_v ein regulärer lokaler Ring ist, und es liegt der charakteristikgleiche Fall vor.
Sei ferner A ein noetherscher lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{m}$-primär. Wenn $M \neq 0$ ein A-Modul vom endlichen Typ ist, dann wollen wir das Hilbert-

Samuelsche Polynom $L(M/\mathfrak{q}^{n+1} \cdot M)$ für genügend großes n wie folgt aufschreiben:

$$L(M/\mathfrak{q}^{n+1} \cdot M) = e_0 \cdot \binom{n+d}{d} - e_1 \cdot \binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d \cdot e_d,$$

wobei $d = \dim_A M$ und e_i ganzrationale Zahlen sind, und dafür schreiben wir $e_i = e_i(\mathfrak{q}, M)$ (siehe z. B. [7]).

Korollar 3. *Seien* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *wie in Korollar* 1. *Die folgenden Bedingungen sind dann äquivalent:*

(i) F_{j+1} *ist in keinem* $(d - j - 1)$*-dimensionalen Primideal enthalten, das zu* $(\mathfrak{a}, F_1, \ldots, F_j)$ *für alle* $j = 0, \ldots, \varrho - 1$ *gehört.*

(ii) F_{j+1} *ist kein Nullteiler in* $A_v/(\mathfrak{a}_v, F_1, \ldots, F_j) \cdot A_v$ *für alle* $j = 0, \ldots, \varrho - 1$ *und* $v = 1, \ldots, s$.

(iii) $\mathrm{Tor}_i^{A_v}(A_v/\mathfrak{a}_v, A_v/\mathfrak{b}_v) = 0$ *für* $i \geqq 1$ *und für alle* $v = 1, \ldots, s$.

(iv) $\mu_v = \chi^{A_v}(A_v/\mathfrak{a}_v, A_v/\mathfrak{b}_v)$ *für alle* $v = 1, \ldots, s$.

Wenn $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *Primideale sind, dann implizieren diese äquivalenten Bedingungen*

(v) $\qquad e_1(\mathfrak{q}_v, A_v/\mathfrak{a}_v) = 0$ *für alle* $v = 1, \ldots, s$.

Beweis. Nach Korollar 2 und Satz 1 in [5] sind (i) und (iv) äquivalent.
Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{b} = (F_1, \ldots, F_\varrho)$ ein Ideal der Hauptklasse ϱ, und daher bilden die Elemente $F_1, \ldots, F_\varrho$ eine A_v-Folge. Nach [7], chap. IV, folgt nun, daß der Koszulkomplex $K^{A_v}(F_1, \ldots, F_\varrho)$ eine freie Auflösung von $N =: A_v/(F_1, \ldots, F_\varrho) \cdot A_v$ bildet, also

$$0 \to K_\varrho(F) \to \cdots \to K_1(F) \to N \to 0$$

mit $F =: (F_1, \ldots, F_\varrho)$. Daraus folgt für die i-te Homologiegruppe des Komplexes $K(F, A_v/\mathfrak{a}_v)$

$$\mathrm{Tor}_i^{A_v}(A_v/\mathfrak{a}_v, A_v/\mathfrak{b}_v) \cong H_i(F, A_v/\mathfrak{a}_v).$$

Nach [7], Prop. 3, S. IV—5, sind damit (iii) und (ii) äquivalent.
(i) und (ii) sind nach Korollar 1 und Satz 3 in [1] äquivalent.
Da aus diesen äquivalenten Bedingungen die Gültigkeit des Bezoutschen Satzes folgt, ergibt sich nach [1], Satz 2, daß $A_v/\mathfrak{a}_v$ ein Cohen-Macaulay-Modul über A_v ist. Hieraus folgt nach [1], Satz 5, (vi),

$$\mu_v = e_0(\mathfrak{q}_v, A_v/\mathfrak{a}_v).$$

Diese Gleichheit ist nach [3], Th. 2.1, mit der Bedingung (v) äquivalent, aber unter der generellen Voraussetzung, daß $A_v/\mathfrak{a}_v$ ein Cohen-Macaulay-Modul ist, q.e.d.

Für geometrische Anwendungen beachte man den Fall $j = s = 1$, insbesondere (v), z. B. im Zusammenhang mit Cor. 4.3. in [3].

Abschließend wollen wir darauf hinweisen, daß der Satz im folgenden Sinn verallgemeinert werden kann.
Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ d-dimensionale homogene Ideale in R. Sie heißen unvergleichbar, wenn weder $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ noch $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ gilt; dafür schreiben wir kurz $\mathfrak{a} \,||\, \mathfrak{b}$.

$\mathfrak{a}^{d-k}$ bezeichne den Durchschnitt der d-, $(d-1)$-, ..., $(d-k)$-dimensionalen Primärkomponenten, die zu $\mathfrak{a}$ gehören, d. h. $\mathfrak{g}_{n-d-k}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^{d-k}$, wobei $\mathfrak{g}_i(\mathfrak{a})$ das i-te Grundideal ist (siehe z. B. [6]). Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich dann der weitere

Satz. *Wenn* $h_i(\mathfrak{a}) = h_i(\mathfrak{b})$ *für alle* $i = 0,1, \ldots, k$, *dann gilt*

$$\mathfrak{a}^{d-k} = \mathfrak{b}^{d-k} \text{ oder } \mathfrak{a}^{d-k} \,||\, \mathfrak{b}^{d-k}.$$

Einen Beweis wird J. STÜCKRAD in seiner Dissertation liefern.

LITERATUR

[1] BUDACH, L., und W. VOGEL: Cohen-Macaulay-Moduln und der Bezoutsche Satz. Monatsh. Math. *73* (1969) 97—111.
[2] FIEDLER, H.-W.: Über Projektionen von Veroneseschen Idealen und den Bezoutschen Satz. Diplomarbeit Universität Halle, Sektion Math. 1966.
[3] FILLMORE, J. P.: On the Coefficients of the Hilbert-Samuel Polynomial. Math. Z. *97* (1967) 212—228.
[4] GRÖBNER, W.: Moderne algebraische Geometrie. Die Idealtheoretischen Grundlagen. Springer-Verlag, Wien—Innsbruck 1949.
[5] HERRMANN, M., und W. VOGEL: Bemerkungen zur Multiplizitätstheorie von Gröbner und Serre. J. Reine Angew. Math. *241* (1970) 42—46.
[6] RENSCHUCH, B.: Verallgemeinerungen des Bezoutschen Satzes. S.-B. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl., *107*, Nr. 4 (1966).
[7] SERRE, J.-P.: Algèbre locale. Multiplicités. Lecture Notes Math. 11, Springer-Verlag, Berlin—New York 1965.
[8] VOGEL, W.: Grenzen für die Gültigkeit des Bezoutschen Satzes. Monatsber. Dt. Akad. Wiss. Berlin *8* (1966) 1—7.
[9] VOGEL, W.: Zur Theorie der charakteristischen Hilbertfunktion in homogenen Ringen über Ringen mit Vielfachkettensatz. Math. Nachr. *33* (1967) 39—60.

Manuskripteingang: 2. 10. 1970

VERFASSER:

JÜRGEN STÜCKRAD und WOLFGANG VOGEL, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg