Werk

Titel: Perfekte Ideale und Vektormoduln über noetherschen Ringen

Autor: EISENREICH, G.

Jahr: 1971

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0001|log12

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Perfekte Ideale und Vektormoduln über noetherschen Ringen

GÜNTHER EISENREICH

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

1. Wir wollen im folgenden zeigen, daß sich die in [1] bewiesenen Zusammenhänge zwischen Perfektheit und Syzygienkette (Dualitätssatz, Umkehrbarkeit der Syzygienkette) von Idealen und Vektormoduln über Polynomringen und regulären Stellenringen weitgehend auf beliebige (kommutative) noethersche Ringe (mit Einselement) verallgemeinern lassen, wenn man einen geeigneten Perfektheitsbegriff zugrunde legt.

Mit den Bezeichnungen schließen wir uns an die Arbeiten [1, 4] an. A sei durchweg ein noetherscher Ring. Die sukzessiven Syzygienmatrizen eines (k-reihigen) Vektormoduls $\mathfrak{a}$ über A (der aus k-reihigen Vektoren mit Komponenten aus A besteht) werden mit $\beta^0, \beta^1, \ldots$ bezeichnet, wobei insbesondere die Zeilenvektoren von β^0 eine Basis von $\mathfrak{a}$ bilden sollen. $\Delta(\mathfrak{a})$ („Diagonalideal") sei das Ideal aller $\alpha \in A$ mit $\alpha \cdot A^{(k)} \subset \mathfrak{a}$ ($A^{(k)}$ direkte Summe von k Exemplaren A) oder, was auf dasselbe hinausläuft, der Annulator des Restklassenmoduls $A^{(k)}/\mathfrak{a}$.

2. Nach REES [8, 9] verstehen wir unter einem *allgemeinen Ideal* (general ideal) der Höhe g ein Ideal der Höhe g, das eine aus g Elementen $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ bestehende Basis besitzt, für die

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}) : (\alpha_i) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}) \text{ für } i = 1, \ldots, g$$

ist, also ein spezielles Hauptklassenideal. Die Syzygienkette eines solchen Ideals hat dieselbe Bauart wie die eines Ideals der Hauptklasse in einem Polynomring oder regulären Stellenring (vgl. [6], Nr. 22, oder [7]); sie bricht also mit der Matrix β^{g-1} ab, die nur aus einer Zeile besteht, welche die mit gewissen Vorzeichen versehenen α_i enthält, und spiegelt man alle Syzygienmatrizen und betrachtet sie in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man wiederum eine Syzygienkette (vgl. [6], Nr. 24).

In Anlehnung an eine Definition von REES sagen wir, der Vektormodul $\mathfrak{a}$ habe den *Grad* (grade) g, wenn $\Delta(\mathfrak{a})$ ein allgemeines Ideal der Höhe g, aber keines von größerer

Höhe enthält.[1]) Offensichtlich gilt stets

$$\text{Grad } \mathfrak{a} \leqq \text{Höhe } \mathfrak{a}.$$

Für jedes zu $\mathfrak{a}$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}$ ist trivialerweise Grad $\mathfrak{p} \geqq$ Grad $\mathfrak{a}$, und daher besteht wie in [1], Nr. 76, zwischen homologischer Dimension und Grad die Ungleichung

$$\text{hd } \mathfrak{a} \geqq \text{Grad } \mathfrak{p} - 1 \geqq \text{Grad } \mathfrak{a} - 1.$$

$\mathfrak{a}$ heiße *perfekt*, wenn in dieser Ungleichung das Gleichheitszeichen gilt, also

$$\text{hd } \mathfrak{a} = \text{Grad } \mathfrak{a} - 1$$

ist. Ein perfekter Vektormodul ist also notwendig dem Grad nach ungemischt, im Fall eines U-Rings sogar schlechthin (d. h. der Höhe nach) ungemischt.

3. Die Syzygienkette $\beta^0, \beta^1, \ldots, \beta^l$ heiße *umkehrbar*, wenn jeder Spaltenvektor β mit Elementen aus A, für den $\beta^{i+1}\beta = 0$ ist, bereits Linearkombination der Spalten von β^i mit Koeffizienten aus A ist. Wir wollen dann auch sagen, die Matrizen $\beta^l, \beta^{l-1}, \ldots$ bilden eine *rechtsseitige Syzygienkette* von β^l.

Wichtiges Beweishilfsmittel für die Umkehrbarkeit von Syzygienketten ist folgender Hilfssatz aus [1], Nr. 73, dessen Beweis in einem beliebigen noetherschen Ring gültig bleibt:

Ist $\mathfrak{a}$ ein k-reihiger Vektormodul mit den Syzygienmatrizen β^t, so gibt es zu jedem $\alpha \in \Delta(\mathfrak{a})$ und jedem t Matrizen η_t mit Elementen aus A, so daß

$$\eta_t \beta^t + \beta^{t-1}\eta_{t-1} = \alpha \cdot E$$

gilt, wo E eine Einheitsmatrix entsprechender Reihenzahl bedeutet. (In den Grenzfällen sind nichtdefinierte η-Matrizen durch 0 zu ersetzen.)
Insbesondere kann es im Fall eines Vektormoduls $\mathfrak{a}$ vom Grad $\geqq 1$ keine nichttriviale Relation $\beta^0\beta = 0$ mit einem Spaltenvektor β geben, denn hieraus würde $\alpha \cdot \beta = 0$ folgen, wo α Erzeugende eines in $\Delta(\mathfrak{a})$ enthaltenen allgemeinen Ideals, also Nichtnullteiler ist.

4. Damit können wir beweisen: *$\mathfrak{a}$ sei Vektormodul über A mit Grad $\mathfrak{a} = g \geqq 1$. Dann ist der Teil $\beta^0, \beta^1, \ldots, \beta^{g-1}$ der Syzygienkette von $\mathfrak{a}$ umkehrbar.*

Beweis. Von Interesse ist nur der Fall $g \geqq 2$. Es sei $\beta^{t+1}\beta = 0$ $(t \leqq g - 2)$. Wegen Grad $\mathfrak{a} = g$ enthält $\Delta(\mathfrak{a})$ ein allgemeines Ideal $\mathfrak{b}$ der Höhe g, das von den Elementen $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ erzeugt werden möge. Nach Nr. 3 gibt es Matrizen η_{ji} mit

$$\eta_{t+1,i}\, \beta^{t+1} + \beta^t \eta_{ti} = \alpha_i \cdot E,$$

wo E eine Einheitsmatrix passender Reihenzahl ist. Multiplikation dieser Gleichung mit β führt für $t \geqq 0$ auf

$$\alpha_i \beta = \beta^t \eta_{ti} \beta. \qquad (*)$$

(Für $t + 1 = 0$ muß ohnehin $\beta = 0$ sein.)

[1]) Um den Anschluß an die Reessche Definition zu gewinnen, wäre statt des k-reihigen Vektormoduls $\mathfrak{a}$ der Restklassenmodul $A^{(k)}/\mathfrak{a}$ zu betrachten. Für den Zusammenhang mit der homologischen Algebra vgl. REES [8, 9]. Man beachte, daß REES in [9] mit einem Wert der homologischen Dimension arbeitet, der um Eins größer als der von uns mit hd bezeichnete ist.

I. Wir betrachten zunächst den Fall $t = 0$. Dann folgt insbesondere

$$\beta^0(\eta_{02}\alpha_1 - \eta_{01}\alpha_2)\beta = 0,$$

durch Multiplikation mit η_{0i} wegen $\eta_{0i}\beta^0 = \alpha_i \cdot E$ also

$$\alpha_i(\eta_{02}\alpha_1 - \eta_{01}\alpha_2)\,\beta = 0$$

und somit, da α_i nicht Nullteiler ist,

$$(\eta_{02}\beta)\alpha_1 = (\eta_{01}\beta)\alpha_2.$$

Da α_1, α_2 ein allgemeines Ideal erzeugen, ist mithin

$$\eta_{01}\beta = \eta\alpha_1,$$

$$\eta_{02}\beta = \eta\alpha_2$$

mit einer Matrix η mit Elementen aus A. Die demnach aus (*) resultierende Gleichung $\alpha_1\beta = \beta^0\eta\alpha_1$ zieht dann mit $\beta = \beta^0\eta$ die Behauptung nach sich.

II. Wir führen den weiteren Beweis durch Induktion nach t, nehmen also an, die Syzygienkette $\beta^0, \beta^1, \ldots, \beta^t$ $(t \geqq 1)$ sei umkehrbar, und beweisen hieraus für $t + 1 \leqq g - 1$ die Umkehrbarkeit von $\beta^0, \beta^1, \ldots, \beta^t, \beta^{t+1}$. Gleichung (*) besagt für den Fall, daß β nicht bereits Linearkombination der Spalten von β^t ist, daß zu dem von diesen Spalten erzeugten Vektormodul ein Primideal mit einem Grad $\geqq g$ gehört. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung ist $\beta^t, \beta^{t-1}, \ldots, \beta^0$ eine rechtsseitige Syzygienkette hiervon, die mit β^0 abbricht, was zum Widerspruch führt, da die Länge einer solchen Kette mindestens gleich $g - 1$ sein muß. Damit ist alles bewiesen.

5. Korollar. *Ist* $\mathfrak{a}$ *perfekter Vektormodul über* A, *so ist seine Syzygienkette umkehrbar.*

In der Tat bricht dann nämlich die Syzygienkette von $\mathfrak{a}$ mit der Matrix β^{g-1} mit $g = \operatorname{Grad}\mathfrak{a}$ ab (genauer: β^{g-1} gehört zu einem projektiven Modul).

Auch sonst soll, wenn von der Umkehrbarkeit einer Syzygienkette gesprochen wird, diese Kette nur so weit betrachtet werden, bis zum ersten Mal ein projektiver Modul auftritt.

6. Wie in [1], Nr. 96, sieht man, daß jeder A-Homomorphismus eines k'-reihigen A-Moduls $\mathfrak{a}'$ der homologischen Dimension $\geqq 1$ mit umkehrbarer Syzygienkette in einen k-reihigen A-Modul $\mathfrak{a}$ durch eine Zuordnung der Form

$$\beta'^0 \to \beta'^0 C_0 = C_1\beta^0$$

gegeben wird, wo C_0 und C_1 geeignete Matrizen mit Elementen aus A sind, und umgekehrt definiert jedes Paar von Matrizen C_0, C_1, das dieser Gleichung genügt, einen A-Homomorphismus von $\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{a}$. (β^0 und β'^0 bezeichnen dabei je eine nullte Syzygienmatrix von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{a}'$.) Die Menge dieser A-Homomorphismen bildet einen A-Modul $\operatorname{Hom}(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})$, während die Menge der „trivialen" Homomorphismen, für die die Zeilen von C bereits in $\mathfrak{a}$ liegen, einen A-Untermodul $\operatorname{Hom}(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})_0$ hiervon bilden.
Unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ die gleiche homologische Dimension besitzen und $\dot{\mathfrak{a}}$, $\dot{\mathfrak{a}}'$ die von den (als Zeilen geschriebenen) Spalten einer letzten Syzygienmatrix von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{a}'$ erzeugten A-Moduln bezeichnen, haben wir in [1], Nr. 97, die Isomorphie

$$\operatorname{Hom}(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})/\operatorname{Hom}(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})_0 \cong \operatorname{Hom}(\dot{\mathfrak{a}}, \dot{\mathfrak{a}}')/\operatorname{Hom}(\dot{\mathfrak{a}}, \dot{\mathfrak{a}}')_0$$

bewiesen.

Wir wollen dies anwenden, um eine Umkehrung von Nr. 5 zu beweisen:

7. *Ist die Syzygienkette des Vektormoduls* $\mathfrak{a}$ *umkehrbar und* Grad $\mathfrak{a} \geqq 1$, *so ist* $\mathfrak{a}$ *perfekt.*

Beweis. I. Es sei Grad $\mathfrak{a} = g$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ Basis eines allgemeinen Ideals $\mathfrak{b}$ der Höhe g, das in $\Delta(a)$ enthalten ist. Wir zeigen zunächst, daß es einen Spaltenvektor β mit Elementen aus $\mathfrak{b}$ gibt, der wohl in dem von den Spalten von β^0 erzeugten Modul $\mathfrak{a}^{\mathsf{T}}$, aber nicht in $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}^{\mathsf{T}}$ liegt.
Dazu sei $\mathfrak{b} = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ die Primärzerlegung von $\mathfrak{b}$ in Primärideale des Grads g, und die Numerierung sei so gewählt, daß das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}$ zugleich Primideal von $\mathfrak{a}$ ist. Da der $\mathfrak{p}$-Rang von β^0 kleiner als k ist, können wir nicht durchweg in $\mathfrak{p}$ liegende Koeffizienten γ_i finden, so daß die Linearkombination

$$\gamma_1 \beta_1^0 + \cdots + \gamma_k \beta_k^0 = \beta'$$

der Spalten β_i^0 von β^0 ein Vektor ist, dessen Elemente in $\mathfrak{p}$ liegen. Indem wir bei $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ nötigenfalls mit einem $p \in \mathfrak{p}$ mit $p \notin \mathfrak{q}$ multiplizieren (bei $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ sei $p = 1$), können wir erreichen, daß alle Elemente von $p\beta'$ in $\mathfrak{q}$ enthalten sind. Multiplizieren wir schließlich noch mit einem nicht zu $\mathfrak{p}$ gehörigen $p' \in \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$, so erhalten wir in $\beta = pp'\beta'$ einen Vektor der gewünschten Art. Dieser Vektor liegt in der Tat nicht schon in $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}^{\mathsf{T}}$, weil wegen $g \geqq 1$ die Darstellung von β

$$\beta = \gamma_1 pp' \beta_1^0 + \cdots + \gamma_k pp' \beta_k^0$$

eindeutig ist (vgl. die Bemerkung zum Schluß von Nr. 3), aber nicht sämtliche Koeffizienten in $\mathfrak{b}$ enthalten sind.

II. Wir wenden jetzt die Isomorphie von Nr. 6 an, indem wir den dortigen Modul $\mathfrak{a}$ mit dem von den Spalten von β^{g-1} erzeugten Modul $\mathfrak{a}'$ und den dortigen Modul $\mathfrak{a}'$ mit dem Ideal $\mathfrak{b}(= \dot{\mathfrak{b}})$ identifizieren; dem dortigen Modul $\dot{\mathfrak{a}}$ entspricht dann der Modul $\mathfrak{a}^{\mathsf{T}}$. Nach dem unter *I.* Bewiesenen ist somit $\mathfrak{a}' : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}'$; es gibt also einen Spaltenvektor β', der nicht selbst, aber dessen α_i-faches $(i = 1, \ldots, g)$ aus den Spalten von β^{g-1} linear kombinierbar ist. Wäre $\mathfrak{a}$ nicht perfekt, würde also die Syzygienkette nicht mit β^{g-1} abbrechen, so müßte, da α_i nicht Nullteiler ist, indessen $\beta^g \beta' = 0$ gelten, was der Umkehrbarkeit der Syzygienkette widerspricht. Damit ist alles bewiesen.

8. Wie in [1], Nr. 20, wollen wir zwei Vektormoduln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ *äquivalent* nennen $(\mathfrak{a} \sim \mathfrak{a}')$, wenn es — als Vektormoduln aufgefaßte — direkte Summen $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus A \oplus \cdots \oplus A$ und $\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}' \oplus A \oplus \cdots \oplus A$ sowie Matrizen C und C' mit Elementen aus A gibt, so daß die Abbildung $b \to b \cdot C$ $(b \in \mathfrak{b})$ einen Isomorphismus von $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{b}'$ und die Abbildung $\mathfrak{b}' \to b'C'$ $(b' \in \mathfrak{b}')$ den hierzu inversen Isomorphismus von $\mathfrak{b}'$ auf $\mathfrak{b}$ bewirkt.
Ist A Stellenring mit dem maximalen Primideal $\mathfrak{P}$, so werde unter der $\mathfrak{P}$-*Länge* $l_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ die maximale Länge l einer $\mathfrak{a}$ mit $\bar{\mathfrak{a}} = \lim_{\nu \to \infty} \mathfrak{a} : \mathfrak{P}^\nu$ verbindenden echten Teilerkette

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_{l-1} \subset \mathfrak{a}_l = \bar{\mathfrak{a}}$$

verstanden; im Fall eines Primideals $\mathfrak{P}$ eines beliebigen Ringes A sei $l_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a})$ die $\mathfrak{P}$-Länge des von $\mathfrak{a}$ in der Lokalisierung $A_{\mathfrak{P}}$ von A erzeugten Moduls. Diese Definition steht mit der in [1] gegebenen in Einklang; insbesondere ist $l_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}) = \left(\frac{\mathfrak{a}}{\bar{\mathfrak{a}}}\right)$. Man schließt dann leicht aus der Definition der Äquivalenz, daß äquivalente Moduln dieselbe $\mathfrak{P}$-Länge besitzen. (Sollte $\mathfrak{a}$ Primärmodul zum Primideal $\mathfrak{P}$ sein, so ist natürlich $\bar{\mathfrak{a}} = A^{(k)}$.)

9. Einem Vektormodul $\mathfrak{a}$ mit $g = \text{Grad } \mathfrak{a} \geqq 1$ werde als *quasidualer Modul* $\mathring{\mathfrak{a}}$ der von den (als Zeilen geschriebenen) Spalten der Syzygienmatrix β^{g-1} von $\mathfrak{a}$ erzeugte Vektormodul zugeordnet. Dieser Vektormodul ist bis auf Äquivalenz bestimmt. Ferner gilt:

Ist $\mathfrak{a}$ Vektormodul eines Stellenrings S und primär zum maximalen Primideal $\mathfrak{P}$ von S und dabei Höhe $\mathfrak{a} = \text{Grad } \mathfrak{a} = g \geqq 1$, so ist die $\mathfrak{P}$-Länge von $\mathfrak{a}$ gleich der $\mathfrak{P}$-Länge von $\mathring{\mathfrak{a}}$.

Beweis. I. Die $\mathfrak{P}$-Länge ist stets endlich. Wir zeigen zunächst, daß im Fall $g \geqq 2$ aus $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, $\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right) = 1$ die Beziehung $l_{\mathfrak{P}}(\mathring{\mathfrak{b}}) = l_{\mathfrak{P}}(\mathring{\mathfrak{a}}) + m$ folgt, wo m die $\mathfrak{P}$-Länge von $\mathfrak{P}$ ist. Es ist sicher $\text{Grad } \mathfrak{b} = \text{Grad } \mathfrak{a}$. Bezeichnen wir die Syzygienmatrizen von $\mathfrak{a}$ mit β, die von $\mathfrak{b}$ mit β' und die von $\mathfrak{P}$ mit $\overline{\beta}$, so folgt wie in [4], Nr. 4 III, daß β'^{g-1} im Fall $g > 2$ in der Form

$$\beta'^{g-1} = \begin{pmatrix} \overline{\beta}^{g-1} & 0 \\ \gamma_{g-1} & \beta^{g-1} \end{pmatrix}$$

wählbar ist mit Matrizen γ mit $\gamma_{g-1}\overline{\beta}^{g-2} + \beta^{g-1}\gamma_{g-2} = 0$. In derselben Weise wie in [4] schließt man hieraus, daß $l_{\mathfrak{P}}(\mathring{\mathfrak{b}}) = l_{\mathfrak{P}}(\mathring{\mathfrak{a}}) + l_{\mathfrak{P}}(\mathring{\mathfrak{P}})$ ist, und dieses Ergebnis gilt auch noch im Fall $g = 2$, in dem die Form der oben angegebenen Matrix geringfügig zu modifizieren ist (vgl. [4], Gl. (+)).

II. Hieraus folgt (zunächst im Fall $g \geqq 2$), daß stets $l_{\mathfrak{P}}(\mathring{\mathfrak{a}}) = m \cdot l_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a})$ ist, und wir haben zu zeigen, daß $m = 1$ ist. Nun enthält $\mathfrak{P}$ nach Voraussetzung ein allgemeines Ideal $\mathfrak{b}$ mit $\text{Grad } \mathfrak{b} = \text{Höhe } \mathfrak{P} = g$ und endlicher Kettenlänge $\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{P}}\right)$, es ist also auch $l_{\mathfrak{P}}(\mathring{\mathfrak{b}}) = m \cdot l_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{b})$. Andererseits ist $\mathfrak{b}$ perfekt, $\text{hd } \mathfrak{b} = \text{Grad } \mathfrak{b} - 1$ und daher $\dot{\mathfrak{b}} = \mathring{\mathfrak{b}}$; $\mathfrak{b}$ ist aber selbstdual ($\dot{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}$). Daher muß $m = 1$ sein.

III. Um dieses Ergebnis auch noch im Fall $g = 1$ zu beweisen, wenden wir einen Kunstgriff an. Wir gehen von S zu dem Polynomring $R = S[x]$ über, in dem $\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P} \cdot R + x \cdot R$ ein Primideal mit Höhe $\overline{\mathfrak{P}} = \text{Grad } \overline{\mathfrak{P}} = 2$ darstellt. Dem k-reihigen Vektormodul $\mathfrak{a}$ mit $\text{Grad } \mathfrak{a} = 1$ werde der Modul $\overline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \cdot R + x \cdot R^{(k)}$ mit $\text{Grad } \overline{\mathfrak{a}} = 2$ zugeordnet.

Bezeichnen wir jetzt die zu $\overline{\mathfrak{a}}$ gehörigen Syzygienmatrizen durch Überstreichen, so gilt

$$\overline{\beta}^0 = \begin{pmatrix} x \\ \beta^0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{\beta}^1 = \begin{pmatrix} \beta^0 & -x \cdot E \\ 0 & \beta^1 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist die $\overline{\mathfrak{P}}$-Länge von $\overline{\mathfrak{a}}$ gleich der $\mathfrak{P}$-Länge von $\mathfrak{a}$, und nach II. gilt somit $l_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathring{\overline{\mathfrak{a}}}) = l_{\overline{\mathfrak{P}}}(\overline{\mathfrak{a}}) = l_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a})$.

Es ist aber auch $l_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathring{\overline{\mathfrak{a}}}) = l_{\mathfrak{P}}(\mathring{\mathfrak{a}})$. Ist nämlich

$$\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{b}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{b}_l \text{ mit } l = l_{\mathfrak{P}}(\mathring{\mathfrak{a}})$$

eine feine unverkürzbare S-Modulkette, wobei $\mathfrak{b}_0$ der von den Spalten von β^0 aufgespannte S-Modul und

$$\mathfrak{b}_{i+1} = \mathfrak{b}_i + \beta_{i+1} \cdot S, \qquad \beta_{i+1} \notin \mathfrak{b}_i, \qquad \beta_{i+1} \cdot \mathfrak{P} \subset \mathfrak{b}_i$$

mit einem Spaltenvektor β_i ist, so erhält man hieraus eine feine unverkürzbare R-Modulkette

$$\overline{\mathfrak{b}}_0 \subset \overline{\mathfrak{b}}_1 \subset \cdots \subset \overline{\mathfrak{b}}_l$$

mit

$$\overline{\mathfrak{b}}_{i+1} = \overline{\mathfrak{b}}_i + \overline{\beta}_{i+1} \cdot R, \quad \overline{\beta}_{i+1} \notin \overline{\mathfrak{b}}_i, \quad \overline{\beta}_{i+1} \cdot \overline{\mathfrak{P}} \subset \overline{\mathfrak{b}}_i,$$

indem man unter $\overline{\mathfrak{b}}_0$ den von den Spalten der Matrix $\overline{\beta}^1$ aufgespannten Vektormodul versteht und sinngemäß $\overline{\beta}_i = \left(\frac{\beta_i}{0}\right)$ setzt.

Die Unverkürzbarkeit dieser Kette ist unmittelbar klar; wir haben zu zeigen, daß sie fein ist. Dazu bedarf nur die Inklusion $\overline{\beta}_{i+1} \cdot x \in \overline{\mathfrak{b}}_i$ eines Beweises. Ist u Erzeugende eines in $\mathfrak{P}$ enthaltenen allgemeinen Ideals der Höhe 1, so ist $u^i \beta_{i+1} \in \mathfrak{b}_0$, es ist also $u^i \beta^1 \beta_{i+1} = 0$ und daher auch $\beta^1 \beta_{i+1} = 0$. Es ist also in der Tat

$$x \cdot \overline{\beta}^{i+1} = \overline{\beta}^1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta^{i+1} \end{pmatrix}.$$

Die angegebene Modulkette läßt sich auch nicht nach oben verlängern. Anderenfalls müßte es nämlich noch einen Spaltenvektor $\overline{\beta}_{l+1}$ der Form $\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ geben mit $\overline{\beta}_{l+1} \notin \overline{\mathfrak{b}}_l$, $\overline{\beta}_{l+1} \cdot \overline{\mathfrak{P}} \subset \overline{\mathfrak{b}}_l$. Insbesondere wäre dann

$$\overline{\beta}_{l+1} \cdot x u^l = \begin{pmatrix} \beta^0 & -x \cdot E \\ 0 & \beta^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^0 \gamma - x \cdot \delta \\ \beta^1 \delta \end{pmatrix},$$

also $\beta^0 \gamma = x \cdot \delta$ und daher $\delta = \beta^0 \gamma'$ mit einer Matrix γ', woraus $\beta^1 \delta = \beta^1 \beta^0 \gamma' = 0$ und damit auch $\beta = 0$ folgt im Widerspruch zur Voraussetzung. (Wir hätten uns auch mit der Ungleichung $l_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}) \geqq l_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a})$ begnügen und dann wie in *II.* weiterschließen können.)
Damit ist alles bewiesen.

10. Indem wir wie in [1] die (schwachen) Syzygienketten von $\mathfrak{a}$ stets so wählen, daß sie mit der Matrix β^l ($l = \operatorname{hd} \mathfrak{a}$) abbrechen (was bei $\operatorname{hd} \mathfrak{a} = 1$ stets möglich ist [[1], Nr. 71], während wir im Fall $\operatorname{hd} \mathfrak{a} = 0$ und eines beliebigen Ringes nötigenfalls $\mathfrak{a}$ durch einen äquivalenten Modul ersetzen müssen), können wir daher wie in [1], Nr. 92, schließen:

Jedem k-reihigen A-Vektormodul $\mathfrak{a}$ *mit* $\operatorname{Grad} \mathfrak{a} \geqq 1$ *und mit endlicher homologischer Dimension läßt sich bis auf Äquivalenz eindeutig ein k-reihiger A-Modul* $\dot{\mathfrak{a}}$ *mit* $\operatorname{Grad} \dot{\mathfrak{a}} \geqq 1$ *zuordnen, der von den Zeilen der transponierten Matrix einer letzten Syzygienmatrix* β^l *von* $\mathfrak{a}$ *erzeugt wird. Diese Abbildung ist genau dann involutorisch,*

$$\ddot{\mathfrak{a}} \sim \mathfrak{a},$$

wenn $\mathfrak{a}$ *perfekt ist. In diesem Fall ist auch* $\dot{\mathfrak{a}}$ *perfekt,* $l + 1$ *ist gleich* $\operatorname{Grad} \mathfrak{a}$, *und es gilt*

$$\operatorname{hd} \dot{\mathfrak{a}} = \operatorname{hd} \mathfrak{a}, \quad \operatorname{Grad} \dot{\mathfrak{a}} = \operatorname{Grad} \mathfrak{a}, \quad \text{Höhe } \dot{\mathfrak{a}} = \text{Höhe } \mathfrak{a}, \quad \Delta(\dot{\mathfrak{a}}) = \Delta(\mathfrak{a}).$$

Außerdem gehören dann zu $\mathfrak{a}$ *und* $\mathring{\mathfrak{a}}$ *dieselben Primideale* $\mathfrak{P}_i$, *und die* $\mathfrak{P}_i$*-Länge von* $\mathfrak{a}$ *ist gleich der* $\mathfrak{P}_i$*-Länge von* $\dot{\mathfrak{a}}$.
Die Gleichheit $\operatorname{Grad} \dot{\mathfrak{a}} = \operatorname{Grad} \mathfrak{a}$ *ist zugleich auch hinreichend für die Perfektheit von* $\mathfrak{a}$.

Dasselbe Ergebnis bleibt bestehen, wenn wir die Voraussetzung fallen lassen, die Syzygienkette so zu wählen, daß β^l einem freien Modul entspricht, wenn wir nur der Definition der Primärzerlegung eines k-reihigen Vektormoduls $\mathfrak{a}$ nicht $A^{(k)}$ als maximalen Obermodul zugrunde legen, sondern den Modul $A^{(k)'}$ der Vektoren $x \in A^{(k)}$, für

die $x \cdot \alpha \in \mathfrak{a}$ mit einem gewissen Nichtnullteiler α gilt. In diesem Sinne wäre z. B. das Diagonalideal $\Delta(\mathfrak{a})$ zu modifizieren zu $\Delta'(\mathfrak{a})$, der Menge der $\alpha \in A$ mit $\alpha \cdot A^{(k)'} \subset \mathfrak{a}$.

11. Wie in [1] oder [7] kann man beweisen:

Ist $\mathfrak{a}$ perfekter k-reihiger Vektormodul mit Grad $\mathfrak{a} = g$ *und $\alpha \in A$ prim zu $\mathfrak{a}$, so ist auch $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \alpha \cdot A^{(k)}$, falls $\neq A^{(k)}$, perfekt und* Grad $\mathfrak{b} = g + 1$, *und umgekehrt folgt aus der Perfektheit von $b = \mathfrak{a} + \alpha \cdot A^{(k)}$ mit $\alpha \in A$ prim zu $\mathfrak{a}$, $\dot{\mathfrak{a}} + \alpha \cdot A^{(\dot{k})} \neq A^{(\dot{k})}$ und* Grad $\mathfrak{b} =$ Grad $\mathfrak{a} + 1$, *daß auch $\mathfrak{a}$ perfekt ist.*
Diese Aussage läßt sich aber nicht mehr zu einer rekursiven Perfektheitsdefinition ausnutzen, da ein nulldimensionaler Modul im allgemeinen nicht perfekt zu sein braucht.

Ebenso folgt wie in [1], Nr. 83:

Es sei $\mathfrak{a}$ perfekter k-reihiger Vektormodul mit Grad $\mathfrak{a} = g$ *und perfektem Diagonalideal, $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + x \cdot A$ mit $x \in A^{(k)}$ sei von $A^{(k)}$ verschieden und habe* Grad $\mathfrak{a}' > g$. *Dann ist $\mathfrak{a}'$ perfekt und Grad $\mathfrak{a}' = g + 1$.*

12. In [1] haben wir für Polynomringe und reguläre Stellenringe und in [3] für beliebige noethersche Ringe bewiesen, daß die Anzahl μ der Erzeugenden eines k-reihigen Vektormoduls $\mathfrak{a} \neq A^{(k)}$ der Höhe h mindestens $k + h - 1$ beträgt. Vektormoduln, deren Erzeugendenzahl diese untere Schranke annimmt, haben wir als *Hauptklassenmoduln* bezeichnet und haben gezeigt, daß diese im Fall eines U-Rings stets perfekt sind.
Da allgemein $g =$ Grad $\mathfrak{a} \leqq$ Höhe $\mathfrak{a}$ ist, gilt erst recht die Ungleichung $\mu \geqq k + g - 1$. Das legt folgende Definition nahe:

Der k-reihige Vektormodul $\mathfrak{a} \neq A^{(k)}$ über dem noetherschen Ring A heiße *allgemeiner Vektormodul*, wenn er sich von

$$\mu = k + \text{Grad } \mathfrak{a} - 1$$

Elementen erzeugen läßt (Grad $\mathfrak{a} \geqq 1$ vorausgesetzt).

13. Für solche Moduln läßt sich in gleicher Weise wie in [1, 2, 3] beweisen:

Ein allgemeiner k-reihiger Vektormodul $\mathfrak{a}$ ist stets perfekt, desgleichen das ihm nach Macaulay *zugeordnete Ideal $|\mathfrak{a}|$, das von den k-reihigen Determinanten zu $\mathfrak{a}$ gehöriger Vektoren erzeugt wird.*

Wird $\mathfrak{a} \neq A^{(k)}$ von den $\mu = g + k - 1$ ($g =$ Grad $\mathfrak{a}$) Vektoren

$$a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ik}) \quad (i = 1, \ldots, \mu)$$

erzeugt, so haben in jeder Relation

$$\sum \alpha_i a_i = 0 \text{ mit } \alpha_i \in A$$

die Koeffizienten α_i die Form

$$\alpha_i = \sum_{i_1, \ldots, i_k} \alpha_{i i_1 \ldots i_k} a_{i_1 1} \cdots a_{i_k k} \text{ mit } \alpha_{i i_1 \ldots i_k} \in A,$$

wobei die $\alpha_{i i_1 \ldots i_k}$ bezüglich sämtlicher Indizes schiefsymmetrisch sind und verschwin-

den, wenn zwei Indizes gleich sind. Umgekehrt ist die letztere Aussage charakteristisch für allgemeine Vektormoduln mit Grad $\mathfrak{a} = g$.

14. Da allgemein das von den k-reihigen Unterdeterminanten der k-spaltigen Matrix

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \alpha_1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_g & \alpha_{g-1} & & \cdot \\ 0 & \alpha_g & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & & \alpha_g \end{bmatrix}$$

erzeugte Ideal gleich der k-ten Potenz des von den α_i erzeugten Ideals ist, folgt (auf andere Weise als bei REES [9]), daß *jede Potenz eines allgemeinen Ideals perfekt* und dem Grad nach ungemischt, im Fall eines U-Rings also schlechthin (d. h. der Höhe nach) ungemischt ist.

15. Wie in [5] können wir ferner für beliebige noethersche Ringe A beweisen, wenn wir statt der Höhe durchweg den Grad betrachten:

Der einem allgemeinen Vektormodul $\mathfrak{a}$ *zugeordnete p-Vektormodul* $|\mathfrak{a}|_p$, *der von den aus je p zu* $\mathfrak{a}$ *gehörigen Vektoren bildbaren p-Vektoren erzeugt wird, ist stets perfekt.*

LITERATUR

[1] EISENREICH, G.: Zur Syzygientheorie und Theorie des inversen Systems perfekter Ideale und Vektormoduln in Polynomringen und Stellenringen. S.-ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-nat. Kl., *109*, Heft 3 (1970).

[2] EISENREICH, G.: Eine charakteristische Eigenschaft von Hauptklassenmoduln. Math. Nachr. *47* (1970) 79–85.

[3] EISENREICH, G.: Verallgemeinerung eines Satzes von Macaulay. Monatsh. Math. (im Druck).

[4] EISENREICH, G.: Eine Qualitätsbeziehung zwischen s-Moduln, Math. Nachr. *34* (1967) 351 bis 359.

[5] EISENREICH, G.: p-Vektormoduln und Determinantenideale. Math. Nachr. (im Druck).

[6] EISENREICH, G.: Über Anzahlen und abgeleitete Gleichungssysteme von Idealen in Stellenringen. Nath. Nachr. *34* (1967) 327–350.

[7] GRÖBNER, W.: Moderne algebraische Geometrie. Die idealtheoretischen Grundlagen. Springer-Verlag, Wien–Innsbruck 1949.

[8] REES, D.: A theorem of homological algebra. Proc. Camb. Phil. Soc. *53* (1956) 605–610.

[9] REES, D.: The grade of an ideal or module. Proc. Camb. Phil. Soc. *53* (1956) 28–42.

Manuskripteingang: 28. 9. 1970

VERFASSER:
GÜNTHER EISENREICH, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig