Werk

Titel: Zwei elementargeometrische Zerlegungssätze

Autor: STAMMLER, L.

Jahr: 1971

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0001|log10

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Zwei elementargeometrische Zerlegungssätze

LUDWIG STAMMLER

Herrn Prof. Dr. O.-H. Keller zum 65. Geburtstag gewidmet

Einleitung

Die beiden Zerlegungssätze, die in dieser Arbeit dargestellt werden sollen, weisen einige Gemeinsamkeiten auf, so daß es gestattet sei, sie unter einer Überschrift aufzuführen.

Die Aussagenstruktur beider Sätze ist folgende: Gefordert sei für gewisse Zerlegungen (eines Rechtecks bzw. eines Dreiecks) eine Eigenschaft (Enklavenfreiheit bzw. Kongruenz), deren Definition ihrem unmittelbaren Wortlaut nach keine Angaben zur Konstruktion enthält. Behauptet wird, daß Zerlegungen mit der geforderten Eigenschaft nur „trivial" (Vorliegen einer zerlegenden Geraden) existieren können, so daß also doch eine — sogar besonders einfache — Konstruktionsvorschrift resultiert.

Beide Sätze gehören zu denjenigen Sachverhalten in der Elementargeometrie, deren Inhalt leicht erfaßbar ist, deren Beweis aber genauere Überlegungen erfordert. Allerdings erweisen sich hier die Beweise dann doch nicht als wesentlich tiefliegend (wie es in anderen Fällen ja vorkommt). Die Schwierigkeit liegt mehr in der technischen Frage der Darstellung, wie man die Einzelschritte der Beweise hinreichend vollständig beschreibt, um ihrer Lückenlosigkeit sicher zu sein. Auch kann man Fallunterscheidungen und für auszuschließende Fälle den Weg zum Widerspruch noch verschieden wählen, wobei sich zuweilen im Vergleich verschiedener Wege bezüglich Kürze und Übersichtlichkeit Vor- und Nachteile die Waage halten. Es seien wenigstens für einen Beweisschritt zum zweiten Satz (s. unten II. 2. 2.2.4., Bem. 2) zwei Wege angegeben, weil sich daran noch weitere Bemerkungen anschließen lassen. Beim ersten Satz kann man in der Wahl „anschaulicher" Formulierungen von Beweisschritten großzügiger sein, während der zweite Satz wegen der größeren Abstraktheit seiner Voraussetzungen mehr methodische Strenge verlangt.

Die Anregung zu beiden Sätzen ergab sich bei der Kritik von Aufgabenentwürfen zur Olympiade Junger Mathematiker. Für den ersten Satz läßt sich dies leicht vorstellen; den zweiten Satz veranlaßte die Beschreibung eines Dreiecks mit den Winkeln 30°, 60°, 90° als „ein halbes gleichseitiges Dreieck". Nach üblichem Sprachgebrauch („halbieren" = „in zwei gleiche Figuren zerlegen" und dabei „gleich" = „flächengleich") ist diese

Beschreibung nicht ausreichend; soll sie aber dadurch verteidigt werden, daß hier „gleich" = „kongruent" gemeint sei, so entsteht die Frage nach Satz 2.
Die Sätze dürfen vielleicht auch hinsichtlich der Frage nach ihrer Verallgemeinerungsmöglichkeit als interessant gelten. Einige naheliegende Versuche — zum ersten Satz etwa die Dimensionserhöhung von 2 (Rechtecksfläche) und 1 (zerlegende Gerade) auf $n\ (>2)$ und $n-1$, zum zweiten Satz vgl. II.2.2.2.4., Bem. 1, — ergeben allerdings nicht zutreffende Aussagen. Aber bei Beachtung des ursprünglichen Aussagecharakters, z. B. von Satz 1 als einer im wesentlichen kombinatorischen Aussage, wird man doch auf allgemeinere Aspekte stoßen, in die sich die hier genannten Sätze einordnen. Doch sei dies späterer Gelegenheit vorbehalten.

I. Ein Zerlegungssatz für Rechtecke

Satz 1. *Jede enklavenfreie Zerlegung eines Rechtecks in endlich viele (aber mindestens 2) Rechtecke gestattet eine zerlegende Gerade.*

Dabei heiße eine Zerlegung Z eines Rechtecks[1]) $\mathfrak{R}$ in Teilrechtecke[1]) $\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_n$ *enklavenfrei*, wenn jedes $\mathfrak{T}_i$ mit dem Rand von $\mathfrak{R}$ gemeinsame (Rand-)Punkte besitzt. Ferner bedeute die Aussage, Z gestatte eine Gerade $\mathfrak{g}$ als *zerlegende Gerade*, daß jeder Punkt von $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{R}$ Randpunkt (mindestens) zweier $\mathfrak{T}_i$ ist.

Es sei angemerkt, daß als hauptsächliche Anwendung von Satz 1 nicht nur für einzelne Zerlegungen die erwähnte Vereinfachung entsteht, sondern zur Auffindung *aller* topologisch verschiedenen *enklavenfreien* Zerlegungen in n Teilrechtecke ein Algorithmus resultiert, der gegenüber der Aufgabe, *alle* topologisch verschiedenen Zerlegungen in n Teilrechtecke zu finden, wesentlich handlicher ausfällt.

Beweis.
1. Für $n = 2$ ist die Behauptung richtig. Allgemeiner ist sie auch dann richtig, wenn eine Seite von $\mathfrak{R}$ keinen Teilpunkt (d. h. keinen gemeinsamen Randpunkt zweier $\mathfrak{T}_i$) besitzt.

2. Besitze nun jede Seite von $\mathfrak{R}$ einen Teilpunkt. Mit $\mathfrak{a}$, $\tilde{\mathfrak{a}}$ sei ein Paar Gegenseiten von $\mathfrak{R}$ bezeichnet und jeweils mit $\mathfrak{a}_i$, $\tilde{\mathfrak{a}}_i$ das Paar zu $\mathfrak{a}$, $\tilde{\mathfrak{a}}$ paralleler Gegenseiten von $\mathfrak{T}_i$, wobei $\mathfrak{a}_i$ näher als $\tilde{\mathfrak{a}}_i$ an $\mathfrak{a}$ liege. Sodann sei h der *bei allen an* $\mathfrak{a}$ *angrenzenden* $\mathfrak{T}_i$ *kleinste* Abstand zwischen $\tilde{\mathfrak{a}}_i$ und $\mathfrak{a}_i$ $(\subset \mathfrak{a})$.
Wir löschen aus $\mathfrak{R}$ (und allen betroffenen $\mathfrak{T}_i$) den Parallelstreifen aller Punkte, deren Abstand von $\mathfrak{a}$ kleiner als h ist. Danach verbleibt ein Rechteck $\mathfrak{R}^*$ mit einer enklavenfreien Zerlegung Z^* in Rechtecke, deren Anzahl kleiner als n, aber immer noch mindestens 2 ist, da $\tilde{\mathfrak{a}}$ einen Teilpunkt besitzt. Als Induktionsvoraussetzung können wir annehmen, daß Z^* eine zerlegende Gerade $\mathfrak{g}^*$ gestattet.

2.1. Verläuft eine solche parallel zu $\mathfrak{a}$, so ist die Behauptung für Z richtig. Dasselbe gilt, wenn die Verlängerung von $\mathfrak{g}^*$ in den soeben gelöschten Streifen hinein eine zerlegende Gerade von Z ergibt.

2.2. Nunmehr werde angenommen, daß für jede zerlegende Gerade $\mathfrak{g}^*$ von Z^* keine der beiden Möglichkeiten aus 2.1. zutrifft. Die neue (zu $\mathfrak{a}$ im Abstand h parallele) Seite von

[1]) Entartungen der $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{T}_i$ zu Strecken oder Punkten seien nicht zugelassen; $\mathfrak{R}$ und jedes $\mathfrak{T}_i$ habe also innere Punkte. — Statt mit Rechtecken ließe sich der Satz natürlich auch sogleich allgemeiner mit seitenparallelen Parallelogrammen formulieren.

$\mathfrak{R}^*$ sei mit $\mathfrak{a}^*$ bezeichnet. Jede zerlegende Gerade $\mathfrak{g}^*$ von Z^* trifft dann wegen der Minimalität von h die Gerade $\mathfrak{a}^*$ in einem Punkt P, der innerer Punkt einer Seite $\tilde{\mathfrak{a}}_i$ eines vollständig gelöschten $\mathfrak{T}_i$ ist und daher gemeinsame Ecke zweier vollständig erhalten gebliebener $\mathfrak{T}_j$, $\mathfrak{T}_k$ sein muß (Abb. 1). Für $\mathfrak{T}_j$ gibt es nun zwei Möglichkeiten:

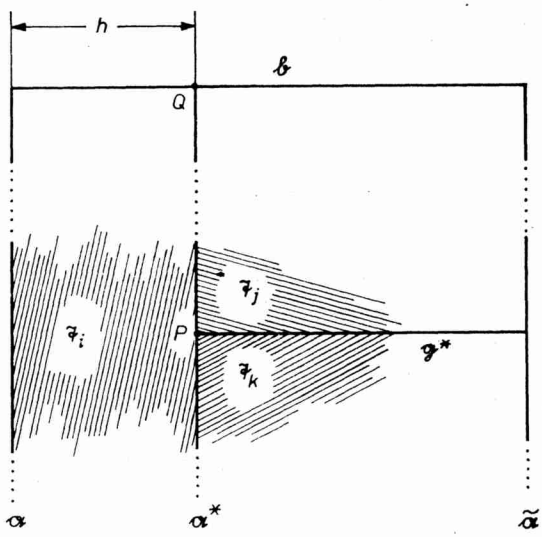

Abb. 1

2.2.1. Erstreckt sich $\mathfrak{T}_j$ bis zu einer Seite $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{R}$, die nicht parallel zu $\mathfrak{a}$ ist, so sind alle Punkte der Strecke zwischen P und $Q = \mathfrak{a}^* \cap \mathfrak{b}$ Randpunkte von $\mathfrak{T}_j$ und je (mindestens) einem (gelöschten, also von $\mathfrak{T}_j$ verschiedenen) Teilrechteck aus Z.

2.2.2. Erstreckt sich $\mathfrak{T}_j$ nicht bis zu einer solchen Seite $\mathfrak{b}$, so muß $\mathfrak{T}_j$ bis zu $\tilde{\mathfrak{a}}$ hin verlaufen und folglich eine zu $\mathfrak{g}^*$ parallele Seite ($\neq \mathfrak{g}^*$) besitzen, die ebenfalls zerlegende Gerade $\mathfrak{g}^{*\prime}$ von Z^* ist. Damit ergibt sich für $P' = \mathfrak{a}^* \cap \mathfrak{g}^{*\prime}$, für ein $\mathfrak{T}_j'$ ($\neq \mathfrak{T}_j$), für $\mathfrak{T}_j$ und für ein $\mathfrak{T}_{i'}$ ($= \mathfrak{T}_i$ oder $\neq \mathfrak{T}_i$) dieselbe Situation wie oben (Abb. 1) für P, $\mathfrak{T}_j$, $\mathfrak{T}_k$ und $\mathfrak{T}_i$. Auch sind alle Punkte der Strecke PP' Randpunkte von $\mathfrak{T}_j$ und je (mindestens) einem Teilrechteck ($\neq \mathfrak{T}_j$) aus Z.

2.3. Da es nicht unendlich viele $\mathfrak{T}_{j'}, \mathfrak{T}_{j''}, \ldots$ gibt, gelangt man nach endlich vielen Schritten 2.2.2. über Punkte $P', P'', \ldots, P^{(m)}$ schließlich zu einem $\mathfrak{T}_{j(m+1)}$, für das 2.2.1. zutrifft. Dann aber ergibt sich aus 2.2.2. für $PP', \ldots, P^{(m-1)}P^{(m)}$ und aus 2.2.1. für $P^{(m)}Q$ auch die Schlußfolgerung von 2.2.1. für PQ selbst.

2.4. Schließlich gelten die in 2.2. und 2.3. mit $\mathfrak{T}_j$ und $\mathfrak{b}$ durchgeführten Überlegungen auch für $\mathfrak{T}_k$ und die Gegenseite $\tilde{\mathfrak{b}}$ von $\mathfrak{b}$. Damit ist insgesamt $\mathfrak{a}^*$ als zerlegende Gerade der Zerlegung Z nachgewiesen.

II. Ein Zerlegungssatz für Dreiecke

Satz 2. *Wird ein Dreieck $\mathfrak{D} = ABC$ durch eine Jordankurve $\mathfrak{k}$ (die mit dem Rand von $\mathfrak{D}$ genau ihre beiden, möglicherweise miteinander zusammenfallenden Endpunkte P, Q gemeinsam hat und sonst ganz im Innern von $\mathfrak{D}$ verläuft) in zwei kongruente Figuren $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}^+$ zerlegt, so ist ($\mathfrak{D}$ gleichschenklig und) $\mathfrak{k}$ halbierende Höhe des Dreiecks $\mathfrak{D}$.*

Vorbereitungen zum Beweis. Alle Kurven und zweidimensionalen Figuren werden stets, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt ist, einschließlich ihrer End- bzw. Randpunkte verstanden. Für alle auftretenden *Polygone* sei stets vorausgesetzt, daß in ihnen keine drei aufeinanderfolgenden Ecken kollinear sind; für *Streckenzüge* sei eine derartige Voraussetzung nicht verlangt; jedoch wird bei *Strecken* stets die Verschiedenheit ihrer beiden Endpunkte voneinander vorausgesetzt.
Die Ausdrucksweise, zwei *Streckenzüge* $X_1X_2X_3\ldots$ und $Y_1Y_2Y_3\ldots$ seien einander kongruent, bedeute stets zugleich auch, daß X_i und Y_i homologe Ecken seien ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Wird dagegen von kongruenten *Polygonen* $X_1X_2X_3\ldots$ und $Y_1Y_2Y_3\ldots$ gesprochen, so sei damit noch keine Festlegung über homologe Ecken verbunden. Mit v bezeichnen wir eine nach Voraussetzung existierende Bewegung der Ebene, die $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{F}^+$ überführt. Ist allgemein $\mathfrak{G}$ irgend eine Figur in der Ebene, so setzen wir kurz $v(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}^+$ und $v^{-1}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}^-$.

Wir formulieren nun als Hilfssätze einige später auftretende Schlüsse, die im Beweis häufiger wiederkehren oder deren Vorwegnahme die spätere Darstellung erleichtert.

Hilfssatz 1. *Gehört ein Punkt X zu $\mathfrak{F}$ (oder zu $\mathfrak{F}^+$), so liegt X^+ (bzw. X^-) in $\mathfrak{D}$.*

Beweis. X^+ liegt in $\mathfrak{F}^+$ (bzw. X^- in $\mathfrak{F}$).

Hilfssatz 2. *Gehört ein Punkt X zum Rand von $\mathfrak{F}$ und liegt X^+ im Innern von $\mathfrak{D}$, so liegt X^+ auf $\mathfrak{k}$.*

Beweis. X^+ gehört zum Rand von $\mathfrak{F}^+$, aber nicht von $\mathfrak{D}$.

Hilfssatz 3. *Gehört eine Strecke XY zum Rand von $\mathfrak{F}$ und liegt ein Punkt der Strecke X^+Y^+ im Innern von $\mathfrak{D}$, so gehört die Strecke X^+Y^+ zu $\mathfrak{k}$.*

Beweis. Nach Hs. 1 liegt die Strecke X^+Y^+ in $\mathfrak{D}$. Jeder innere Punkt von X^+Y^+ ist also innerer Punkt von $\mathfrak{D}$ und liegt folglich nach Hs. 2 auf $\mathfrak{k}$.

Hilfssatz 4. *Liegt ein Punkt X in $\mathfrak{F}$ und ist X^+ ein ebenfalls zu $\mathfrak{F}$ gehörender Punkt des Randes von $\mathfrak{D}$, so fällt X^+ mit P oder Q zusammen.*

Beweis. X^+ gehört auch zu $\mathfrak{F}^+$, also zu $\mathfrak{k}$.

Hilfssatz 5. *Ist X einer der Punkte P, Q oder eine zu $\mathfrak{F}$ gehörende Ecke von $\mathfrak{D}$ und liegt X^+ auf dem Rand von $\mathfrak{D}$, so ist X^+ einer der Punkte P, Q oder eine zu $\mathfrak{F}^+$ gehörende Ecke von $\mathfrak{D}$.*

Beweis. Der Rand von $\mathfrak{F}$ geht durch X, verläuft aber in X nicht geradlinig. Also gilt dasselbe für $\mathfrak{F}^+$ und X^+.

Hilfssatz 6. *Ist das Dreieck $\mathfrak{D}^+$ ganz in $\mathfrak{D}$ gelegen, so stimmt das Tripel (A^+, B^+, C^+) bis auf die Reihenfolge mit dem Tripel (A, B, C) überein.*

Beweis. Andernfalls enthielte mindestens eine der Strecken A^+B^+, B^+C^+, C^+A^+ innere Punkte von $\mathfrak{D}$ und zerlegte daher, genügend verlängert, $\mathfrak{D}$ in zwei Polygone $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ mit positiven Flächeninhalten p, q. Der dritte, nicht auf dieser Strecke gelegene Eckpunkt von $\mathfrak{D}^+$ müßte in genau einem dieser Polygone, etwa in $\mathfrak{P}$, liegen. Der Flächeninhalt von $\mathfrak{D}^+$ wäre dann mindestens um q kleiner als der von $\mathfrak{D}$.

Durchführung des Beweises.

1. *Es gebe eine Seite des Dreiecks* $\mathfrak{D}$, *die beide Punkte* P, Q *enthält.*
Die Seite AB enthalte etwa beide Punkte P, Q. Diejenige der beiden Figuren $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}^+$; der C angehört, enthält dann auch A und B; es sei dies etwa $\mathfrak{F}$.
Nach Hs. 1 liegen nun A^+, B^+, C^+ in $\mathfrak{D}$; nach Hs. 6 stimmt folglich C mit einem der Punkte A^+, B^+, C^+ überein und müßte somit nach Hs. 4 (angewandt auf $X = C^-$) mit P oder Q zusammenfallen, was unmöglich ist.

2. *Es gebe keine Seite des Dreiecks* $\mathfrak{D}$, *die beide Punkte* P, Q *enthält.*
In diesem Fall kann durch geeignete Wahl der Bezeichnungen erreicht werden, daß P im Innern der Strecke AB liegt und Q entweder mit C zusammenfällt oder im Innern der Strecke BC liegt. Eine der beiden Figuren $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}^+$, etwa $\mathfrak{F}$, enthält dann auf ihrem Rande die Strecken PA, AC und (falls $Q \neq C$ ist) CQ, die andere Figur $\mathfrak{F}^+$ die Strekken QB und BP.
Nach Hs. 1 liegen nun A^+ und C^+ in $\mathfrak{D}$; daher sind folgende Möglichkeiten zu untersuchen:

2.1. *Die Punkte* A^+, C^+ *liegen nicht beide auf dem Rand von* $\mathfrak{D}$. Nach Hs. 3 gehört die Strecke A^+C^+ zu $\mathfrak{k}$. Liegt nun etwa einer der Punkte A^+, C^+ auf dem Rand von $\mathfrak{D}$, so fällt er also mit P oder Q zusammen. Daher gilt in jedem Fall $A^+ \neq B$ und $C^+ \neq B$. Die Strahlen BA^+ und BC^+ verlaufen im Winkelraum des $\sphericalangle ABC$, mindestens einer von ihnen sogar im Innern.
Außerdem folgt noch $A \neq B^-$ und $C \neq B^-$. Nach Hs. 1 liegt aber B^- in $\mathfrak{D}$. Somit ergibt sich $\sphericalangle AB^-C \geqq \sphericalangle ABC > \sphericalangle A^+BC^+$ im Widerspruch zur Kongruenz der Streckenzüge AB^-C und A^+BC^+.

2.2. *Die Punkte* A^+, C^+ *liegen beide auf dem Rand von* $\mathfrak{D}$.

2.2.1. *Es gebe keine Seite des Dreiecks* $\mathfrak{D}$, *die beide Punkte* A^+, C^+ *enthält.*
Nach Hs. 3 gehört die Strecke A^+C^+ zu $\mathfrak{k}$. Da sie in $\mathfrak{D}$ von Rand zu Rand verläuft, ist sie folglich sogar die gesamte Kurve $\mathfrak{k}$ und stimmt demnach schließlich mit der Strecke PQ überein. Daher scheidet zunächst der Fall $Q \neq C$ aus; denn in ihm wäre $\mathfrak{F}$ das Viereck $APQC$ und $\mathfrak{F}^+$ das Dreieck PQB im Widerspruch zu ihrer Kongruenz.
Ist nun aber $Q = C$, so folgt $AC = A^+C^+ = PC$ und daher

$$\sphericalangle PBC, \quad \sphericalangle PCB < \sphericalangle APC < 90° < \sphericalangle BPC,$$

was ebenfalls der Kongruenz von $\mathfrak{F} = APC$ und $\mathfrak{F}^+ = PCB$ widerspricht.

2.2.2. *Es gebe eine Seite des Dreiecks* $\mathfrak{D}$, *die beide Punkte* A^+, C^+ *enthält.*
Entweder müssen A^+, C^+ beide der Strecke QB oder beide der Strecke BP angehören denn sonst gäbe es Punkte der Strecke A^+C^+, die zugleich innere Punkte einer de Strecken PA, AC und (falls $Q \neq C$ ist) CQ wären, was nach Hs. 4 auf den Wider spruch führt, daß sie gleichzeitig noch mit P oder Q zusammenfallen müßten.
Nunmehr folgt nach Hs. 5 sogar, daß die Strecke A^+C^+ mit einer der Strecken QB, BP genau zusammenfallen muß. Fällt insbesondere A^+C^+ auch mit einer gesamten Seite des Dreiecks $\mathfrak{D}$ zusammen, so muß ($Q = C$ und) dies die Seite ($QB =$) CB sein. Hiernach kann durch geeignete Wahl der Bezeichnungen einer der folgenden Fälle erreicht werden:

2.2.2.1. $A^+ = Q = C$; $C^+ = B$.
Wegen $AC = CB$ ist $\mathfrak{D}$ gleichschenklig.

Nach Hs. 1 liegt P^+ in $\mathfrak{D}$. Auf der Strecke CB liegt P^+ nicht, da P nicht auf AC liegt. Im Innern der Strecke AC oder in A kann P^+ ebenfalls nicht liegen, da dies nach Hs. 4 auf den Widerspruch führt, daß P^+ gleichzeitig noch mit P oder Q zusammenfallen müßte.
Folglich ist P^+ derjenige im Innern von $\mathfrak{D}$ oder von AB gelegene Punkt, für den die Streckenzüge CAP und BCP^+ kongruent sind. Hiernach ergibt Hs. 3, daß die Strecke CP^+ zu $\mathfrak{k}$ gehört. Ebenso folgt unter Vertauschung von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^+$, daß P^- im Innern von $\mathfrak{D}$ oder von AB liegt, daß die Streckenzüge CBP und ACP^- kongruent sind sowie daß die Strecke CP^- zu $\mathfrak{k}$ gehört.
Da jedoch von C aus nicht zwei auf verschiedenen Geraden liegende, zu $\mathfrak{k}$ gehörende Strecken in das Innere von $\mathfrak{D}$ hineinführen können, erhalten wir insgesamt

$$\sphericalangle ACP^- = \sphericalangle CBP = \sphericalangle CAP = \sphericalangle BCP^+ = 45°.$$

Wäre nun $AP > BP$, so läge P^+ außerhalb $\mathfrak{D}$; wäre $AP < BP$, so P^-. Also ist $AP = BP$, und $\mathfrak{k}$ ist die halbierende Höhe CP.

2.2.2.2. $C^+ = Q = C$; $A^+ = B$.
Wegen $AC = BC$ ist $\mathfrak{D}$ gleichschenklig.
Nach Hs. 1 liegt P^+ in $\mathfrak{D}$; wegen der Kongruenz der Streckenzüge CAP und CBP^+ liegt folglich P^+ auf AB so, daß $AP = BP^+$ gilt. Nach Hs. 5 ist genauer $P^+ = P$. Die Bewegung v ist folglich die Spiegelung an CP.
Für jeden Punkt X auf $\mathfrak{k}$ gehört auch X^+ zu $\mathfrak{k}$. Dies folgt, wenn X innerer Punkt von $\mathfrak{D}$ ist, aus Hs. 2; für die Endpunkte C, P von $\mathfrak{k}$ folgt es aus $C^+ = C$; $P^+ = P$.
Es sei nun $X = X(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ eine stetige eineindeutige Parameterdarstellung von $\mathfrak{k}$. Wir nehmen an, $\mathfrak{k}$ wäre nicht die halbierende Höhe CP. Dann gibt es ein r mit $0 < r < 1$, so daß $X(r)$ nicht auf CP liegt. Die offene, durch die Gerade CP begrenzte Halbebene, in der $X(r)$ liegt, sei mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet.
Aus der Stetigkeit von $X(t)$ folgt dann weiter die Existenz zweier Zahlen g, h $(0 \leqq g < r < h \leqq 1)$, so daß $X(g)$ und $X(h)$ auf CP liegen, aber alle $X(t)$ $(g < t < h)$ in $\mathfrak{H}$. Schließlich ergibt sich der Widerspruch, daß die beiden Teilbögen $X(t)$ $(g \leqq t \leqq h)$ und $\big(X(t)\big)^+$ $(g \leqq t \leqq h)$ von $\mathfrak{k}$ ein Flächenstück $\mathfrak{U}$ einschließen, das, nur mit eventueller Ausnahme der Punkte $X(g)$, $X(h)$, ganz im Innern von $\mathfrak{D}$ liegt.

2.2.2.3. $A^+ = P$; $C^+ = B$.
Nach Hs. 1 liegt P^+ in $\mathfrak{D}$, so daß die Lage von P^+ durch die Kongruenz der Streckenzüge CAP und BPP^+ bestimmt ist. Nach Hs. 3 gehört die Strecke PP^+ zu $\mathfrak{k}$.
Gehören für ein $n = 1, 2, \ldots$ bereits die Strecken

$$PP^+, P^+P^{++}, \ldots, P^{(n-1)}P^{(n)}$$

zu $\mathfrak{k}$, dann liegt nach Hs. 1 auch $P^{(n+1)}$ in $\mathfrak{D}$. Aus der Kongruenz der Streckenzüge

$$CAPP^+ \ldots \text{ und } BPP^+P^{++} \ldots$$

schließen wir nun:
Einerseits sind die Geraden $P^{(i-1)}P^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ abwechselnd parallel (aber nicht gleich) zu den Geraden AC bzw. AB; also ist auch auf die Strecke $P^{(n)}P^{(n+1)}$ wieder Hs. 3 anwendbar, weswegen sie ebenfalls zu $\mathfrak{k}$ gehört. Andererseits ergeben sich $A, P^+, P^{(3)}, \ldots$ und $P, P^{++}, P^{(4)}, \ldots$ als zwei Folgen äquidistanter Punkte auf dem Strahl AP^+ bzw. dem hierzu parallelen Strahl PP^{++}. Für genügend großes n liegt somit $P^{(n+1)}$ nicht mehr in $\mathfrak{D}$; Widerspruch.

2.2.2.4. $C^+ = P$; $A^+ = B$.

Nach Hs. 1 liegt P^+ in $\mathfrak{D}$. Auf der Geraden BP liegt P^+ nicht, da P nicht auf der Geraden AC liegt. Im Innern der Strecke AC oder im Innern von $\mathfrak{D}$ kann P^+ ebenfalls nicht liegen, da nach Hs. 3 die Strecke BP^+ dann zu $\mathfrak{k}$ gehören, also B mit P oder Q zusammenfallen müßte. Folglich ist P^+ derjenige Punkt der Strecke BC, für den $AP = BP^+$ gilt. Hieraus ergibt sich einerseits $BP^+ = AB - PB = AB - CA < BC$, d. h., P^+ liegt im Innern der Strecke BC und fällt folglich nach Hs. 5 mit Q zusammen. Andererseits folgt aus $\sphericalangle PAC = \sphericalangle P^+BP$, daß $\mathfrak{D}$ gleichschenklig ist mit $AC = BC$ (vgl. Abb. 2).

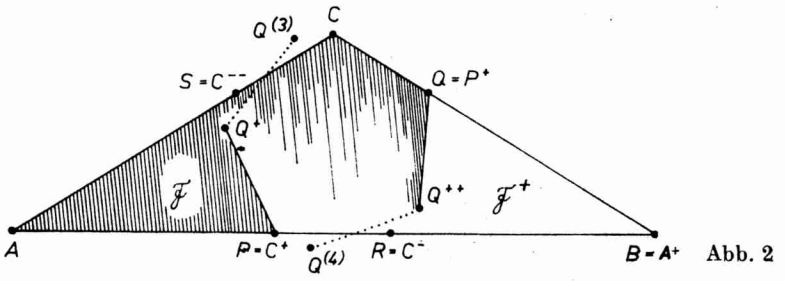

Abb. 2

Nach Hs. 1 liegt Q^+ in $\mathfrak{D}$, so daß die Lage von Q^+ durch die Kongruenz der Streckenzüge ACQ und BPQ^+ bestimmt ist. Nach Hs. 3 gehört die Strecke PQ^+ zu $\mathfrak{k}$.
Es seien für ein $n = 1, 2, \ldots$ bereits die Strecken

$$PQ^+, QQ^{++}, \ldots, Q^{(n-2)}Q^{(n)}$$

zu $\mathfrak{k}$ gehörig. Dann liegt einerseits die Strecke $Q^{(n-1)}Q^{(n+1)}$ nach Hs. 1 in $\mathfrak{D}$ und gehört, wenn sie nicht auf dem Rand von $\mathfrak{D}$ liegt, nach Hs. 3 auch wieder zu $\mathfrak{k}$. Andererseits erhalten wir für die Lage der $Q^{(i)}$ folgende Aussagen:
Die Kongruenz der Streckenzüge

$$APQ^+Q^{(3)} \ldots \text{ und } BQQ^{++}Q^{(4)} \ldots$$

sowie die Kongruenz der Streckenzüge

$$ACQQ^{++} \ldots \text{ und } BPQ^+Q^{(3)} \ldots,$$

sukzessive abwechselnd angewandt, ergeben zunächst, daß $\mathfrak{s} = PQ^+Q^{(3)}\ldots$ und $\mathfrak{s}^+ = QQ^{++}Q^{(4)}\ldots$ Sehnenzüge in je einem Kreis $\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{c}^+$ sind, bestehend aus Sehnen der Länge CQ, von denen je zwei aufeinanderfolgende einen Winkel $= \sphericalangle ACQ$ einschließen.[1])
Verfolgt man $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}^+$ rückwärts, so führt die Kongruenz der Streckenzüge Q^+PC^- und $Q^{++}QC$ sowie die Kongruenz der Streckenzüge QCC^{--} und Q^+PC^- zu denjenigen Punkten $R = C^-$ und $S = C^{--}$ auf den Strecken PB bzw. CA, für die ebenfalls $PR = CS = CQ$ ist. Die Dreiecke RPQ^+ und SCQ haben $\mathfrak{c}$ bzw $\mathfrak{c}^+$ als Umkreis.
Es wird nun $AP = BQ = AS = BR$ und somit $AR = BP = AC = BC$. Folglich sind $CRPS$ und $PCQR$ gleichschenklige Trapeze, also auch QPQ^+C. Die Umkreise dieser drei Trapeze fallen zusammen; demnach erhalten wir $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^+$.
Für genügend großes n haben daher die Strecken $Q^{(n-1)}Q^{(n+1)}$ und SC nichtleeren Durchschnitt sowie gleichfalls die Strecken $Q^{(n)}Q^{(n+2)}$ und RP, während alle vorange-

[1]) An diese Stelle des Beweises schließt die Fortsetzung in Bem. 2 an.

henden Punkte von $\mathfrak{s}$ bzw. $\mathfrak{s}^+$ bis zurück zu den Anfangspunkten P bzw. Q (diese selbst ausgenommen) innere Punkte von $\mathfrak{D}$ sind. Die zu $\mathfrak{k}$ gehörenden Teile von $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}^+$ zerlegen hiernach $\mathfrak{D}$ bereits in drei Flächenstücke; Widerspruch.

Bemerkung 1. Man betrachte den Fall $Q^{(n-1)} = S, Q^{(n)} = R$ (oder auch nur in genügender Näherung $Q^{(n-1)} \approx S, Q^{(n)} \approx R$) und ändere $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}^+$ so ab, daß zwei in genügend engem Abstand spiralenförmig umeinanderlaufende, im Mittelpunkt von $\mathfrak{c}$ zusammentreffende Streckenzüge entstehen (Abb. 3). Damit erkennt man, daß *der bewiesene Satz nicht etwa folgende Veränderung zuläßt*: Statt Kongruenz von $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}^+$ wird nur *Fast-Kongruenz* vorausgesetzt (d. h., der Rand von $\mathfrak{F}^+$ liegt für genügend kleines $\delta > 0$ im δ-Streifen um $v(\mathfrak{r})$, wo v eine Bewegung und $\mathfrak{r}$ der Rand von $\mathfrak{F}$ ist); statt trivialer Zerlegung wird nur *fast-triviale* Zerlegung behauptet (d. h., $\mathfrak{k}$ liegt für vorgegebenes kleines $\varepsilon > 0$ im ε-Streifen um eine Höhe und zugleich im ε-Streifen um eine Seitenhalbierende).

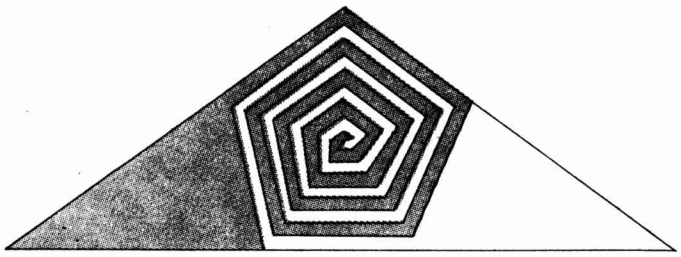

Abb. 3

Bemerkung 2. Will man im obigen Beweis 2.2.2.4, nachdem die Lage der $Q^{(i)}$ auf $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}^+$ hergeleitet ist, nicht nochmals zur Gewinnung von $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^+$ (und damit insbesondere zum Anschließen der Bem. 1) „globale Kongruenz"betrachtungen (nämlich für Strecken $> CQ$) vornehmen, so kann man stattdessen den Beweis kürzer zu Ende führen, indem man mit Motiven auskommt, die auch in dem Sinne einfacher sind, daß sie mehr „nur topologischer" Natur sind:
Die Sehnenzüge $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}^+$ laufen, genügend lange fortgesetzt, jeder in sich zurück. Also ergibt sich (unabhängig davon, ob $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}^+$ nun aus anderen Gründen vorher auf Seiten des Dreiecks treffen oder einander begegnen oder nicht) jedenfalls ein Teil von $\mathfrak{k}$ als ein Streckenzug, der in $\mathfrak{D}$ von Rand zu Rand verläuft und folglich bereits die gesamte Kurve $\mathfrak{k}$ sein muß; d. h., diese ist von der Form eines *Streckenzuges* $PX_1X_2 \dots X_mQ$ Dann aber hat $\mathfrak{F} = APX_1 \dots X_mQC$ eine Ecke mehr als $\mathfrak{F}^+ = PX_1 \dots X_mQB$.

Manuskripteingang: 25. 9. 1970

VERFASSER:

LUDWIG STAMMLER, Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg