Über Matrizengeometrie

Gerhard Geise

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Matrizengeometrie bedeute, die Matrizen eines festen Formats mit Elementen aus einem gegebenen Körper als Punkte eines geometrischen (affinen oder projektiven) Raumes aufzufassen und geometrische Untersuchungen dieses Raumes unter Verwendung insbesondere der über Matrizen bekannten Sätze durchzuführen; durch das (verallgemeinerte) Übertragungsprinzip von Stephanos besteht ein natürlicher Zusammenhang zu „gewöhnlichen" affinen und projektiven Räumen.
Der Begriff „Matrizengeometrie" dürfte auf Burau [5, 6][1]) zurückgehen. Wenn im folgenden — ohne Vollständigkeit anzustreben — Beiträge zur Matrizengeometrie genannt werden, dann ist das im weiteren, nicht in dem engen Sinn der Erklärung zu verstehen, da es sich oft mehr um „gewöhnliche" projektive Geometrie handelt (so bei Bertini, Horniaček, Medek, Weiss).

Bei Burau [5], S. 92, wird eine naheliegende Abbildung der projektiven $2 \cdot 2$-Matrizen — oder also der projektiven Abbildungen einer Geraden in sich — auf die Punkte eines dreidimensionalen projektiven Raumes angegeben, jedoch nur sehr kurz behandelt. Diese als *Übertragungsprinzip* von Stephanos bekannte Abbildung ist schon 1883 von C. Stephanos [24] untersucht worden, der mit ihrer Hilfe die Drehungen des euklidischen Raumes um einen festen Punkt beschreibt. [Diese Abbildung findet sich an vielen Stellen — auch der Lehrbuchliteratur — in verschiedener Gestalt (insbesondere mit Verwendung genormter Hamiltonscher Quaternionen anstelle projektiver $2 \cdot 2$-Matrizen) in den Grundzügen angegeben, so bei F. Klein [14], E. A. Weiss [25][2]), K. Kommerell [15], W. Blaschke [4], H. R. Müller [20], E. Cartan [7], H. S. M. Coxeter [8][3]). Die Stephanossche Abbildung ist von V. Medek [16, 18, 19] und

[1]) Durch Ziffern in eckigen Klammern wird auf die entsprechende Arbeit des Literaturverzeichnisses am Ende dieses Artikels verwiesen.

[2]) Weiss erwähnt die Stephanossche Abbildung merkwürdigerweise in [26] nicht, wohl aber in [25] und spricht hier von „einer interessanten Multiplikation der Bildpunkte" im P^3, die der Zusammensetzung zweier projektiver Verwandtschaften einer Geraden entspricht.

[3]) Coxeter spricht von der *Cartan-Stephanosschen Abbildung*; so auch Bachmann [1].

J. HORNIAČEK [13] sozusagen wiederentdeckt worden, sie ist in dem Vortrag [3] von S. BILINSKI enthalten und findet sich schließlich in den geometrischen Betrachtungen über den Gruppenraum einer elliptischen Bewegungsgruppe bei F. BACHMANN [1] und H. SCHÜTTE [21]. Eine durch die oben zitierte Stelle bei BURAU veranlaßte „matrizengeometrische" Fassung dieser Abbildung lief auf die Untersuchung [10] des Raumes der projektiven $2 \cdot 2$-Matrizen hinaus.

Jene Untersuchungen von G. VERONESE und C. SEGRE, die bei BERTINI [2], S. 355 bis 362, dargestellt bzw. zitiert werden (und auf die immer durch BERTINI [2] verwiesen werde; vgl. auch C. SEGRE [23]) gehören zur Geometrie der projektiven Matrizen beliebigen Formats. Sie haben in der Arbeit [22] von B. SEGRE eine Fortführung gefunden. Bei E. A. WEISS [26] findet man Beiträge zur Geometrie der projektiven $2 \cdot 2$-, $2 \cdot 3$- und $2 \cdot 4$-Matrizen. Differentialgeometrisch (-metrischer) Natur sind die Untersuchungen von E. CARTAN [7] zur Geometrie der projektiven $2 \cdot 2$- und $4 \cdot 4$-Matrizen. Die Arbeit [17] von V. MEDEK gehört zur Untersuchung der projektiven $3 \cdot 3$-Matrizen, gelangt jedoch nicht wesentlich über Aussagen hinaus, die in anderer Gestalt schon bei BERTINI [2], Nrn. 29 und 30, und BURAU (5], S. 92 ff., nachzulesen sind. Diese zuletzt erwähnte Stelle bei BURAU hat die matrizengeometrischen Betrachtungen des Verfassers angeregt.

Affine Geometrie der quadratischen Matrizen ist in dem Artikel [11] und den dort zitierten Arbeiten von M. GERSTENHABER enthalten. Sie haben den modernen Standpunkt der algebraischen Geometrie nach A. WEIL, der hier nicht eingenommen wird, zur Grundlage; insofern gibt es keine Berührungspunkte mit den Gerstenhaberschen Beiträgen zur Matrizengeometrie.

Die beiden Bücher [5, 6] von BURAU schließen an die klassische projektive Geometrie an und stellen Beziehungen zur modernen Geometrie her bzw. behandeln Gegenstände derselben auf eigene Weise (z. B. Spinorengeometrie, symplektische Geometrie), soweit es sich um Geometrie über dem komplexen oder reellen Zahlkörper handelt. In dieses der algebraischen Geometrie vorgelagerte „Zwischengebiet" ist vorliegende Arbeit ebenfalls einzuordnen. BURAU legt Wert darauf, „möglichst viele Schlüsse synthetisch, d. h. ohne Rechnung, durchzuführen, wo dies ohne allzuviel Zwang möglich ist" ([6], S. 6). Im übrigen werden nur landläufige Kenntnisse aus der Theorie der Vektorräume und Matrizen verwendet, wie sie etwa in den ersten beiden Semestern eines Mathematikstudiums vermittelt werden. Verfasser möchte zeigen, daß mit diesen elementaren Mitteln in wesentlich weitergehender Weise als bei BURAU im eingangs definierten Sinn Matrizengeometrie betrieben werden kann. Am stärksten wirkt sich dabei der bekannte Satz aus, daß jede Matrix als Produkt aus einer (nicht eindeutig bestimmten) spalten- und einer zeilenregulären Matrix dargestellt werden kann (Hilfssatz 1).

Es zeigt sich, daß die matrizenalgebraische Methode in der Matrizengeometrie natürlich und recht fruchtbar ist und eine stärkere Beachtung als bisher geschehen zu verdienen scheint. Dabei sind keineswegs auch nur annähernd die Anregungen und Beziehungen ausgenutzt worden, die den Arbeiten von BERTINI, WEISS, B. SEGRE und BURAU zu entnehmen sind; insbesondere ist der von E. CARTAN gepflegte Standpunkt der Riemannschen Geometrie überhaupt nicht berücksichtigt worden. Mit einem Blick auf dieses Werk von E. CARTAN [7] sowie auf die erwähnten Arbeiten von GERSTENHABER liegt hier sozusagen ein elementarer Teil der projektiven Matrizengeometrie in ihren Anfängen vor.

Nach Bereitstellung einiger Sätze aus der Matrizenlehre werden die projektiven Matrizenräume und ihre Rangmannigfaltigkeiten eingeführt (hierzu vgl. BERTINI [2],

S. 355 ff., BURAU [5], S. 91—99, [6], S. 138—141). In einem nachfolgenden Artikel wird ein spezieller Raum, der der projektiven $3 \cdot 3$-Matrizen, über BERTINI, MEDEK und BURAU hinaus näher untersucht.

2. Abkürzungen und Bezeichnungen

P^n: n-dimensionaler projektiver Raum

$a, b, c, \ldots$: Punkte von P^n
$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \ldots$: Hyperebenen von P^n
} Koordinatenvektoren, die diese Punkte oder Hyperebenen angeben, werden genau so bezeichnet, sofern nicht eine besondere Verabredung getroffen wird.

$\hat{P}^n$: der zu P^n duale Raum, d. i. der Raum der Hyperebenen von P^n. Der dem (Punkt-) Raum dual entsprechende Begriff ist (im Anschluß an BERTINI [2], S. 31) das (Hyperebenen)Bund; das 1- bzw. 2-dimensionale Bund heißt auch Büschel bzw. Bündel.

$U \cap V$ bzw. $\langle U, V\rangle$: Durchschnitt bzw. Erzeugnis der Unterräume U und V von P^n

Matrizen, die nicht notwendig keine Zeilen- oder Spaltenmatrizen sind, werden mit lateinischen Großbuchstaben bezeichnet.

pq-Matrix: Matrix mit p Zeilen und q Spalten (auch $p \cdot q$-Matrix)

A: Matrix

A^{T}: die zu A transportierte (gestürzte) Matrix

a_i: i-te Spalte von A

a^j: j-te Zeile von A

$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \ldots & a_q \\ | & & | \end{bmatrix}$: die durch ihre Spalten angegebene Matrix A

$A = \begin{bmatrix} - & a^1 & - \\ & \vdots & \\ - & a^p & - \end{bmatrix}$: die durch ihre Zeilen angegebene Matrix A

x: Spaltenvektor $= p\,1$-Matrix

x^{T}: Zeilenvektor $= 1\,p$-Matrix

$|A|$: Determinante von A (falls A quadratisch)

$\mathrm{Sp}\,A$: Spur der Matrix A (falls A quadratisch)

$\mathrm{rg}\,A$: Rang der Matrix A

rg-r-pq-Matrix: pq-Matrix vom Rang r.

Zahlen des Grundkörpers werden mit lateinischen oder griechischen Buchstaben bezeichnet; wann natürliche Zahlen gemeint sind, möchte dem Zusammenhang entnommen werden.

0: Null(zahl)

O: Nullmatrix

o: Nullvektor

Im folgenden werden $(m+1)(n+1)$-Matrizen $A, B, \ldots$ betrachtet, wobei m, n (>0) fest bleiben und die Elemente einer Matrix nach folgendem Beispiel indiziert werden:

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

3. Hilfssätze aus der Matrizenalgebra

In Zusammenhang mit Aussagen über den Rang einer Matrix werden (durchweg ohne Beweis) Sätze über das Produkt und die Summe von Matrizen bzw. über die Zerlegung einer Matrix in ein Produkt oder eine Summe zusammengestellt.

Hilfssatz 1. ([27], S. 92 f.). a) *Das Produkt AB einer* rg-r-pr-*Matrix A mit einer* rg-r-rq-*Matrix B ist eine* rg-r-pq-*Matrix.*

b) *Es sei A eine pq-Matrix mit* rg $A = r > 0$. *Dann gibt es eine* rg-r-pr-*Matrix B und eine* rg-r-qr-*Matrix C, die nicht eindeutig bestimmt sind, so daß A in das Produkt*

$$A = BC^{\mathsf{T}} \tag{2}$$

zerlegbar ist. Bei festem A ist B durch C bzw. C durch B eindeutig festgelegt. Sämtliche Zerlegungen der Matrix A in rg-r-*Matrizen nach* (2) *werden durch*

$$A = (BR)\,(CR^{\mathsf{T}-1})^{\mathsf{T}} \tag{2'}$$

angegeben, wo $A = BC^{\mathsf{T}}$ eine beliebige Zerlegung von A ist und R alle regulären rr-Matrizen durchläuft. (Im Fall $r = 1$ reduziert sich die Matrix R auf einen von Null verschiedenen Skalar.)

Hilfssatz 2 ([27], S. 94).a) *Das Produkt einer* rg-r-pr-*Matrix mit einer* rg-s-rq-*Matrix ist eine* rg-s-pq-*Matrix. Das Produkt einer* rg-s-pr-*Matrix mit einer* rg-r-rq-*Matrix ist eine* rg-s-pq-*Matrix.*

b) *Das Produkt einer* rg-r-rp-*Matrix mit einer* rg-s-pq-*Matrix ist eine* rg-t-pq-*Matrix mit* $\mathrm{Max}\,(0, r+s-p) \leqq t \leqq \mathrm{Min}\,(r, s)$.

c) *Das Produkt einer* rg-r-pp-*Matrix mit einer* rg-s-pp-*Matrix ist eine* rg-t-pp-*Matrix mit* $\mathrm{Max}\,(0, r+s-p) \leqq t \leqq \mathrm{Min}\,(r, s)$.

Hilfssatz 3. ([27], S. 22). *Es sei B eine* rg-r-pq-*Matrix mit $r > 0$ und C eine qt-Matrix, A eine sp-Matrix.*

a) *Genau dann folgt $A = 0$ aus $AB = 0$, wenn B zeilenregulär, d. h. wenn $r = p$ ist.*

b) *Genau dann folgt $C = 0$ aus $BC = 0$, wenn B spaltenregulär, d. h. wenn $r = q$ ist.*

Hilfssatz 4. *Es sei A eine* rg-r-pq-*Matrix mit* $0 < r < \mathrm{Min}\,(p, q)$ *und $A = BC^{\mathsf{T}}$ eine Zerlegung von A in* rg-r-*Matrizen.*

a) *Ist D eine qs-Matrix mit $AD = O$, dann ist schon $C^{\mathsf{T}}D = O$. Bedeutet y eine variable $q\,1$-Matrix, dann ist jede Spalte von D ein Lösungsvektor des Gleichungssystems*

$C^{\mathsf{T}} y = o$, *ist also aus beliebigen* $q - r$ *linear unabhängigen Lösungen dieses Systems kombinierbar; demnach ist* $\operatorname{rg} D \leqq q - r$.

b) *Ist* F *eine* pt*-Matrix mit* $F^{\mathsf{T}} A = O$, *dann gilt schon* $F^{\mathsf{T}} B = O$. *Es ist* $\operatorname{rg} F \leqq p - r$. *Im Raum der Zahlen-*$p$*-tupel ist der von den Spalten von* B *erzeugte Raum orthogonal zu dem von den Spalten von* F *erzeugten Raum.*

Hilfssatz 5. a) [(27], S. 26 f.) *Eine* rg-r-pq*-Matrix ist als Summe (Linearkombination) von* r *linear unabhängigen (nicht eindeutig bestimmten)* rg-1-pq*-Matrizen darstellbar. Ist*

$$A = BC^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_r \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & c^1 & - \\ & \vdots & \\ - & c^r & - \end{bmatrix}$$

eine Zerlegung von A *in* rg-r*-Matrizen, dann ist* $A = b_1 c^1 + \cdots + b_r c^r$ *solch eine Darstellung. Die Summe von irgend* $s(\leqq r)$ *dieser Summanden ist eine* rg-s-pq*-Matrix.*

b) *Sind* $A_1 = b_1 c^1, \ldots, A_s = b_s c^s$ rg-1-pq*-Matrizen, für die* r *der kleinere der Ränge der Matrizen*

$$B := \begin{bmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_s \\ | & & | \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad C^{\mathsf{T}} := \begin{bmatrix} - & c^1 & - \\ & \vdots & \\ - & c^s & - \end{bmatrix}$$

ist, dann ist $A_1 + \cdots + A_s =: A$ *eine* pq*-Matrix höchstens vom Rang* r.

c) *Sind* A *und* B *zwei* pq*-Matrizen und ist* r *der kleinere der Ränge der* $p \cdot 2q$*-Matrix* $[A \mid B]$ *und der* $2p \cdot q$*-Matrix* $\left[\begin{array}{c} A \\ \hdashline B \end{array}\right]$, *dann ist* $A + B$ *eine* pq*-Matrix höchstens vom Rang* r.

Hilfssatz 6. *Sind* A *und* B *reguläre oder singuläre quadratische Matrizen gleichen Formats, dann gilt*

$$\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj} A \cdot \operatorname{adj} B.$$

Hilfssatz 7 ([27], S. 116 ff.). *Es sei* A *eine* rg-r-pr*-Matrix mit* $p > r\ (\geqq 1)$. *Es sei* E_{rr} *die* rr*-Einheitsmatrix. Dann gibt es eine nicht eindeutig bestimmte* rg-r-rp*-Matrix* $\tilde{A}$ *mit* $\tilde{A} A = E_{rr}$; *es heißt* $\tilde{A}$ *eine Halb-Linksinverse von* A. *Ferner gibt es eine nicht eindeutig bestimmte reguläre Matrix* A^* *mit*

$$A^* A = \left[\begin{array}{c} E_{rr} \\ \hdashline O \end{array}\right],$$

wo O *die* $(p - r)\, r$*-Nullmatrix ist.*

Beweis. Nach Hilfssatz 1 ist $A^{\mathsf{T}} A$ eine rg-r-rr*-Matrix* und daher $(A^{\mathsf{T}} A)^{-1} A^{\mathsf{T}} =: \tilde{A}$ eine Halb-Linksinverse von A (die überdies idempotent und symmetrisch ist). — Das Gleichungssystem $x^{\mathsf{T}} A = o^{\mathsf{T}}$ hat eine $(n - r)$-dimensionale Lösungsmannigfaltigkeit. Es sei B eine rp-Matrix mit von Null verschiedenem Rang, deren Zeilen Lösungen dieses Gleichungssystems sind. Dann ist auch $\tilde{A} + B$ eine Halb-Linksinverse von A. — Nun sei $\underline{A}$ eine $(p - r)\, p$-Matrix, deren Zeilen beliebige linear unabhängige Lösungen von $x^{\mathsf{T}} A = o^{\mathsf{T}}$ sind. Dann ist

$$A^* := \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \hline \underset{\sim}{A} \end{bmatrix}$$

eine reguläre pp-Matrix mit der angegebenen Eigenschaft.

Folgerung. *Es sei A eine* rg-r-pq-*Matrix und $A = BC^{\mathsf{T}}$ eine Zerlegung von A in* rg-r-*Matrizen. Dann gibt es jeweils wenigstens eine reguläre pp-Matrix M und eine reguläre qq-Matrix N, so daß*

$$MAN^{\mathsf{T}} = \left[\begin{array}{c|c} E_{rr} & O \\ \hline O & O \end{array}\right]$$

gilt, wo auf der rechten Seite eine pq-Matrix steht, die in der angedeuteten Weise aus E_{rr} und Nullmatrizen passenden Formats zusammengesetzt ist.

4. Projektive Matrizenräume und ihre Rangmannigfaltigkeiten

4.1. Matrizenräume

Die $(m+1)(n+1)$-Matrizen bilden einen Vektorraum der Dimension $(m+1)(n+1)$. Als Basis kommen insbesondere beliebige $(m+1)(n+1)$ linear unabhängige Matrizen vom Rang 1 in Frage, speziell die Matrizen $E_{ik}(i = 0, \ldots, m;\ k = 0, \ldots, n)$, die an der Stelle (i, k) eine 1, sonst nur Nullen stehen haben. Dieser Vektorraum werde der *Matrizenraum* $M_{(m+1)(n+1)}$ genannt und kurz (da m und n fest zu denken sind) mit M_* bezeichnet.

Definition 1. Für die Matrizen $A, B \in M_*$ heiße die durch

$$(A, B) := \operatorname{Sp} A^{\mathsf{T}} B \tag{3}$$

definierte Zahl das *innere Produkt* von A und B.

Es ist zu erkennen, daß diese Definition die übliche Definition des inneren Produktes zweier Spaltenvektoren umfaßt und daß

$$(A, B) = (B, A), \qquad (A + B, C) = (A, C) + (B, C)$$

gilt. Die linearen Abbildungen des Matrizenraumes M_* in sich werden durch die Elemente jenes Vektorraumes geliefert, der aus den „Übermatrizen" folgender Bauart besteht:

$$\tilde{M} := [M_{ik}] \text{ mit } M_{ik} \in M_* \quad (i = 0, \ldots, m;\ k = 0, \ldots, n); \tag{4}$$

$\tilde{M}$ ist also eine $(m+1)(n+1)$-Matrix, deren Elemente dem Matrizenraum M_* angehören. Mittels (3) wird die Anwendung von $\tilde{M}$ auf $A \in M_*$ durch

$$\tilde{M} \cdot A := [(M_{ik}, A)] \tag{5}$$

erklärt. — Werden die Elemente von M_* von links oder rechts in gewöhnlicher Weise mit einer (festen) Matrix geeigneten Formats multipliziert, dann wird ebenfalls eine lineare Abbildung von M_* in sich erhalten; die zugehörige Matrix $\tilde{M}$ ist leciht aufzustellen[1]). Aber nicht jede lineare Abbildung von M^* in sich läßt sich so angeben. Diese speziellen linearen Abbildungen von M_* spielen jedoch eine besondere Rolle und gehören wesentlich zum Gegenstand der Betrachtungen (vgl. insbesondere Abschnitt 26).[2])[3])

4.2. Projektive Matrizenräume

Mit Hilfe des Begriffs der projektiven Gleichheit wird aus M_* ein projektiver Matrizenraum hergestellt:

Definition 2. a) Zwei Matrizen A und B aus M_*, von denen keine die Nullmatrix ist, heißen *projektiv-gleich*, in Zeichen: $A \doteq B$, wenn sie linear abhängig sind.
b) Eine Matrix, die bis auf einen Skalarfaktor $\varrho \neq 0$ eindeutig festgelegt ist, heiße *projektiv-eindeutig* (*bestimmt*).

Im wesentlichen soll das Zeichen $\doteq$ daran erinnern, daß in einer Gleichheit ein von Null verschiedener (sogenannter Proportionalitäts-)Faktor unterdrückt wurde, der in gewissen Fällen jedoch sehr wohl zu berücksichtigen ist.

Unter den Matrizen von M_* wird durch die projektive Gleichheit eine Äquivalenzrelation eingeführt, denn die Gesetze der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität sind offenbar erfüllt. Die Nullmatrix bildet eine Äquivalenzklasse für sich (Nullklasse).

Definition 3. Die von der Nullklasse verschiedenen Klassen projektiv-gleicher Matrizen des Matrizenraumes $M_* = M_{(m+1)(n+1)}$ bilden den *projektiven Matrizenraum* $\mathfrak{M}_* = \mathfrak{M}_{(m+1)(n+1}$. Jedes Element des projektiven Matrizenraumes heiße ein *Punkt* von $\mathfrak{M}_*$ oder auch eine *projektive Matrix* (vom Format $(m + 1)(n + 1)$).

Verabredung. Ist $A \in M_*, A \neq O$, ein Repräsentant einer Klasse projektiv-gleicher Matrizen, so werde diese Klasse einfachheitshalber (und wohl auch unmißverständlich) mit A bezeichnet und A eine *Koordinatenmatrix* der so angegebenen projektiven Matrix genannt.

Im Fall $m = 0$ oder $n = 0$ ist statt „projektiver Matrizenraum" einfach „(gewöhnlicher) projektiver Raum" zu sagen; man spricht dann nicht von „Koordinatenmatrix", sondern von „Koordinatenvektor". Der projektive Matrizenraum $\mathfrak{M}_*$ ist ein im gewöhnlichen Sinne projektiver Raum der Dimension $d = (m + 1)(n + 1) - 1$, und der Zusammenhang zu einem solchen Raum, zum Raum der projektiven Zahlen-$(d + 1)$-tupel ist einfach dadurch gegeben, daß man die $d + 1$ Stellen dieser Zahlenreihen entweder mit $(m + 1)$-adischen (wenn $m \geqq n$) oder mit $(n + 1)$-adischen (wenn $n \geqq m$) Zahlen indiziert, wie sie durch die Darstellung (1) einer $(m + 1)(n + 1)$-

[1]) Für Übermatrizen (4) wird sich in Verallgemeinerung des gewöhnlichen Matrizenproduktes unter Beachtung der Definitionen (3) und (5) eine „Komponierbarkeit" erklären lassen, die für quadratische Übermatrizen $(m = n)$ mit einer Determinantentheorie versehen werden könnte. Es dürfte sich dabei um eine komplizierte Umschreibung der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation und Determinantentheorie handeln, die aber in Zusammenhang mit den von Burau [6], S. 141, erwähnten Hypermatrizen von Interesse sein könnte. Hier wird solch ein Kalkül nicht benötigt.

[2]) Es wäre reizvoll, die Elemente von M_* unmittelbar als Punkte eines geometrischen Raumes aufzufassen und „affine Matrizengeometrie" zu betreiben, wobei insbesondere im Anschluß an das innere Produkt die Frage der Einführung von Metriken untersucht werden könnte.

[3]) Die nicht zu $\mathfrak{M}_*$ gehörende Nullklasse könnte nach Burau [6], S. 38, der „Unpunkt" von $\mathfrak{M}_*$ genannt werden.

Matrix angeregt wird. Dies ist der Inhalt des *Übertragungsprinzipes von* STEPHANOS in einer naheliegenden Verallgemeinerung.

Die Begriffe Rang einer Matrix sowie — für quadratische Matrizen — singulär, regulär bzw. verschwindende und nicht verschwindende Determinante übertragen sich in natürlicher Weise auf projektive Matrizen.

4.3. Rangmannigfaltigkeiten

Definition 4. Es sei r eine feste ganze Zahl mit $0 < r \leqq \mathrm{Min}\,(m+1, n+1)$. Die projektiven Matrizen von $\mathfrak{M}_*$ mit dem Rang $s \leqq r$ bilden die *Rang-r-Mannigfaltigkeit* (*rg-r-Mannigfaltigkeit*) $\mathfrak{M}_*{}^r$ von $\mathfrak{M}_*$. Die rg-1-Mannigfaltigkeit wird *Segresche Mannigfaltigkeit* genannt.[1])

Ist $r_0 = \mathrm{Min}\,(m+1, n+1)$, dann ist die rg-$r_0$-Mannigfaltigkeit offenbar $\mathfrak{M}_*$ selber. Daher sei im folgenden $0 < r < r_0$ vorausgesetzt. — Jede rg-r-Mannigfaltigkeit ist eine algebraische Mannigfaltigkeit. Setzt man nämlich in der Matrix

$$Z = \begin{bmatrix} z_{00} \cdots z_{0n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ z_{m0} \cdots z_{mn} \end{bmatrix}$$

mit unbestimmten Elementen z_{ik} alle $(r+1)$-reihigen Unterdeterminanten gleich Null, so erhält man Gleichungen vom Grad $r+1$, die die Mannigfaltigkeit beschreiben.

Es dürfte nicht leicht sein, einen allgemeinen Punkt einer Rangmannigfaltigkeit anzugeben. Als günstig erweist sich folgende Darstellung: Ist X eine variable $(m+1)r$-Matrix und Y eine variable $(n+1)\,r$-Matrix (im Fall $r = 1$ werde x statt X und y statt Y geschrieben), dann ist

$$Z = X\,Y^{\mathsf{T}} \quad (\text{im Fall } r = 1\colon \ Z = xy^{\mathsf{T}}) \tag{6}$$

eine Art Parameterdarstellung der rg-r-Mannigfaltigkeit; zu verschiedener Wahl der Variablenreihen $x_{00}, \ldots, x_{m,r-1}$ und $y_{00}, \ldots, y_{n,r-1}$ kann der gleiche Punkt Z gehören. Im Fall $r = 1$ ist die Darstellung (6) projektiv eindeutig. (6) werde eine *Quasi-Parameterdarstellung* der rg-r-Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_*{}^r$ genannt.

Man erkennt nun recht einfach die Gültigkeit folgender Aussagen. Aus der bekannten Operation des Transponierens von Matrizen folgt

Satz 1a. *Die Räume* $\mathfrak{M}_{(m+1)(n+1)} = \mathfrak{M}_*$ *und* $\mathfrak{M}_{(n+1)(m+1)} = \mathfrak{M}_*{}^{\mathsf{T}}$ *sind isomorph.*

Damit ergibt sich die projektive Gleichwertigkeit auch der Rangmannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_*{}^r$ und $\mathfrak{M}_*{}^{\mathsf{T}r}$, und es könnte o.B.d.A. etwa $m \leqq n$ angenommen werden.

Satz 1b. *Es gilt* $\mathfrak{M}_*{}^1 \subset \mathfrak{M}^{*2} \subset \cdots \subset \mathfrak{M}_*{}^{r_0-1} \subset \mathfrak{M}_*{}^{r_0} = \mathfrak{M}_*$.

In der rg-1-Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_*{}^1$ kommen auch die Punkte E_{ik} vor, die die zu Beginn von Abschnitt 4.1. erwähnten Matrizen als Koordinatenmatrizen besitzen:

---

[1]) Vgl. die in der Einleitung genannte Literatur. Es werde hervorgehoben, daß hier die rg-1-Mannigfaltigkeit mit der Segreschen Mannigfaltigkeit identifiziert wird, die sonst allgemeiner definiert ist (z. B. BURAU [5], S. 56 ff, [6], S. 110 ff), es liegt hier lediglich eine Darstellung der SEGREschen Mannigfaltigkeit vor.

Satz 1c. *Der kleinste lineare Unterraum von $\mathfrak{M}_*$, in dem $\mathfrak{M}_*{}^1$ oder irgendeine $\mathfrak{M}_*{}^r$ liegt, ist $\mathfrak{M}_*$ selbst: Irgendeine Rangmannigfaltigkeit erzeugt den ganzen Raum $\mathfrak{M}_*$.*

Den in Satz 1c angegebenen Sachverhalt kann man genauer noch so beschreiben: Ist $P \in \mathfrak{M}_*$ und $\operatorname{rg} P = r = r_1 + r_2$ $(r_1 > 0, r_2 > 0)$, dann liegt P auf der Verbindungsgeraden (wenigstens) eines Punktes von $\mathfrak{M}_*{}^{r_1}$ mit (wenigstens) einem Punkt von $\mathfrak{M}_*{}^{r_2}$, denn die Koordinatenmatrix P läßt sich als Summe zweier (nicht eindeutig bestimmter) Matrizen vom Rang r_1 und r_2 angeben. Da umgekehrt die Summe zweier Matrizen mit den Rängen r_1 und r_2 eine Matrix mit dem Höchstrang $r_1 + r_2$ ist, gilt

Satz 1d. *Die Punkte der Geraden, die durch Verbinden der Punkte von $\mathfrak{M}_*{}^{r_1}$ und $\mathfrak{M}_*{}^{r_2}$ entstehen,*[1] *erfüllen die $\mathfrak{M}_*{}^r$ mit $r = \operatorname{Min}(r_0, r_1 + r_2)$. Dabei ist etwa $r_1 \leqq r_2$, also $\mathfrak{M}_*{}^{r_1} \subseteqq \mathfrak{M}_*{}^{r_2}$.*

Die Definition der Rangmannigfaltigkeiten ist einerseits, nämlich von der Bezeichnung her, geometrisch insofern nicht befriedigend, als der Rang eines Punktes von $\mathfrak{M}_*$ keine Invariante gegenüber allgemeinen linearen Transformationen (5) ist, obwohl natürlich die geometrischen (projektiven) Eigenschaften einer Rangmannigfaltigkeit bei einer solchen Operation erhalten bleiben. Andererseits kann die Definition wieder als vernünftig betrachtet werden, indem $\mathfrak{M}_*$ als ein Bild des Raumes oder gleich als Raum der projektiven Abbildungen eines gewöhnlichen projektiven Raumes P^n der Dimension n in einen anderen, Q^m, der Dimension m anzusehen ist. Denn ist A eine Koordinatenmatrix einer projektiven Abbildung $\alpha: P^n \xrightarrow{\alpha} Q^m$, also die Darstellung der Abbildung bezüglich bestimmter Koordinatensysteme von P^n und Q^m durch eine projektive Matrix (Abbildungsmatrix), so wird ein Wechsel dieser Koordinatensysteme durch Transformation von A in eine äquivalente (d. i. ranggleiche) Matrix MAN^{T} angezeigt, wo M und N reguläre quadratische Matrizen passenden Formats sind. Damit ist aber begrifflich klar, daß auf diese Weise im wesentlichen schon sämtliche linearen Transformationen von M_* angegeben sind, bei denen die Rangmannigfaltigkeiten auf sich abgebildet werden, und es erhellt sich, warum die durch gewöhnliche Matrizenmultiplikation zu erhaltenden linearen Abbildungen (5) von $\mathfrak{M}_*$, wie schon erwähnt, eine besondere Rolle spielen. — Daß durch gewöhnliche Multiplikation der Elemente von $\mathfrak{M}_*$ von rechts und von links mit regulären Matrizen geeigneten Formats wesentlich alle geläufigen (als linear zu bezeichnenden) und rangerhaltenden Umformungen einer Matrix beschreibbar sind, ist bekannt und ergibt sich hier erneut, weil bei Operationen dieser Art die rg-1-Matrizen in ebensolche übergehen müssen, was durch die angegebenen Transformationen gewährleistet wird, und aus der rg-1-Mannigfaltigkeit alle höheren Rangmannigfaltigkeiten linear erzeugt werden können. In anderer Formulierung kann man zusammenfassend und ergänzend sagen:

Satz 2. *Ist G_1 die Gruppe der regulären $(m + 1)$-reihigen und G_2 die Gruppe der regulären $(n + 1)$-reihigen quadratischen projektiven Matrizen, so ist die Gruppe der Autokollineationen von $\mathfrak{M}_*$, die die Rangmannigfaltigkeiten fest läßt,*

a) *im Fall $m \neq n$ isomorph zu dem direkten Produkt $G_1 \times G_2$,*

b) *im Fall $m = n$ isomorph zu dem Erzeugnis dieser Gruppe $G_1 \times G_2$ und der Gruppe T von der Ordnung 2, die der rangerhaltenden Operation des Matrizentransportierens entspricht.*

[1] Es wird also nicht das Erzeugnis aus beiden Mannigfaltigkeiten gebildet; man könnte von der Menge der Sekanten der beiden Mannigfaltigkeiten sprechen.

Ist $A \in G_1, B \in G_2$ und Z ein beliebiger Punkt (Koordinatenmatrix) aus $\mathfrak{M}_*$, dann ist

$$Z'' = AZB \quad (Z \in \mathfrak{M}_*)$$

die Anwendung des Elementes $(A, B) \in G_1 \times G_2$ auf $\mathfrak{M}_*$. Im Fall $m = n$ kann noch die Abbildung

$$Z' = Z^{\mathsf{T}} \text{ vorher}$$

oder

$$Z''' = Z''^{\mathsf{T}} \text{ danach}$$

ausgeübt werden; im allgemeinen wird dabei $(AZB)^{\mathsf{T}}$ von $AZ^{\mathsf{T}}B$ verschieden sein. Es liegt eine treue Darstellung vor.

Die spezielle Abbildung

$$\left.\begin{array}{ll} Z' = AZ & (Z \in \mathfrak{M}_*;\ A \text{ fest}) \\ Z'' = ZB & (Z \in \mathfrak{M}_*;\ B \text{ fest}) \end{array}\right\} \text{ heiße eine } \left\{\begin{array}{ll} \textit{Rechtsschiebung} & (7') \\ \textit{Linksschiebung} & (7'') \end{array}\right.$$

von $\mathfrak{M}_*$; dies in Analogie zu den Rechts- und Linksschiebungen des Raumes der projektiven $2 \cdot 2$-Matrizen. Eine aus Rechts- und Linksschiebungen zusammengesetzte Abbildung werde kurz eine *Schiebung* von $\mathfrak{M}_*$ genannt.

Wesentlich ist die Bemerkung, daß es in der (gemeinsamen) Autokollineationsgruppe der Rangmannigfaltigkeiten immer wenigstens eine Transformation gibt, die einen gegebenen Punkt vom Rang r in einen beliebigen anderen Punkt des gleichen Ranges überführt (Transitivität der Autokollineationen von $\mathfrak{M}_*^r$), wovon gelegentlich vorteilhaft Gebrauch zu machen ist. (Vgl. Folgerung aus Hilfssatz 7.)

4.4. Lineare Räume auf Rangmannigfaltigkeiten

Es sei P ein Punkt von $\mathfrak{M}_*$ und $\operatorname{rg} P = r < r_0$. Dann kann P einmal als Punkt von $\mathfrak{M}_*^r$, ein anderes Mal als Punkt von $\mathfrak{M}_*^{r_1}$ mit $r_1 > r$ (falls es solche Zahlen r_1 gibt) betrachtet werden.

Von den möglichen Zerlegungen der Matrix P in ein Produkt aus rg-r-Matrizen sei eine herausgegriffen:

$$P = AB^{\mathsf{T}}.$$

Man erkennt:

Satz 3. *Bei festgehaltenem* $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$ *und Ersetzen von* $\begin{cases} B \\ A \end{cases}$ *durch eine (gleichformatige) variable Matrix* $\begin{cases} Y \\ X \end{cases}$ *durchläuft der Punkt* $\begin{cases} Z = AY^{\mathsf{T}} \\ Z = XB^{\mathsf{T}} \end{cases}$ *einen linearen Unterraum* $\begin{cases} M \\ N \end{cases}$ *der Dimension* $\begin{cases} m' = r(n+1) - 1 \\ n' = r(m+1) - 1 \end{cases}$, *der ganz auf* $\mathfrak{M}_*^r$ *liegt und den Punkt* P *enthält.*

Auf M_*^r liegen also zwei verschiedene Arten linearer Räume, die *erzeugende Räume 1. und 2. Art* oder *linke und rechte erzeugende Räume* von $\mathfrak{M}_*^r$ heißen sollen gemäß folgender Verabredung:

$$\begin{cases} M \\ N \end{cases} \text{ sei ein erzeugender Raum } \begin{cases} 1. \\ 2. \end{cases} \text{ Art oder } \begin{cases} \text{linker} \\ \text{rechter} \end{cases} \text{ erzeugender Raum;}$$

in seiner Parameterdarstellung $\begin{cases} Z = A\,Y^{\mathsf{T}} \\ Z = X B^{\mathsf{T}} \end{cases}$ ist der $\begin{cases} \text{„erste oder linke Faktor" } A \\ \text{„zweite oder rechte Faktor" } B \end{cases}$ fest. Es heiße $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$ eine *mögliche Koordinatenmatrix* von $\begin{cases} M \\ N \end{cases}$.

Es folgt weiter die Gültigkeit von

Satz 4. $\begin{cases} Z = A_1 Y^{\mathsf{T}} \ (A_1 \text{ feste rg-}r\text{-}(m+1)\ r\text{-Matrix}) \\ Z = X B_1^{\mathsf{T}} \ (B_1 \text{ feste rg-}r\text{-}(n+1)\ r\text{-Matrix}) \end{cases}$ *beschreibt genau dann denselben* $\begin{cases} \textit{linken} \\ \textit{rechten} \end{cases}$ *erzeugenden Raum* $\begin{cases} M\colon\ Z = A\,Y^{\mathsf{T}} \\ N\colon\ Z = X B^{\mathsf{T}} \end{cases}$ (aus Satz 3), *wenn eine Beziehung* $\begin{cases} A_1 = AR \\ B_1 = BS \end{cases}$ *mit regulärer* rr-*Matrix* $\begin{cases} R \\ S \end{cases}$ *besteht* (*d. h. wenn* $\begin{cases} A_1 \textit{ und } A \\ B_1 \textit{ und } B \end{cases}$ *rechtsäquivalent sind*).

Damit ist der Begriff „mögliche Koordinatenmatrix" motiviert und der Zusammenhang zwischen zwei verschiedenen möglichen Koordinatenmatrizen eines erzeugenden Raumes geklärt.

Durch jeden Punkt P vom Rang r der $\mathfrak{M}_*{}^r$ gibt es genau einen rechten und genau einen linken erzeugenden Raum. Aber natürlich können sowohl die rechten als auch die linken erzeugenden Räume verschiedener Punkte vom Rang r auf $\mathfrak{M}_*{}^r$ dieselben sein. Über erzeugende Räume gleicher und verschiedener Art geben die folgenden Sätze Auskunft.

Satz 5. *Zwei erzeugende Räume M und N verschiedener Art von $\mathfrak{M}_*{}^r$ spannen einen Raum $\langle M, N\rangle =: T$ der Dimension $r[(m+1)+(n+1)-r]-1$ auf. Genau dann ist T eine Hyperebene, wenn $m = n = r$ gilt.*

Beweis. M und N seien die erzeugenden Räume durch den Punkt P vom Rang r. Durch eine geeignete Schiebung kann erreicht werden, daß P (unter Beibehaltung dieser Bezeichnung) die Gestalt

$$P = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & O \\ \hline O & O \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \\ \hline O \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & O \end{array}\right] \tag{8}$$

annimmt. Dann gilt

$$M\colon\ Z = \left[\begin{array}{c} \begin{matrix} y_{00} & \cdots & y_{0,r-1} & \cdots & y_{0n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_{r-1,0} & \cdots & y_{r-1,r-1} & \cdots & y_{r-1,n} \end{matrix} \\ \hline O \end{array}\right], \tag{9'}$$

$$N\colon\ Z = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} x_{00} & \cdots & x_{0,r-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{r-1,0} & \cdots & x_{r-1,r-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m0} & \cdots & x_{m,r-1} \end{matrix} & O \end{array}\right]. \tag{9''}$$

Aus (9′) und (9″) erkennt man unmittelbar, daß $\langle M, N\rangle = T$ die Parameterdarstellung

$$T\colon\ Z = \begin{bmatrix} z_{00} & \cdots z_{0,r-1} & \cdots z_{0n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{r-1,0} & \cdots z_{r-1,r-1} & \cdots z_{r-1,n} \\ \vdots & \vdots & \\ z_{m0} & \cdots z_{m,r-1} & O \end{bmatrix} \tag{10}$$

und also die angegebene Dimension besitzt.

Aus den Sätzen 3 und 5 folgt sofort

Satz 6. *Zwei erzeugende Räume M und N verschiedener Art von $\mathfrak{M}_*{}^r$ haben einen Raum $M \cap N =: S$ der Dimension $r^2 - 1$ gemeinsam. Sind M und N die erzeugenden Räume des* rg-*r-Punktes $P \in \mathfrak{M}_*{}^r$ und ist $P = AB^{\mathsf{T}}$ eine Zerlegung von P in* rg-*r-Matrizen, dann ist*

$$M \cap N = S\colon\ Z = AQB^{\mathsf{T}}$$

eine Parameterdarstellung von S, wobei Q alle (regulären und singulären) rr-Matrizen durchläuft.

Definition 5. Ist P ein Punkt von $\mathfrak{M}_*$ mit $\operatorname{rg} P = r < r_0$ und sind M und N die beiden erzeugenden Räume verschiedener Art von $\mathfrak{M}_*{}^r$ durch P, so heiße der von M und N erzeugte Raum T der *Tangentialraum* von $M_*{}^r$ in P.

In den Fällen $r = 1$ und $m = n = r$ ist diese Definition geläufig. Zur Rechtfertigung der Definition werde nun gezeigt, daß jede Gerade durch P, die $\mathfrak{M}_*{}^r$ in P im üblichen Sinne der algebraischen Wurzelzählung (vgl. BERTINI [2], S. 180) von mindestens zweiter Ordnung trifft, dem Raum T angehört.

Es sei Q ein (zunächst) beliebiger Punkt von $\mathfrak{M}_*$, $Q \neq P$. Die Gerade $PQ{:}Z = \xi P + \eta Q$ oder

$$PQ\colon\ Z = \begin{bmatrix} \xi + \eta q_{00} & \eta q_{01} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \eta q_{0n} \\ \eta q_{10} & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & \xi + \eta q_{r-1,r-1} & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \eta q_{rr} & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot & \cdot \\ \eta q_{m0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \eta q_{mn} \end{bmatrix} \tag{11}$$

ist Tangente an $\mathfrak{M}_*{}^r$, wenn sie Tangente an jede der Hyperflächen ist, die die Rangmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_*{}^r$ definieren (vgl. S. 48). In jeder aus der Matrix (11) herausgegriffenen $(r + 1)$-reihigen Unterdeterminante D kommt ein Term vor, der ξ in der größtmöglichen Potenz t enthält: $D = a \cdot \xi^t \eta^{r-t+1} + \cdots$ mit $0 \leqq t \leqq r$ und einer gewissen Konstanten a, so daß die übrigen Glieder η in einer höheren Potenz als

$r - t + 1$ besitzen. Gilt $t < r$, dann ist $r - t + 1 \geqq 2$, und es kann η in mindestens zweiter Potenz aus D herausgezogen werden, d. h., der durch die Parameter $(\xi, \eta) = (1, 0)$ gekennzeichnete Punkt P ist mindestens zweimal als Schnittpunkt der Geraden PQ mit $\mathfrak{M}_*^r$ zu zählen. Im Fall $t = r$ ist der Koeffizient a in der Darstellung von D eine Zahl q_{ik} „aus der unteren rechten Ecke" der Matrix (11) (d. h. $r \leqq i \leqq m$, $r \leqq k \leqq n$). Damit auch jetzt der Punkt P wenigstens zweimal als Schnittpunkt gezählt werden kann, muß $q_{ik} = 0$ für die angegebenen Indizes gelten oder also, gemäß (10), Q ein Punkt des Tangentialraum von P genannten Raumes sein.

Dies motiviert

Definition 6. Die rg-s-Punkte der rg-r-Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_*^r$ mit $s = r$ heißen *reguläre*, die mit $s < r$ heißen *singuläre Punkte* von $\mathfrak{M}_*^r$.

Die rg-1-Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_*^1$ (Segresche Mannigfaltigkeit) besteht nur aus regulären Punkten. Ist $r > 1$, dann sind die singulären Punkte von $\mathfrak{M}_*^r$ (wie üblich) dadurch gekennzeichnet, daß sie keinen eindeutig bestimmten Tangentialraum besitzen. Während der Tangentialraum eines Punktes P der rg-1-Mannigfaltigkeit diese Mannigfaltigkeit genau in den erzeugenden Räumen durch P trifft („Einzigkeit" der erzeugenden Räume Segrescher Mannigfaltigkeiten nach Burau [6], S. 127), gilt eine entsprechende Aussage für rg-r-Mannigfaltigkeiten mit $r > 1$ nicht. Dies erkennt man aus (10). Zum Beispiel können auf der Nebendiagonalen durch die Stelle (r, r) rechts und links von dieser Stelle insgesamt r Einsen gewählt und alle anderen Stellen der Matrix mit 0 besetzt werden. Dann erhält man die Koordinatenmatrix eines Punktes vom Rang r, der weder dem linken noch dem rechten erzeugenden Raum von P angehört. Allgemeiner gilt folgender

Satz 7. *Der Tangentialraum der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_*^r$ im* rg-r-*Punkt P besteht aus* rg-r-*Punkten mit $s \leqq \operatorname{Min}(r_0, 2r)$, d. h., im Fall $2r < r_0$ gehört der Tangentialraum von P ganz der* rg-$2r$-*Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_*^{2r}$ an.*

Beweis. In der Matrix Z aus der Parameterdarstellung (10) des Tangentialraumes T von $\mathfrak{M}_*^r$ in P werden zunächst die Elemente wie folgt gewählt, wobei o.B.d.A. $m \leqq n$ sei:

a) Im Fall $2r < r_0 = m + 1$

$$Z = \left[\begin{array}{c|c|c} O & O & \begin{matrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{matrix} \\ \hline O & & \\ \cline{1-1} \underbrace{\begin{matrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{matrix}}_{r} & \multicolumn{2}{c}{O} \end{array}\right] \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} r \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

b) im Fall $2r = r_0 = m + 1$

$$Z = \left[\begin{array}{c|c} O & \begin{matrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{matrix} \\ \hline \underbrace{\begin{matrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{matrix}}_{r} & O \end{array}\right] \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} r \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Man erkennt, daß jeweils ein Punkt Z mit $\operatorname{rg} Z = \operatorname{Min}(2r, r_0)$ angegeben wurde. Der Fall b) ist damit erledigt. Im Fall a) werde nun eine beliebige $(2r + 1)$-reihige Unterdeterminante aus der Matrix (10) herausgegriffen und nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz nach den letzten $r + 1$ Spalten entwickelt. Jede aus diesen Spalten herausgegriffene $(r + 1)$-reihige Unterdeterminante besitzt wenigstens eine Zeile aus Nullen; demnach ist jede $(2r + 1)$-reihige Unterdeterminante aus (10) gleich Null.

Für erzeugende Räume gleicher Art gilt

Satz 8. *Zwei verschiedene erzeugende Räume der gleichen Art von* $\mathfrak{M}_*{}^r$ *haben keinen Punkt vom Rang r gemeinsam. Zwei erzeugende Räume* $\begin{cases}\textit{1. Art}\\ \textit{2. Art}\end{cases}$ *von* $\mathfrak{M}_*{}^r$ *schneiden sich in einem erzeugenden Raum* $\begin{cases}\textit{1. Art}\\ \textit{2. Art}\end{cases}$ *von* $\mathfrak{M}_*{}^\varrho$ *mit* $\begin{cases}\mathrm{Max}\,(0,\, 2r - m - 1) \leqq \varrho \leqq r - 1\\ \mathrm{Max}\,(0,\, 2r - n - 1) \leqq \varrho \leqq r - 1\end{cases}$, *wobei* $\varrho = 0$ *im Fall windschiefer Räume zu setzen ist.*
Letzteres ($\varrho = 0$) *trifft sicher zu für* $r = 1$, *also für erzeugende Räume gleicher Art einer Segreschen Mannigfaltigkeit. — Außer im Fall* $r = 1$ *liegt* ϱ *nur noch bei* $\begin{cases}r = m\\ r = n\end{cases}$ *von vornherein fest.*

Der Beweis kann etwa so geführt werden, daß man zeigt: Sind A_1, A_2 mögliche Koordinatenmatrizen der betrachteten erzeugenden Räume gleicher Art von $\mathfrak{M}_*{}^r$, dann ist ϱ die Dimension des Durchschnitts der aus den Spalten von A_1 einerseits und von A_2 andererseits erzeugten Vektorräume, und unter Verwendung des Austauschsatzes von STEINITZ und des Hilfssatzes 1 folgt die Aussage des Satzes.

4.5. Abschließende Bemerkung

Die Untersuchung des Matrizenraumes $\mathfrak{M}_* = \mathfrak{M}_{(m+1)(n+1)}$ soll für allgemeines m und n abgebrochen und nur für $m = n = 2$ fortgeführt werden. Eine Reihe der folgenden Betrachtungen ließe sich jedoch ohne weiteres auf allgemeine projektive Matrizenräume übertragen, so daß die Ausführungen über den speziellen Raum $\mathfrak{M}_{3\cdot 3}$ in gewissem Maße stellvertretend für den „allgemeinen Fall" stehen.

LITERATUR

[1] BACHMANN, F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1959.
[2] BERTINI, E.: Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume. Verlag von L. W. Seidel & Sohn, Wien 1924.
[3] BILINSKI, S.: Eine Interpretation der ebenen hyperbolischen Geometrie der Geraden. Zusammenfassung in Internat. Math. Nachr. Nr. 79, Wien 1965, S. 42.
[4] BLASCHKE, W.: Projektive Geometrie. 3. Auflage, Birkhäuser-Verlag, Basel—Stuttgart 1954.
[5] BURAU, W.: Grundmannigfaltigkeiten der projektiven Geometrie. Collectanea Mathematica III, V, VI, Barcelona 1950—53.
[6] BURAU, W.: Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.
[7] CARTAN, É.: Leçons sur la géométrie projective complexe. Gauthier-Villars, Paris 1950.
[8] COXETER, H. S. M.: Non euclidean geometry. 5. Auflage, Toronto University Press, Toronto 1965.
[9] GANTMACHER, F. R.: Matrizenrechnung I. 2. Auflage, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1965 (Übersetzung aus dem Russischen).
[10] GEISE, G.: Elementares aus der höheren Geometrie. Math. Nachrichten *34* (1967) 361—376.
[11] GERSTENHABER, M.: On semicommutative matrices. Math. Z. *83* (1964) 250—260.
[12] HODGE, W. V. D., and D. PEDOE: Methods of algebraic geometry II. Cambridge University Press, Cambridge 1952.
[13] HORNIAČEK, J.: Die Abbildung des Produktes der Projektivitäten auf einer Geraden (tschechisch; russische u. deutsche Zusammenfassung). Mat.-Fyz. Časopis Sloven. Akad. Vied *11* (1961) 45—66. Ref.: Zentralblatt *100*, S. 352.

[14] KLEIN, F.: Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie. Springer, Berlin 1928.
[15] KOMMERELL, K.: Vorlesungen über Analytische Geometrie des Raumes. 2. Auflage, Koehler & Amelang, Leipzig 1949.
[16] MEDEK, V.: Lineare Systeme projektiver Transformationen einer Geraden (tschechisch; deutsche Zusammenfassung). Mat.-Fyz. Časopis Sloven. Akad. Vied *6* (1956) 98–108. Ref.: Math. Reviews *18*, S. 329.
[17] MEDEK, V.: Einige lineare Systeme von singulären Kollineationen. Mat.-Fyz. Časopis Sloven. Akad. Vied *7* (1957) 83–93.
[18] MEDEK, V.: Über die Zerlegung der Projektivitäten einer Geraden (russisch; deutsche Zusammenfassung), Mat.-Fyz. Časopis Sloven. Akad. Vied *11* (1961) 99–112. Ref.: Math. Revies 25–3401.
[19] MEDEK, V.: Die Zerlegung der Bündel von projektiven Verwandtschaften (russisch; deutsche Zusammenfassung). Mat.-Fyz. Časopis Sloven. Akad. Vied *11* (1961) 229–238. Ref.: Math. Reviews 25–3402.
[20] MÜLLER, H. R.: Sphärische Kinematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962.
[21] SCHÜTTE, K.: Der projektiv erweiterte Gruppenraum der ebenen Bewegungen. Math. Ann. *134* (1957) 62–92.
[22] SEGRE, B.: Geometria della matrici quadrate di dato ordine. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser., *57* (1962) 1–36.
[23] SEGRE, C.: Mehrdimensionale Räume, Encyklopädie d. Math. Wiss., Artikel III C 7, Nrn. 9, 10, 38.
[24] STÉPHANOS, C.: Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace avec application à l'étude des rotationes sphériques. Math. Ann. *22* (1883) 299–367.
[25] WEISS, E. A.: Die geschichtliche Entwicklung von der Geraden-Kugel-Transformation II. Dt. Math. *1* (1936) 125–145.
[26] WEISS, E. A.: Punktreihengeometrie, B. G. Teubner, Leipzig–Berlin 1939.
[27] ZURMÜHL, R.: Matrizen und ihre technischen Anwendungen. 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1961.

Manuskripteingang: 27. 9. 1970

VERFASSER:

GERHARD GEISE, Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden