Werk

Titel: Gitterpunkte auf Kugeln im R2l

Autor: Maier, W.

Jahr: 1971

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0001|log13

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Gitterpunkte auf Kugeln im R_{2l}

WILHELM MAIER

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

Die Abzählung von Gitterpunkten in EUKLIDS R_{2l}, soweit diese auf Überkugeln des Halbmessers $n^{1/2}$ liegen, benötigt die Anzahlen $r_{2l}(n)$ von Lösungen der unbestimmten Gleichung

$$g_1^2 + g_2^2 + \cdots + g_{2l}^2 \doteqdot n, \quad g_\lambda \equiv 0(1);\ \lambda, l, n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Eine Zurückführung der zahlentheoretischen Funktionen $r_{2l}(n)$ auf ähnliche Funktionen mit kleineren Parametern gelingt z. B. durch Beanspruchung von Teilerpotenzsummen, wie sie bei Gitterpunktzählung längs Hyperbeln sich anbieten. Die Hilfsmittel der analytischen Zahlentheorie erlauben, die Bestimmung von $r_{2l}(n)$ für beide Restklassen $l(\mathrm{mod}\ 2)$ ungefähr mit gleichem Aufwand zu erledigen. Bei Unterscheidung von $l(\mathrm{mod}\ 4)$ freilich sah sich BULYGIN [1] veranlaßt, aus dem Ring der rationalen Zahlen herauszutreten und mit $g_1 + ig_2 \in P(i)$ ganze rationale Zahlen zweiten Grades heranzuziehen. Wir verfolgen BULYGINS Ansatz zunächst für $l = 4k + 2,\ k = 0, 1, 2, \ldots$, und erklären verallgemeinerte Teilerpotenzsummen

$$\sigma_{1,3;4}(m, l) \doteqdot \sum_{t/m}^{t\equiv 1(4)} t^l - \sum_{t/m}^{t\equiv 3(4)} t^l \tag{2}$$

sowie mit ergänzenden Teilern

$$\sigma^{1,3;4}(m, l) \doteqdot \sum^{m/t\equiv 1(4)} t^l - \sum^{m/t\equiv 3(4)} t^l. \tag{2'}$$

Dann gilt bekanntlich nach JACOBI

$$r_2(n) = 4\sigma_{1,3;4}(n, 0), \qquad r_6(n) = 4\sigma^{1,3;4}(2n, 2) - 4\sigma_{1,3;4}(n, 2).$$

Neben der von EULER durch

$$1 + \frac{1}{\cos u} \doteqdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^{2m}}{(2m)!} E_m, \qquad |u| < \frac{\pi}{2},$$

erklärten Folge natürlicher Zahlen E_m sind in Anschluß an BULYGIN gewisse arithmetische Funktionen

$$r_{k,l}(n) = \sum_{g_1^8+\cdots+g_k^8=n} (g_1 + ig_2)^{4l}, \quad k-1, l+1, n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

einzuführen, so daß $r_{k,0}(n) = r_k(n)$ auf die in (1) benutzte Anzahlfunktion zurückfällt. BULYGINS Ergebnis

$$E_k r_{4k+2}(n) = 4\sigma^{1,3;4}(2n, 2k) + 4(-1)^k \sigma_{1,3;4}(n, 2k) + \sum_{h=1}^{[k/2]} E_{k,h}\, r_{4k+2-8h,h}(n),$$
$$n, k+1 = 1, 2, \ldots; E_{k,h} \equiv 0\ (1), \tag{4}$$

enthält als Anfangswerte $E_{2,1} = 1$, $E_{3,1} = 728$, $E_{4,2} = -64$. Bei festem k und $n > n_0(k)$ gibt das Wachstum der Teilerfunktionen

$$\sigma_{1,3;4}(n, 2k) = O(n^{2k}) \tag{5}$$

Anlaß, eine entsprechende Abschätzung auch für die $r_{k,h}(n)$ ausfindig zu machen. Die Theorie der Modulformen, wie sie in den Arbeiten von E. HECKE, H. PETERSSON u. a. vorliegt (vgl. [5]), zeigt in der Tat für BULYGINS Funktionen mit $\varepsilon > 0$

$$\sum_{h=1}^{[k/2]} E_{k,h}\, r_{4k+2-8h,h}(n) = O\left(n^{k+\frac{1}{4}+\varepsilon}\right) \tag{5'}$$

ein schwächeres Wachstum.
Da eine selbständige Theorie der $r_{k,h}(n)$ bisher noch nicht gegeben wurde, empfiehlt es sich, entsprechend dem Ansatz von TOPARKUS [6], BULYGINS Funktionen auf Teilerpotenzen zurückzuführen. Wegen (5), (5') kann in (4) aus $r_{4k+2}(n)$ ein für wachsende n entscheidender Hauptteil

$$\varrho_{4k+2}(n) = \frac{4}{E_k}\{\sigma^{1,3;4}(2n, 2k) + (-1)^k \sigma_{1,3;4}(n, 2k)\};\ n, k+1 = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

abgespalten werden. Die verbleibende Differenz

$$r_{4k+2} - \varrho_{4k+2} = \frac{1}{E_k} \sum_{h=1}^{[k/2]} E_{k,h}\, r_{4k+2-8h,h}(n)$$

erweist sich gegenüber (6) in n zuletzt als von kleinerer Größenordnung. Wird nun aus der Theorie der Gitterfunktionen (vgl. [4], Kap. II) die Darstellung durch eine Teilbruchreihe

$$H\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z & \omega \end{pmatrix}; s\Big) = \sum_{g}^{g<\infty} \sum_{h=0}^{\infty} e(x_1 g + x_2 h)(z + g + \omega h)^{-s} \tag{7}$$

der Funktion des Halbgitters eingeführt, so kann H als eine in s ganze Funktion erkannt werden aus

$$H\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z & \omega \end{pmatrix}; s\Big) = \frac{(-2\pi i)^s}{\Gamma(s)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m - x_1)^{s-1} e(zm - x_1 m)}{1 - e(x_2 - \omega x_1 + \omega m)}, \tag{7'}$$
$$0 < \mathrm{Im}(z - x_1), \mathrm{Im}(x_2 - \omega x_1), \mathrm{Im}(\omega).$$

Zur Erzeugung von Teilerpotenzsummen (2), (2′) eignen sich Sonderfälle aus (7′), wie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)^{2k} q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu} \sigma_{1,3;4}(\nu, 2k), \qquad e\left(\frac{\omega}{2}\right) \doteq q, \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{2k} q^{n}}{1+q^{2n}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu} \sigma^{1,3;4}(2\nu, 2k), \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{8'}$$

Nach (7), (8), (8′) betrachten wir besondere Halbgitterfunktionen, wie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu} \sigma_{1,3;4}(\nu, 2k) = \frac{(-1)^{k}(2k)!}{\pi^{2k+1} 2i} e\left(\frac{-\omega}{2}\right) H\left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \omega & \omega \end{matrix}; 2k+1\right),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu} \sigma^{1,3;4}(2\nu, 2k) = \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{\pi^{2k+1} 2i} H\left(\begin{matrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\omega}{2} & \omega \end{matrix}; 2k+1\right).$$

Die Ausscheidung der σ aus (6) bis (8′) gibt

$$\frac{i}{2} E_k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k)!} \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu} \varrho_{4k+2}(\nu)$$

$$= (-1)^{k+1} H\left(\begin{matrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\omega}{2} & \omega \end{matrix}; 2k+1\right) + l\left(\frac{-w}{2}\right) H\left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \omega & \omega \end{matrix}; 2k+1\right) \tag{9}$$

als erzeugende Funktion der Hauptteile $\varrho_{4k+2}(\nu)$.
Unter der weiteren Einschränkung $k = 2l+1$, $l = 0, 1, \ldots$, geht (9) über in

$$\frac{i}{2} E_{2l+1} \frac{\pi^{4l+3}}{(4l+2)!} \sum_{\lambda=1}^{\infty} q^{\lambda} \varrho_{8l+6}(\lambda) = H\left(\begin{matrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\omega}{2} & \frac{\omega}{2} \end{matrix}; 4l+3\right) + e\left(\frac{-\omega}{2}\right) H\left(\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \omega & \omega \end{matrix}; 4l+3\right). \tag{9'}$$

Neben die Teilerpotenzsummen (2), (2′) stelle man ferner

$$\sigma^{1,2}(m, k) \doteq \sum^{m/t \equiv 1(2)} t^{k}. \tag{10}$$

Die zugehörige Erzeugende ist nach (7′)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} e\left(\frac{\nu\omega+\nu}{2}\right) \sigma^{1,2}(2\nu, 4j-1) = 2^{4j-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4j-1} e\left(\frac{n\omega+n}{2}\right)}{1-e(n\omega)}$$

$$= \frac{1}{2} \pi^{-4j} (4j-1)! H\left(\begin{matrix} 0 & 0 \\ \frac{\omega+1}{2} & \omega \end{matrix}; 4j\right)$$

Benutzt man (9′) für $l-j$, $j=1,2,\ldots,l$, und Vorfaktoren $a_\mu \neq 0$, $\mu=1,\ldots,8$,

$$a_1 \sum_{\lambda=1}^{\infty} q^\lambda \varrho_{8l-8j+6}(\lambda) = H\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\omega}{2} & \omega \end{pmatrix}; 4l-4j+3 + e\left(\frac{-\omega}{2}\right) H\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \omega & \omega \end{pmatrix}; 4l-4j+3$$

$$\doteqdot H_1 + H_2, \tag{11}$$

so empfiehlt sich als eine weitere Kürzung die Einführung von

$$\frac{1}{2}\pi^{-4j}(4j-1)!\, H\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\omega+1}{2} & \omega \end{pmatrix}; 4j \doteqdot H_3. \tag{11′}$$

Für die Modulformen

$$H_1H_3 + H_2H_3 = a_2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} q^\lambda \varrho_{8(l-j)+6}(\lambda) \sum_{\nu=1}^{\infty} (-q)^\nu \sigma^{1,2}(2\nu, 4j-1)$$

entsteht dann mit $\lambda+\nu=n$

$$(H_1+H_2)H_3 = a_2 \sum_{n=2}^{\infty} q^n \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^\nu \sigma^{1,2}(2\nu, 4j-1)\, \varrho_{8l-8j+6}(n-\nu),$$

$$a_2H_3 + (H_1+H_2)H_3 = a_2 \sum_{n=2}^{\infty} q^n \sum_{\nu=1}^{n} \cdots, \qquad \varrho_m(0) \doteqdot 0,$$

$$= a_2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu \sigma^{1,2}(2\nu, 4j-1)\, \varrho_{8l-8j+6}(n-\nu)$$

$$\doteqdot f_j(\omega), \qquad j=1,\ldots,l. \tag{11″}$$

Es gilt nun, bei festem l das System der f_j auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen. Dazu genügt es, das Näherungsverhalten der f_j für $\mathrm{Re}(\omega)=\frac{p}{d}$, $(p,d)=1$, genauer zu untersuchen. Man kann die Parameter x_1, x_2 aus H_1, H_2 für $0<\mathrm{Im}z, \mathrm{Im}\omega$ ausscheiden vermöge der aus (7) fließenden Identitäten

$$H\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ z & \omega \end{pmatrix}; s = H\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 2\omega \end{pmatrix}; s - H\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z+\omega & 2\omega \end{pmatrix}; s,$$

$$2^s H\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ z & \omega \end{pmatrix}; s = H\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{z}{2} & \frac{\omega}{2} \end{pmatrix}; s - H\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{z+1}{2} & \frac{\omega}{2} \end{pmatrix}; s.$$

Alle Bestandteile von (11) erhält man so mit $s \doteqdot 4(l-j)+3$

$$H\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\omega}{2} & \omega \end{pmatrix}; 4l-4j+3 = H\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\omega}{2} & 2\omega \end{pmatrix}; 4l-4j+3 - H\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{3\omega}{2} & 2\omega \end{pmatrix}; 4l-4j+3, \tag{12}$$

$$2^{4l-4j+3} H\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \omega & \omega \end{pmatrix}; 4l-4j+3\Bigg)$$
$$= H\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\omega}{2} & \frac{\omega}{2} \end{pmatrix}; 4l-4j+3\Bigg) - H\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\omega+1}{2} & \frac{\omega}{2} \end{pmatrix}; 4l-4j+3\Bigg). \tag{12'}$$

Zur Umformung der rechts in (12, 12') erscheinenden Halbebenenfunktionen erinnern wir an eine dem linearen Halbgitter zugehörige, von M. Lerch [3] eingeführte, in x, a, s analytische Transzendente. Die Reihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+a)^{-s} e(xl) \doteqdot \Phi(x, a, s), \tag{13}$$
$$0 \leqq \operatorname{Im} x, \quad 0 < a \leqq 1, \quad 1 < \operatorname{Re} s,$$

fällt für $x = 0$ zurück auf eine von A. Hurwitz untersuchte, in s meromorphe Funktion; es gilt nämlich

$$\Phi(0, a, s) \doteqdot \zeta(s, a) = \frac{1}{s-1} + O(1), \quad s \to 1. \tag{13'}$$

Für $0 < x < 1$ entsteht andererseits eine in s ganze Transzendente. Um

$$H\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta + w\alpha & w \end{pmatrix}; s\Bigg) \doteqdot [\alpha, \beta, w, s] \tag{14}$$

in der Nähe von Randpunkten $w = \frac{p}{d}$ darzustellen, sei als Ortsveränderliche

$$2\pi i\left(\frac{p}{d} - w\right) \doteqdot \varepsilon \tag{14'}$$

eingeführt. Nach H. J. Glaeske [2] gilt dann im Bereich $0 < \alpha < 1$, $0 \leqq \beta < 1$

$$i^{s+1}\, \Gamma(s)\, (2\pi q)^{1-s}\, [\alpha, \beta, w; s]$$
$$= \int_{(s+1)} \frac{du\, \Gamma(u)}{(d^2\varepsilon)^u} \sum_{\lambda=0}^{d-1} \zeta\left(u, \frac{\lambda+\alpha}{d}\right) \sum_{\nu=1}^{d} e\left\{\nu\left(\beta + \frac{p\lambda + p\alpha}{d}\right)\right\} \cdot \Phi\left(\alpha p + \beta d, \frac{\nu}{d}, u+1-s\right). \tag{14''}$$

Für

$$4l - 4j + 3 \doteqdot s, \quad a_3(l, j, d) \doteqdot a_3 \neq 0, \quad w \doteqdot \frac{\omega}{2} \tag{15}$$

entsteht damit vermöge (11), (12'), (14), (14')

$$H_2(\omega) = a\left\{\left[1, 0, \frac{\omega}{2}\right] - \left[1, \frac{1}{2}, \frac{\omega}{2}, s\right]\right\}. \tag{15'}$$

Unter den rationalen Randpunkten soll die mit $\omega = \frac{1}{2}$ vorliegende einfachste Möglichkeit weiterhin benutzt werden. Es folgt $w = \frac{1}{4}$, also $p = 1$, $d = 4$ und beide-

male in (15') $\alpha + 4\beta \equiv 0(1)$. Im Integranden (14'') ist für $u \to s$ die $\sum_{\lambda,\nu}$ auszuführen, und liefert

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \zeta\left(u, \frac{\lambda+1}{4}\right) \sum_{\nu=1}^{4} \Phi\left(1, \frac{\nu}{4}, u+1-s\right)\left\{e\left[\frac{\omega}{4}(\lambda+1)\right] - e\left[\frac{\nu}{4}(\lambda+3)\right]\right\}. \tag{16}$$

Wird in (14'') der Integrationsweg nach links verschoben, etwa nach $\operatorname{Re} u = s - l$, so ergeben in (16) die Zeiger $\lambda = 1, 3$ als Residuum der Stelle $u = s$ mit $a_4(l, j, d) \doteq a_4 \neq 0$ nach (15'), (16)

$$H_2(\omega) = a_4 \varepsilon^{-s}\left\{\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) - \zeta(s, 1)\right\} + O(\varepsilon^{1-s}) \tag{16'}$$

Weiterhin entsteht aus (11), (12), (15'') für $2\omega \doteq w = 1, p = d = 1, \alpha = \frac{1}{4}$ bzw. $\frac{3}{4}$, $\beta = 0$ immer $\alpha p + \beta d \not\equiv 0\ (1)$. Bei $u = s$ liefert Φ deshalb in (14'') kein Residuum, so daß an Stelle von (16)'

$$H_1(\omega) = a_5 \varepsilon^{-1} + O(1)$$

tritt; dies ist für $s = 4(l - j) + 3$ von kleinerer Größenordnung, und so wird mit (16')

$$H_2(\omega) + H_1(\omega) = a_6 \varepsilon^{-s}\left\{\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) - \zeta(s, 1)\right\} + O(\varepsilon^{1-s}). \tag{16''}$$

Es ist jetzt noch H_3 zu bilden. Entsprechend (11') wird $p = 1, d = 2, \beta = 0, \alpha = \frac{1}{2}$. Auch hier bleibt $p\alpha + d\beta \not\equiv 0\ (1)$ und somit $\Phi(1) = O(1)$;

$$H_3(\omega) = a_7 \varepsilon^{-1} + O(1), \quad a_7 \neq 0. \tag{16'''}$$

Mit $a_6 a_7 = a_8$ können die in (11'') konstruierten Modulformen nun auf lineare Abhängigkeit geprüft werden. Die für kleine ε geltende Näherung

$$f_j(\omega) = a_8 \varepsilon^{-s-1}\left\{\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) - \zeta(s, 1)\right\} + O(\varepsilon^{-s}), \tag{17}$$

$$s = 4(l - j) + 3, \quad j = 1, 2, \ldots, l,$$

zeigt mit $\varepsilon \to 0$ die lineare Unabhängigkeit des Systems der f_j zunächst für die untersuchte Restklasse

$$2k \equiv 6 \pmod 8$$

in (9). An Stelle der von BULYGIN gegebenen Darstellung von $r_{2l}(n)$, welche neue Funktionen, wie die in (3) erklärten $r_{h,l}(n)$ enthielt, genügt es jetzt, die Kenntnis von Teilerpotenzsummen vorauszusetzen. So gilt etwa

$$r_{18}(n) = \varrho_{18}(n) + \frac{32552}{27 \cdot 77} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu+1} \sigma^{1,2}(2\nu, 3)\, \varrho_{10}(n - \nu)$$

$$+ \frac{11}{810} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu} \sigma^{1,2}(2\nu, 7)\, \varrho_2(n - \nu).$$

Um alle vier Restklassen $2k = p \pmod 8$ mit $p = 2, 4, 6, 8$ auf entsprechende Weise zu behandeln, sind nur geringfügige Abwandlungen im Beweisgang nötig. Der bisher kürzeste Zugang zu (4) läuft über L. KRONECKERS Transzendente $s\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ & z \end{pmatrix}$ (vgl. [4], Kap. II), wobei für die durch $p = 2, 6$ bestimmten Restklassen mit

$$s\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ & z + \frac{1}{2} \end{pmatrix} + is\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ & zi + \frac{\omega}{2} \end{pmatrix}$$

eine dem Parallelogrammgitter der z-Ebene verfremdete meromorphe Funktion ins Spiel kommt. Die mit $p = 4, 8$ entstehenden Restklassen benötigen Funktionen zweiter Ordnung als analytischen Unterbau, nämlich

$$s^2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ & z + \frac{1}{2} \end{pmatrix} - s^2\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ & zi + \frac{\omega}{2} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

um in sämtlichen Fällen ein System unabhängiger Modulformen

$$f_j(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} e\left(\frac{\omega n}{2}\right) \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu \sigma^{1,2}(2\nu, 4j - 1)\, \varrho_{8(l-j)+p}(n - \nu) \tag{18'}$$

konstruieren zu können. An Stelle der Folge $\{E_k\}$ von Eulerschen Zahlen sind die Beiwerte $\{D_l\}$ aus

$$1 + \tan^2 z = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{2l}}{(2l)!} D_l, \qquad |z| < \frac{\pi}{2},$$

einzuführen, und man setze zur Abkürzung

$$4\sigma^{1,2}(2n, 2k - 1) + 4(-1)^k \sigma_{2,3;4}(n, 2k - 1) \doteqdot D_{k-1}\, \varrho_{4k}(n), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

BULYGINS Ergebnis kann in diesem Fall mit ganz rationalen $D_{k,g}$ durch

$$D_{k-1} r_{4k}(n) = D_{k-1} \varrho_{4k}(n) - \sum_{g=1}^{[(k-1)/2]} D_{k,g}\, r_{4k-8g,g}(n)$$

wiedergegeben werden. Das Näherungsverhalten der Modulformen (18') bei rationalen Randpunkten zeigt auch im gegenwärtigen Fall die lineare Unabhängigkeit der $f_j(\omega)$ und führt dementsprechend zur Möglichkeit der Ausscheidung der neuen Funktionen $r_{g,l}(n)$, an deren Stelle die besser bekannten Teilerpotenzsummen treten. Als typisches Beispiel erwähnen wir den Fall $k = 5$ und erhalten hier

$$r_{20}(n) = \varrho_{20}(n) + \frac{2614}{15 \cdot 31} \sum_{\nu=1}^{n} \sigma^{1,2}(2\nu, 3)\, \varrho_{12}(n - \nu)$$
$$- \frac{19}{15 \cdot 31} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu \sigma^{1,2}(2\nu, 7)\, \varrho_4(n - 7).$$

LITERATUR

[1] BULYGIN, W.: Sur une application des fonctions elliptiques. Bull. Acad. Imp. Sci. St. Pétersbourg (6) *8* (1914).
[2] GLAESKE, H.-J.: Funktionalgleichungen von Gitterfunktionen. Math. Nachr. *32* (1966) 95—105.
[3] LERCH, M.: Note sur la fonction $\Re(\omega, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} e(xk)\,(\omega + k)^{-s}$. Acta Math. *11* (1887), 19—24.
[4] MAIER, W., und H. KIESEWETTER: Funktionalgleichungen mit analytischen Lösungen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971, S. 136.
[5] RANKIN, R. A.: On the representation of ... squares. Acta Arithm. *7* (1962) 399—407.
[6] TOPARKUS, H.: Quadratsummen und ihre analytischen Erzeugenden. Dissertation Universität Jena (unveröffentlicht).

Manuskripteingang: 2. 10. 1970

VERFASSER:

WILHELM MAIER, Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena