in 8') von der gleichen Größenordnung, was der Entwicklung den Schein außerordentlicher Konvergenz verleihen wird. In der Tat sind aber diese Koeffizienten in der Entwicklung 4) wieder mit den großen Werten P_{nj} in Kombination. Es kommt also schließlich doch auf das Verhalten der C und S an, ob die Entwicklung eine Konvergenz zeigt, und wie viele Glieder man beibehalten muß.

II.

Die im vorigen berechneten Konstanten sollen nun zur Herstellung einer Entwicklung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde verwendet werden. Mit Rücksicht auf den Hauptzweck der Rechnungen, nämlich die Untersuchung der Schwereverhältnisse, sowie vielleicht im Interesse mancher anderer Probleme, bei welchen die Massen der Ozeane besonders behandelt werden müssen, wurde, wie schon in der Einleitung erwähnt, eine zweite Entwicklung hergestellt, welche nur die Tiefen der Meere darstellen, in allen Punkten des Festlandes aber den Wert Null geben soll. Eine dritte Entwicklung, welche nur die Höhe des Festlandes darstellen, in allen Punkten des Meeres aber den Wert Null geben soll, wurde zur Kontrolle berechnet. Jedes Glied der 1. Entwicklung ist also gleich der Summe der entsprechenden Glieder der beiden anderen Entwicklungen. Wir haben also 3 Entwicklungen herzustellen

A. Lithosphäre
B. Hydrosphäre
C. physische Erdoberfläche.

Bestimmung der mittleren Höhen und mittleren Tiefen auf der Erdoberfläche.

Das darzustellende Material wurde im Wesentlichen dem Erdprofilen von Heiderich [1]) entnommen. Leider zeigte sich, daß die der Publikation beigegebene Tafel im Maßstab 1 : 8000000 für die Längen und 1 : 800 000 für die Höhen die Verhältnisse ganz ungenügend widergibt. Mit Erlaubnis des Verfassers aber und durch das Entgegenkommen des Herrn Prof. E. Brückner, des derzeitigen Vorstandes des geographischen Instituts der Wiener Universität, gelang es mir, Heiderichs Originalzeichnungen im Maßstabe 1 : 2 000 000 resp. 1 : 200 000 zu erhalten, für welches Entgegenkommen ich hier meinen besten Dank ausspreche. Um die modernen Forschungsergebnisse zu berücksichtigen, wurden die Profile nach Dr.

---

1) Franz Heiderich: Die mittleren Erhebungsverhältnisse der Erdoberfläche (Geographische Abhandlungen herausg. von A. Penck in Wien, Bd. V, Heft 1.)

M. Groll's Meerestiefenkarten [1]) verbessert. Daraus konnten nun die Höhen- und Tiefenverhältnisse längs der Parallelkreise von 5° zu 5° zwischen + 80° und − 65° abgelesen werden.

Da die Durchführung der Entwicklung auf Werte in der Nähe der Pole nicht verzichten kann, mußten die fehlenden Parallelkreise ergänzt werden. Für den 85. Nordparallel wurde hierzu Stielers Handatlas herangezogen, für die Südpolargegenden die Karten von Adametz [2]) und Stieler, sowie die Angaben Amundsens [3]). Bei der geringen Zahl der Messungen, die aus diesen Gebieten vorliegen, blieb beim Zeichnen der Profile der Willkür ein großer Spielraum und man mußte sich begnügen, die Lücken durch einen möglichst einfachen Zug zu überbrücken. Es handelt sich dabei aber nur um kleine Gebiete.

Jedes Profil wurde nun in 32 Teile zerlegt, derart, daß die für die Entwicklung verwendeten Meridiane die einzelnen Teile in der Mitte durchschneiden. Es reicht somit der erste Teil von 5° 37′ 30″ w. L. v. Gr. bis 5° 37′ 30″ östl. L., der 2. Teil von 5° 37′ 30″ bis 16° 52′ 30″ u. s. f., so daß jeder Teil eine Ausdehnung von 11° 15′ erhält. Die einzelnen Teile wurden nun mit einem gewöhnlichen Polarplanimeter ausgemessen, und durch Multiplikation mit einer Konstanten, die von der linearen Breite des Teiles, den Maßstäben des Profiles und von der Planimeterkonstante abhängt, ergab sich für den betreffenden Teil ein mittlerer Wert der Höhe oder Tiefe.

Die gleiche Operation wurde nun mit der Abänderung wiederholt, daß die Höhe des Festlandes immer gleich Null angenommen wurde.

Die Anwendung der 2. Neumann'schen Methode verlangt nun die Werte nicht von 5° zu 5° in Breite, sondern von den durch 13) gegebenen Stellen, die beiläufig je 10° auseinanderliegen. Die Abweichungen gegen die ganzen Zehner sind gering, im Maximum 2°8′ beim 80. Parallelkreis, gehen sie auf die Werte: 1° 56′, 1° 40′, 1° 24′, 1° 7′, 51′, 34′, 17′, 0 herunter. Bei der Unsicherheit welche den mittleren Höhen überhaupt anhaftet, können diese Unterschiede außer Acht bleiben.

Es wurde nun für jeden Zehnerparallel das Mittel der umschließenden Fünfer genommen, wobei der Cosinus der Breite als

1) M. Groll: Meerestiefenkarten (Institut f. Meereskunde d. Univ. Berlin. Veröffentl. Neue Folge A Heft 2).

2) E. Adametz: Die kartographische Entwicklung der Antarktis (Kartographische und schulgeographische Zeitschrift 1912 Heft 8).

3) A. Amundsen: Die Eroberung des Südpoles, München 1912.

Gewicht eingeführt wurde, um der Meridiankonvergenz Rechnung zu tragen. Das so gefundene Mittel wurde dann mit dem Zehnerwert zu einem neuen Mittel vereinigt. Es ist also für die Breite φ:

$$h = \frac{1}{2}\left[\frac{h_{\varphi-5^0}\cos(\varphi-5^0)+h_{\varphi+5^0}\cos(\varphi+5^0)}{\cos(\varphi-5^0)+\cos(\varphi+5^0)}+h_\varphi\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{h_{\varphi-5}+h_{\varphi+5}}{2}+h_\varphi\right]+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}5^0\,\frac{h_{\varphi-5}-h_{\varphi+5}}{4}.$$

Das letzte Glied stellt nur eine kleine Korrektion dar. So entstanden die Wertsysteme der Tafel VI, welche die Grundlage für die 3 Entwicklungen A, B, C bilden. Dabei wurden für C die Werte $A-B$ genommen.

Bestimmung der intermediären Konstanten C_j^i und S_j^i und der Grössen A_n^j und B_n^j.

Die Entwicklung beginnt mit der Bestimmung der intermediären Konstanten C_j^i und S_j^i nach den Formeln 7). Man hat zu diesem Zwecke die zu einem Parallelkreise gehörenden Werte der Tafel VI mit dem Cosinus oder Sinus des zugehörigen (j fachen) Vielfachen seiner geographischen Länge zu multiplizieren und die Summe zu bilden. Da aber der ganze Umkreis in 32, jeder Quadrant also in 8 gleiche Teile geteilt ist, so kommen die gleichen absoluten Werte des Cosinus oder Sinus mehrmals vor, und zwar bei ungeradem j viermal, bei geradem j mindestens 8 mal. Man wird sich also die Sache dadurch vereinfachen, daß man die entsprechenden Werte gleich zusammenzieht, wobei man nur auf das Vorzeichen zu achten hat.

Man gelangt leicht zu folgendem Schema. Wir geben den Meridianen die Nummern 0 bis 31 und bilden die folgenden Kombinationen

$0-16 \quad = a$	—
$1-17-(15-31) = b$	$1-17+(15-31) = b'$
$2-18-(14-30) = c$	$2-18+(14-30) = c'$
$3-19-(13-29) = d$	$3-19+(13-29) = d'$
$4-20-(12-28) = e$	$4-20+(12-28) = e'$
$5-21-(11-27) = f$	$5-21+(11-27) = f'$
$6-22-(10-26) = g$	$6-22+(10-26) = g'$
$7-23-(9-25) = h$	$7-23+(9-25) = h'$
—	$8-24 = i \quad = i'$

$$
\begin{array}{ll}
0+16-(8+24) = a_1 & 0+16+(8+24) = a_2 \\
1+17-(9+25) = b_1 & 1+17+(9+25) = b_2 \\
2+18-(10+26) = c_1 & 2+18+(10+26) = c_2 \\
3+19-(11+27) = d_1 & 3+19+(11+27) = d_2 \\
4+20-(12+28) = e_1 & 4+20+(12+28) = e_2 \\
5+21-(13+29) = f_1 & 5+21+(13+29) = f_2 \\
6+22-(14+30) = g_1 & 6+22+(14+30) = g_2 \\
7+23-(15+31) = h_1 & 7+23+(15+31) = h_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
a_2 - e_2 = a_3 & a_2 + e_2 = a_3' & a_3' + c_3' = a_4' \\
b_2 - f_2 = b_3 & b_2 + f_2 = b_3' & b_3' + d_3' = b_4' \\
c_2 - g_2 = c_3 & c_2 + g_2 = c_3' & \\
d_2 - h_2 = d_3 & d_2 + h_2 = d_3' &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll|ll}
a_1 = p & — & a_3 = p_2 & — \\
b_1 - h_1 = q & b_1 + h_1 = q' & b_3 - d_3 = q_2 & b_3 + d_3 = q_2' \\
c_1 - g_1 = r & c_1 + g_1 = r' & — & c_3 = r_2' \\
d_1 - f_1 = s & d_1 + f_1 = s' & & \\
— & e_1 = t' & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll|l}
a_3' - c_3' = p_3 & — & a_4' - b_4' = p_4 \\
— & b_3' - d_3' = q_3' &
\end{array}
$$

Setzen wir dann noch:

$$\gamma_0 = \frac{1}{p} \quad \gamma_1 = \frac{1}{p}\cos\lambda_0 = \frac{1}{p}\sin 7\lambda_0$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{p}\cos 2\lambda_0 = \frac{1}{p}\sin 2\lambda_0 \cdots \gamma_7 = \frac{1}{p}\cos 7\lambda_0 = \frac{1}{p}\sin\lambda_0 \quad \gamma_8 = 0,$$

wo $\lambda_0 = 11^0 15'$ ist, so finden wir:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= a\gamma_0 + b\gamma_1 + c\gamma_2 + d\gamma_3 + e\gamma_4 + f\gamma_5 + g\gamma_6 + h\gamma_7 \\
C_3 &= a\gamma_0 - f\gamma_1 - g\gamma_2 + b\gamma_3 - e\gamma_4 - h\gamma_5 + c\gamma_6 - d\gamma_7 \\
C_5 &= a\gamma_0 - d\gamma_1 + g\gamma_2 + h\gamma_3 - e\gamma_4 + b\gamma_5 - c\gamma_6 + f\gamma_7 \\
C_7 &= a\gamma_0 - h\gamma_1 - c\gamma_2 + f\gamma_3 + e\gamma_4 - d\gamma_5 - g\gamma_6 + b\gamma_7 \\
C_9 &= a\gamma_0 + h\gamma_1 - c\gamma_2 - f\gamma_3 + e\gamma_4 + d\gamma_5 - g\gamma_6 - b\gamma_7 \\
C_{11} &= a\gamma_0 + d\gamma_1 + g\gamma_2 - h\gamma_3 - e\gamma_4 - b\gamma_5 - c\gamma_6 - f\gamma_7 \\
C_{13} &= a\gamma_0 + f\gamma_1 - g\gamma_2 - b\gamma_3 - e\gamma_4 + h\gamma_5 + c\gamma_6 + d\gamma_7 \\
C_{15} &= a\gamma_0 - b\gamma_1 + c\gamma_2 - d\gamma_3 + e\gamma_4 - f\gamma_5 + g\gamma_6 - h\gamma_7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_2 &= p\gamma_0 + q\gamma_2 + r\gamma_4 + s\gamma_6 \\
C_6 &= p\gamma_0 - s\gamma_2 - r\gamma_4 + q\gamma_6 \\
C_{10} &= p\gamma_0 + s\gamma_2 - r\gamma_4 - q\gamma_6 \\
C_{14} &= p\gamma_0 - q\gamma_2 + r\gamma_4 - s\gamma_6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_1 &= b'\gamma_7 + c'\gamma_6 + d'\gamma_5 + e'\gamma_4 + f'\gamma_3 + g'\gamma_2 + h'\gamma_1 + i'\gamma_0 \\
S_3 &= f'\gamma_7 - g'\gamma_6 + b'\gamma_5 + e'\gamma_4 - h'\gamma_3 + c'\gamma_2 + d'\gamma_1 - i'\gamma_0 \\
S_5 &= d'\gamma_7 - g'\gamma_6 + h'\gamma_5 - e'\gamma_4 + b'\gamma_3 + c'\gamma_2 - f'\gamma_1 + i'\gamma_0 \\
S_7 &= -h'\gamma_7 + c'\gamma_6 + f'\gamma_5 - e'\gamma_4 - d'\gamma_3 + g'\gamma_2 + b'\gamma_1 - i'\gamma_0 \\
S_9 &= -h'\gamma_7 - c'\gamma_6 + f'\gamma_5 + e'\gamma_4 - d'\gamma_3 - g'\gamma_2 + b'\gamma_1 + i'\gamma_0 \\
S_{11} &= d'\gamma_7 + g'\gamma_6 + h'\gamma_5 + e'\gamma_4 + b'\gamma_3 - c'\gamma_2 - f'\gamma_1 - i'\gamma_0 \\
S_{13} &= f'\gamma_7 + g'\gamma_6 + b'\gamma_5 - e'\gamma_4 - h'\gamma_3 - c'\gamma_2 + d'\gamma_1 + i'\gamma_0 \\
S_{15} &= b'\gamma_7 - c'\gamma_6 + d'\gamma_5 - e'\gamma_4 + f'\gamma_3 - g'\gamma_2 + h'\gamma_1 - i'\gamma_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_2 &= q'\gamma_6 + r'\gamma_4 + s'\gamma_2 + t'\gamma_0 \\
S_6 &= -s'\gamma_6 + r'\gamma_4 + q'\gamma_2 - t'\gamma_0 \\
S_{10} &= -s'\gamma_6 - r'\gamma_4 + q'\gamma_2 + t'\gamma_0 \\
S_{14} &= q'\gamma_6 - r'\gamma_4 + s'\gamma_2 - t'\gamma_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_4 &= p_2\gamma_0 + q_2\gamma_4 & \qquad S_4 &= q_2'\gamma_4 + r_2'\gamma_0 \\
C_{12} &= p_2\gamma_0 - q_2\gamma_4 & S_{12} &= q_2'\gamma_4 - r_2'\gamma_0 \\
C_8 &= p_3\gamma_0 & S_8 &= q_3'\gamma_0 \\
2\,C_{16} &= p_4\gamma_0 & S_{16} &= 0.
\end{aligned}
$$

C_0 endlich ist das arithmetische Mittel aus allen Werten eines Parallelkreises.

Nach diesem Schema wurden die Größen C_j^i und S_j^i und zwar für die 3 Entwicklungen A, B und C selbständig berechnet. Die Kontrollgleichung $C = A - B$ ergab Abweichungen, welche den Betrag von $\pm 2^m$ nirgends überschritten. Daran schloß sich die Berechnung von A_n^j und B_n^j, die ebenfalls für alle 3 Entwicklungen selbständig ausgeführt wurde. Um die Kontrolle sicherer zu gestalten, wurden aber in C die genauen Werte $A - B$ zu Grunde gelegt. Hierzu ist weiter nichts zu bemerken, als daß die Rechnung nunmehr um eine Stelle genauer geführt werden mußte, um die Kontrollgleichung auf wenige Einheiten der letzten Stelle zum stimmen zu bringen.

In der Tafel VII sind die vollständigen Entwicklungen A und B gegeben. Für C kann man ohne weiteres $A - B$ nehmen, nachdem die Kontrollgleichung keine wesentlichen Unterschiede ergeben hat. Die Glieder erscheinen alle in der Form

$$a \cdot 10^k P_{nj}(\mu) \left\{ \begin{matrix} \cos j\lambda \\ \sin j\lambda \end{matrix} \right. .$$

Die Einführung der Zehnerpotenzen ist durch die großen Unterschiede der Größenordnung der P_{nj} bedingt, welche in Tafel III zum Ausdruck kommt. Der Exponent k wurde so gewählt, daß der Zahlenkoeffizient a beiläufig dem entspricht, was die Amplitude des betreffenden Gliedes in Metern ausmacht. Da somit die Amplitude noch immer etwa 5 mal größer, oder 2 mal kleiner sein kann als a, so läßt sich aus diesen Tafeln die Konvergenz nur schlecht entnehmen, und wir müssen daher auch mit dem Urteil darüber, d. i. über die Stärke des Abnehmens der Koeffizienten bis zur Besprechung der Darstellung zurückhalten.

Bezüglich der technischen Seite der Herstellung einer solchen Entwicklung möge noch bemerkt werden, daß die Rechenarbeit keine sehr bedeutende ist. Die Berechnung der Größen C_j^i und S_j^i erfordert 8, die der A_n^j und B_n^j nur 6 Seiten Rechenpapieres im Format 40×25 cm für jede einzelne der 3 Entwicklungen.

Berechnung der Darstellung.

Es ist nun die Frage zu beantworten, in wie weit die Entwicklungen ein brauchbares Bild der Erdoberfläche geben, oder wenigstens das wiedergeben, was die Tafel VI enthält. Es bestand ursprünglich die Absicht die Berechnung der Darstellung von den niederen zu höheren Ordnungen der Kugelfunktionen fortschreiten zu lassen, um zu erkennen, wie sich das Erdbild durch Hinzutreten der höheren Ordnungen nach und nach vervollständigt. Ich bin aber in dieser Richtung nur bis zur 5. Ordnung fortgeschritten. Im Weiteren steigt die Arbeit dann derart ins Unsgemessene, daß ich davor zurückschreckte. Ich habe daher die Berechnung der einzelnen Y (nach Formel 4) aufgegeben, und gleich von vornherein angestrebt, alle Glieder verschiedener Ordnung zusammenzufassen, welche mit gleichen Cosinus- oder Sinus-Faktoren multipliziert sind, mit anderen Worten im System der Tafel VII nicht kolonnenweise, sondern zeilenweise fortzuschreiten. Die Arbeit geht dadurch mindestens auf den 10. Teil herunter.

Die Aequidistanz der Meridiane erlaubt dabei noch einige Abkürzungen. Man rechnet alle Glieder zunächst nur für einen Quadranten. Bei den Gliedern gerader Ordnung reicht man schon mit der direkten Berechnung eines halben resp. Viertel- oder Achtelquadranten aus und kann die auf den Quadranten fehlenden

Werte dann nach der Symmetrie ergänzen. Man summiert dann die geraden und ungeraden Sinus- resp. Cosinusglieder, jede Gruppe für sich, und erhält für jede dieser Gruppen die Werte für den Quadranten als Summe von 8 Zahlen. Nun schreibt man diese Gruppen nach der Symmetrie für die ganze Erde aus, und erhält das Schlußresultat durch Addition von 4 Zahlen für jeden Netzpunkt, wozu als 5. noch das von der Länge unabhängige Glied der 1. Zeile in Tafel VII tritt.

Das Resultat dieser ziemlich mühevollen Rechnung ist in den Tafeln VIII für die 3 Entwicklungen A, B und C niedergelegt. Aus dem Vergleich zwischen C und $A-B$ ergibt sich, daß nirgends eine größere Fehleranhäufung stattgefunden hat. Der Unterschied erreicht nur in 71 von 544 Fällen den Wert ± 1 m, nur 2 mal den Wert ± 2 m. Nach der Wahrscheinlichkeitskurve ergibt sich daraus ein mittlerer Fehler von ± 0.64 m.

Die Berechnung der Darstellung wurde um eine Stelle genauer geführt, als die Berechnung der Koeffizienten. Es ist nämlich für viele Aufgaben wichtiger die Darstellung genau zu haben, wie die Koeffizienten selbst. Daß eine solche Entwicklung noch weit entfernt ist, die Verhältnisse der Erde richtig wiederzugeben, ist klar, und wenn man irgend einen Koeffizienten willkürlich um etwa 40 oder 50 m änderte, so würde dies den Wert der Entwicklung kaum schmälern. Dagegen ist es oft sehr wichtig zu wissen, was man in der Entwicklung überhaupt besitzt. Dies wird z. B. deutlich, wenn wir eine Anwendung auf die Schwerereduktionen machen wollen. Die Entwicklung wird hier nicht nur die Massen in großer Entfernung, sondern auch einen Teil der Massen in unmittelbarer Nähe jedes Punktes berücksichtigen. Es ist dann unbedingt nötig genau zu wissen, wie viel unberücksichtigt geblieben ist. Es ist daher in diesem Falle viel wichtiger zu wissen, wie die Entwicklung verläuft, als ob sie absolut richtig verläuft.

Konvergenzbetrachtungen.

Wir kommen nun zur Frage der Konvergenz. Es handelt sich dabei um die Feststellung, ob die Amplituden der einzelnen Glieder von Ordnung zu Ordnung so abnehmen, daß mit Hinzunehmen höherer und höherer Ordnungen eine fortschreitende Annäherung an eine gute Darstellung erreicht wird, oder mit anderen Worten, daß durch die Glieder der nächsthöheren Ordnung das Bild nicht wieder vollständig verändert wird. Es scheint nun auf den ersten Anblick, als ob man bei dem komplizierten Bau der Erdoberfläche solches von vornherein gar nicht erwarten dürfte;

kommen doch innerhalb weniger Kilometer oft Schwankungen von mehreren tausend Metern vor, die also 30—50% dessen betragen, was auf der Erde überhaupt vorkommt. Daraus kann man sich zu dem Schlusse verleiten lassen, daß selbst Glieder sehr hoher Ordnung noch nicht wesentlich kleiner sein werden, als die allerersten. In der Tat ist es aber nicht so.

Zunächst kann man eine Abnahme der Glieder nur von Ordnung zu Ordnung verlangen; die Zahl der Glieder gleicher Ordnung steigt aber; man wird also immer eine größere Anzahl von Gliedern in etwa gleicher Größe erwarten müssen. Nun betrachten wir ein extremes Beispiel: wir fragen: wie müßten die Glieder aussehen, durch welche die Alpen dargestellt werden, wenn wir uns dieselben als drei parallele Gebirgszüge von 2000 m Höhe und 40 km Basis vorstellen? Wellen, deren Kämme 40 km voneinander abstehen, müßten offenbar den Gliedern 1000. Ordnung entsprechen, da der Erdumfang 40000 km beträgt. Die Zahl der Glieder dieser Ordnung ist aber 2001. Bei einer Amplitude von ± 1000 m käme also auf jedes Glied durchschnittlich 0.5 m. Nun werden aber die Glieder 1000. Ordnung gewiß nicht die einzigen sein, die sich am Aufbau der Alpen beteiligen. Diese nehmen nur einen sehr kleinen Teil der Erdoberfläche ein, und im übrigen Teile spielen die Glieder 1000. Ordnung keine hervorragende Rolle. Es werden also andere Ordnungen dazu dienen müssen, für die übrige Erde den Effekt der Glieder 1000. Ordnung wieder zu zerstören, werden sich dabei aber auch an den Alpen beteiligen müssen. So dürften wohl mehrere hundert Ordnungen in Betracht kommen, und die Zahl der Glieder steigt auf einige Hunderttausende; ihre mittlere Größe wird daher noch kleiner sein.

Diese Überlegung ist allerdings nur richtig, wenn alle Glieder mit Fleiß ihre Maxima aufeinanderlegen, um die Alpen zu bauen. Jedenfalls aber folgt daraus nicht nur, daß die einzelnen Glieder von Ordnung zu Ordnung abnehmen werden, sondern daß auch die Summe aller Glieder einer Ordnung, also das zugehörige Y, noch kleiner sein wird, als die noch darzustellenden Unterschiede in den Beobachtungen. Bloß aus dem Umstande also, daß die Y kleiner werden als die schließlich bleibenden Reste in der Darstellung, darf man nicht schließen, daß die Entwicklung überflüssig weit fortgesetzt wurde. Aus diesen Gesichtspunkten haben wir nun das Zahlenmaterial zu prüfen.

Zur Feststellung der Abnahme der Glieder wurde in jeder Ordnung das arithmetische Mittel aus allen Amplituden genommen. Die Amplituden wurden ihrerseits aus den Koeffizienten in Tafel

VII durch Multiplikation mit dem Maximum des zugehörigen P_n, gebildet. Es ergibt sich folgende Zusammenstellung:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
A	1013 m	691 m	578 m	564 m	402 m	300 m	206 m	151 m
B	894	617	488	479	331	247	197	143
C	119	74	90	85	71	53	9	8
n	9	10	11	12	13	14	15	16
A	153 m	147 m	124 m	89 m	104 m	94 m	94 m	75 m
B	126	120	96	77	93	85	76	63
C	27	27	28	12	11	9	18	12

Die Abnahme ist also deutlich ausgesprochen, wenn sie auch namentlich im Falle C unregelmäßig ist. Doch sind hier von $n = 7$ an die Glieder überhaupt schon sehr klein.

Um nun die Abnahme von Y zu Y zu untersuchen, müßten diese berechnet vorliegen. Es wurde aber schon früher erwähnt, daß diese Berechnung nicht durchführbar war. Man muß sich also hier mit einer Überschlagsrechnung begnügen. Die Amplituden sämtlicher Glieder sind bekannt, doch läßt sich nicht überblicken in welcher Weise sie sich überanderlagern, und welche Maxima resultieren. Es wurde näherungsweise angenommen, daß die Maxima der einzelnen Glieder längs der Parallelkreise nach dem Zufallgesetze verteilt sind, und das resultierende Maximum durch die Wurzel der Quadratsumme der Amplituden ausgedrückt. Diese Rechnung wurde für alle Parallelkreise durchgeführt, und dann das Maximum herausgesucht. Es ergab sich folgendes

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8
A	± 1818 m	± 1474 m	± 1607 m	± 1574 m	± 1600 m	± 984 m	± 923 m	± 493 m
B	1600	1307	1351	1345	1335	800	793	484
C	243	196	321	238	306	312	172	198
	Y_9	Y_{10}	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}	Y_{15}	Y_{16}
A	± 644 m	± 527 m	± 561 m	± 324 m	± 422 m	± 388 m	± 420 m	± 317 m
B	546	458	360	287	380	406	302	270
C	230	161	212	161	97	112	108	119

Es ist also auch hier die Abnahme der Amplitude deutlich ausgesprochen, wenigstens im Falle A und B. Im Falle C ist die Abnahme allerdings sehr gering, hauptsächlich wohl deshalb, weil die ersten Glieder schon recht klein sind.

Resultate.

Wir wenden uns zu dem Vergleich mit den Grundlagen, die in Tafel VI enthalten sind. Ordnet man die Abweichungen (Beobachtung—Rechnung) nach der Größe, so ergibt die Abzählung folgende Zahlen:

B—R	0—200 m	200—400 m	400—600 m	600—800 m	800—1000 m	1000—2000 m	über 2000 m	Summe
A	274	159	61	24	13	12	1	544
B	326	148	42	13	8	6	1	544
C	489	37	5	9	1	3	0	544

Die größte Abweichung fällt bei *A* und *B* auf den Punkt: $\varphi = +80\ \lambda = 0$, wie überhaupt alle größeren Abweichungen in die höheren Breiten fallen. Um diese Verhältnisse näher zu beleuchten wurde aus den Unterschieden B—R für jeden Parallelkreis ein mittlerer Fehler gerechnet. Die folgende Übersicht enthält das Resultat:

φ	$+80^0$	$+70^0$	$+60^0$	$+50^0$	$+40^0$	$+30^0$	$+20^0$	$+10^0$	0^0
A	± 865 m	± 646 m	± 351 m	± 301 m	± 247 m	± 264 m	± 253 m	± 239 m	± 181 m
B	582	434	268	277	206	258	220	197	158
C	481	331	147	102	103	118	95	74	72
φ	-10^0	-20^0	-30^0	-40^0	-50^0	-60^0	-70^0	-80^0	
A	± 194 m	± 302 m	± 284 m	± 387 m	± 344 m	± 321 m	± 454 m	± 410 m	
B	194	226	232	289	339	316	406	258	
C	66	128	77	62	47	49	118	276	

Aus diesen Zahlen erkennt man zunächst, daß die Entwicklung *C* dem zugehörigen Material am besten entspricht. Das ist nicht verwunderlich, da die darzustellenden Werte den einfachsten Verlauf zeigen: sind doch zwei Drittel aller Werte gleich Null. Demgegenüber ist *A* der komplizierteste Fall, während *B* die Mitte hält.

In allen drei Fällen aber spricht sich die obenerwähnte schlechte Darstellung der Polgebiete deutlich aus, besonders im Norden, weniger im Süden, wo die Verhältnisse einfacher sind. Die Sache erscheint zunächst auffallend. Infolge der Meridiankonvergenz sind nämlich die Polargebiete mit Beobachtungspunkten verhältnismäßig reicher ausgestattet, als die niederen Breiten. Man könnte daher erwarten, daß ihnen deshalb ein größeres Gewicht und damit auch eine bessere Darstellung zufallen werde. Diesem Umstande aber wirken die Größen a_i in 8') entgegen, deren numerische Werte unter 22) gegeben sind. Sie spielen die Rolle von Gewichten, und da sie dem Cosinus der geographischen Breite beiläufig proportional sind, so wird dadurch die ungleichmäßige Verteilung der Beobachtungen ausgeglichen. Aus diesem Gesichtspunkte sollten die Zahlen in obiger Zusammenstellung besser untereinander stimmen.

Der Grund des Mißverhältnisses liegt nun darin, daß die P_{nj} für alle $j \neq 0$ wegen der darin enthaltenen Potenzen von $\cos\varphi = (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}$ am Pole selbst verschwinden, und in höheren Breiten meist so klein bleiben, daß sie praktisch gleich Null zu setzen sind. Während also in den mittleren Breiten sich jeder Wert aus 289 Gliedern zusammensetzt, haben unter 80° Breite nur 187 einen nennenswerten Betrag, und für den Pol selbst bleiben nur noch die 17 Glieder, welche die P_n enthalten. Die Ausdrucksfähigkeit der Entwicklung nimmt also gegen die Pole stark ab, und deshalb wird die Darstellung hier mangelhaft.

Bei dem Äquator, für welchen auch die Hälfte der Glieder verschwindet, nämlich alle ungeraden Funktionen von $\mu = \sin\varphi$, tritt solches nicht auf, weil hier ein beiderseitiger Anschluß vorliegt, der in den hohen Breiten fehlt. Es wäre daher auch möglich gewesen, daß für die Pole selbst ganz unbrauchbare Werte auftreten. Tatsächlich erhält man aber für diese beiden Punkte ganz gute Werte

$$\text{Nordpol: } -1376.2\,\text{m} \qquad \text{Südpol } +1020.8\,\text{m}.$$

Glücklicherweise sind die Gebiete mit schlechterer Darstellung verhältnismäßig klein, und die Abweichungen deshalb weniger bedenklich. Führt man den Cosinus der geographischen Breite als Gewicht ein und bildet das Mittel aus allen Parallelkreisen, so findet man

$$A:\ \pm 202\,\text{m} \quad B:\ \pm 170\,\text{m} \quad C:\ \pm 70\,\text{m}.$$

Die mittleren Höhen der Tafel VI sind also bis auf 100—200 m richtig dargestellt. Da es unwahrscheinlich ist, daß die Ausgangswerte genauer sind, oder auch, daß sich heute auf irgendwelchem Wege bessere Werte überhaupt gewinnen lassen, so kann man wohl sagen, daß die Entwicklungen allen Anforderungen entsprechen, und daß es kaum einen Wert hätte, sie weiter zu treiben.

Es bleibt nur noch übrig das Resultat der Entwicklung mit der Natur zu vergleichen. Es wurde früher erwähnt, daß bis $n = 5$ die Darstellungen einzeln berechnet werden konnten. Es ist nämlich gestattet bei jedem beliebigen n stehen zu bleiben und man erhält immer die im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate beste Entwicklung, wenn man die Größen a_i als Gewichte der Parallelkreise einführt. Es ist nicht ohne Interesse die Resultate dieser einfacheren Entwicklungen zu betrachten.

Das 1. Glied ($n = 0$) ist für die Entwicklung A gleich -2455.7 m, für B: -2680.9 m und für C: $+225.2$. Wenn man also die Kontinentalmassen abträgt und damit die Tiefen der Ozeane ausfüllt, so würde die ausgeglichene Fläche 2455.7 m unter das jetzige Meeresniveau fallen. Die Wasser des Ozeans könnten die ganze Erde mit einer Tiefe von 2680.9 m überdecken. Den Landmassen entspricht eine die ganze Erde umspannende Schicht von 225.2 m Mächtigkeit.

Die folgenden Bemerkungen beziehen sich nur noch auf die Entwicklung A, da sie allein die für das Gesamtbild so charakteristische Küstenlinie gut darstellt, während diese bei B und C begreiflicherweise ganz verwischt wird.

Die Glieder 1. Ordnung erzeugen eine Unsymmetrie im Ausmaße von ± 1800 m, so daß noch nirgends der Meeresspiegel erreicht wird. Der europäisch-asiatische Kontinent erscheint nur angedeutet durch ein Ansteigen des Meeresbodens bis auf -640 m. Erst die Hinzunahme von Y_2 läßt „trockenes Land" erscheinen an der Stelle von Europa—Asien, alles andere bleibt noch vom Meer überdeckt. Daran ändert auch die Hinzunahme von Y_3 nicht viel: Die Kontinentalmasse umfaßt nun einen Teil von Nord-Afrika; Amerika liegt noch in einer Tiefe von 8—900 m. Legt man die 0-Linie in etwa -2800 m, so erhält man beiläufig das Bild, das Love[1]) nach seiner Entwicklung bis zu Gliedern 3. Ordnung zeichnet.

Die Glieder 4. Ordnung (Y_4) bringen die erste Andeutung von Amerika in Form einer Kontinentalmasse, die von Norden herein bis etwa zum 60. Parallel reicht. Sie setzt sich als submarine Bodenwelle in der Richtung gegen Süd-Amerika fort, erhebt sich aber nirgends über die Tiefe von 600 m. Afrika reicht nun bis zum Äquator.

Die Glieder 5. Ordnung (Y_5) endlich lassen Süd-Amerika als selbständige kleine Insel entstehen. Süd-Afrika ist durch eine Bodenwelle unter dem Meere kaum angedeutet. Australien bleibt mit 800 m Meer bedeckt. Das Ergebnis dieser Rechnungen

1) Love: Gravitational Stability of the earth. Phil. Trans. of London Bd. 207 A. Love rechnet unter der vereinfachenden Annahme, daß allen Punkten oberhalb seiner Null-Linie (-8400 Fuß) die Höhe $+1$, allen Punkten unterhalb die Höhe -1 zukommt.

ist also, daß selbst bei $n = 5$ noch kein annähernd richtiges Bild entsteht. Mit einer Entwicklung, die nur wenige Glieder enthält, wird man also gewiß nie auskommen.

Um endlich das Schlußresultat, welches in der Darstellung auf Tafel VIII enthalten ist, zu überblicken, wurden die Werte in eine Karte eingetragen (Karte II), für welche eine flächentreue Projektion gewählt wurde und auf Grund einer graphischen Interpolation Schichtenlinien von 1000 zu 1000 m gezogen. Zum Vergleich wurde eine ähnliche Karte (Karte I) aus den Beobachtungsdaten nach Tafel VI hergestellt. Dieser Vergleich ist deshalb wichtig, weil er zeigt, wie viel man von der Entwicklung überhaupt erwarten darf; denn was in den Grundlagen nicht enthalten ist, kann auch die Darstellung nicht bringen. Ein Blick auf die beiden Karten zeigt nun eine weit über die Erwartung gehende Ähnlichkeit, so daß man fast von einer vollkommenen Wiedergabe des Materiales sprechen kann. Durch einen merkwürdigen Zufall erscheint das Bild sogar verbessert. So ist in der Darstellung das auffallend spitze Aussehen von NW-Afrika verschwunden, und die Form von NE-Amerika hat auch an Richtigkeit gewonnen. Namentlich in dem letzteren Falle handelt es sich aber um ganz geringe Höhenunterschiede, für welche flache Küsten sehr empfindlich sind.

Die Form der Kontinente erscheint in großen Zügen wiedergegeben. Doch ist die Küstenlinie durchwegs landeinwärts verschoben, während die -1000 m Linie mit der wahren Lage der Küste viel besser zusammenfällt. Es hängt dies damit zusammen, daß die mittlere Höhe der Kontinente viel geringer ist, als die mittlere Tiefe des Meeres. Die Mitte liegt etwa bei -2000 m. Bei dem Ausgleich der Steilabfälle werden also die oberen Schichtenlinien gegen das Land, die unteren gegen die See zu rücken.

Im einzelnen sind folgende Punkte hervorzuheben. Die Behringstraße erscheint stark verbreitert, aber durch ein sehr seichtes Meer ersetzt. Der Abschluß des stillen Ozeans gegen das Eismeer ist also recht gut wiedergegeben. Dagegen erscheint der Mangel von Zentral-Amerika bedenklich, da hier das Meer doch über 1000 m tief bleibt. An sich ist die Sache nicht verwunderlich: um die schmale Landbrücke zwischen den zwei tiefen Meeren darzustellen, hätte man die Netzpunkte viel enger wählen und die Entwicklung viel weiter treiben müssen. Darum fehlt Zentral-Amerika auch schon in Karte I. Aus einem ähnlichen Grunde machen sich auch die Anden wenig bemerkbar: sie gleichen sich mit dem nahen tiefen Meere aus. Der submarine Zusammenhang zwischen Süd-Amerika und dem antarktischen Kontinent kommt gut zum Ausdruck. Auch sonst sind viele Einzelheiten in den Tiefenverhältnissen des pacifischen Ozeans dargestellt: so die geringere Tiefe westlich des Südendes von Süd-Amerika, und die großen Tiefen östlich von Neu-Seeland und Japan. Neu-Seeland selbst und die anschließenden Inselgruppen sind durch ein ziemlich seichtes Meer ersetzt.

Die nordamerikanischen Gebirge nehmen einen breiten Raum ein.

Der atlantische Ozean erscheint im NE naturgetreu durch ein Meer geringer Tiefe abgeschlossen. Das Telegrafenplateau wird durch eine Ausbiegung der -4000 m-Linie nach Süden bis zum 35. Breitegrad dargestellt. Ebenso sind die Tiefenverhältnisse des südatlantischen Ozeans gut wiedergegeben. Das mittelländische Meer erscheint stark vergrößert, aber sehr seicht.

Das afrikanische Hochland ist mehrfach kenntlich; Madagaskar ist in den Tiefenlinien angedeutet.

Nördlich vom kaspischen Meere findet man eine kleine Depression; das asiatische Hochland steigt über 3000 m; Vorder-Indien ist in der Küstenlinie nur angedeutet, in der -2000 m-Linie aber ganz ausgebildet; besser zeigt sich Hinter-Indien; die Sunda-Inseln sind durch eine kleine Insel im seichten Meer ersetzt.

Australien ist von Süden her etwas verkleinert.

Im Südpolargebiete spricht sich das Roß-Meer deutlich aus aus, dagegen ist Graham-Land und das Wedell-Meer verwischt, während es auf Karte I noch ziemlich deutlich ist. Unter 100—130° östl. v. Gr. und etwa 80° Breite erhebt sich das Land über 2000 m. Die Stelle ist nicht weit vom König Eduard VII Plateau.

Im allgemeinen kann man also wohl sagen, daß sich die Entwicklung den tatsächlichen Verhältnissen recht gut anschließt, und sie dürfte für viele Probleme der Geophysik eine brauchbare Grundlage bilden.

Der Grundsatz, der bei der Herstellung der Entwicklung leitend war, war der, die Massenverteilung richtig zu erhalten, da es vornehmlich Schwereuntersuchungen waren, die die Veranlassung geboten haben. Bei anderen Problemen sind aber vielleicht andere Gesichtspunkte maßgebend, und da wird sich die obige Entwicklung vielleicht weniger eignen. So wird z. B. bei Untersuchungen über die Ebbe und Flut des Meeres das Fehlen von Zentral-Amerika störend sein. Die im ersten Teile abgeleiteten Konstanten gestatten leicht eine entsprechende Entwicklung für dieses Problem herzustellen, wenn man entsprechende Höhenwerte zu Grunde legt, bei denen statt der Massenverteilung die Küstenentwicklung besser zum Ausdruck kommt. Die gute Übereinstimmung der beiden Karten zeigt, daß die Entwicklung auch auf ziemlich geringfügige Änderung der Grundlagen richtig reagiert. Einfacher dürfte es vielleicht sein, eine Zusatzentwicklung herzustellen, welche nur die gewünschten Verbesserungen darstellt. Die Rechnung wird dadurch sehr abgekürzt, daß alle nicht geänderten Punkte mit Nullen eintreten.