von Land und Wasser, das Gewicht der Kontinente etc. eine Rolle spielt.

Da viele Untersuchungen eine besondere Berücksichtigung des Ozeans verlangen, wurde gleichzeitig eine zweite Entwicklung hergestellt, welche nur die Tiefe des Meeres angibt, in allen Punkten des Festlandes aber gleich Null wird. Zur Kontrolle diente eine 3. Entwicklung, welche nur die Landmassen darstellt, dagegen in allen Punkten des Meeres den Wert Null gibt.

Als analytische Form der Entwicklung wurden selbstverständlich Kugelfunktionen gewählt. Dabei sollten die Rechnungen so angeordnet werden, daß ein vorbereitender Teil alles enthält, was von den Eigenschaften und der gewählten Ordnung der Kugelfunktionen, aber nicht von den Beobachtungswerten abhängt, so daß diese erst im letzten Stadium der Rechnung eintreten. Damit ist dann die Möglichkeit gegeben auch andere auf einer Kugel gegebene Wertsysteme mit verhältnismäßig geringer Mühe zu entwickeln z. B. magnetische oder meteorologische Elemente, Sternverteilung etc.

Diesem Zwecke entsprechen die beiden von Neumann gegebenen Methoden in vollstem Maße. Aus später zu besprechenden Gründen wurde die 2. Methode gewählt.

Es ist klar, daß die Darstellung der Erdoberfläche, selbst wenn sie nur eine recht näherungsweise sein soll, eine sehr weitgehende Entwicklung verlangen wird, während man sich in anderen Fällen mit einer einfachen Formel begnügen kann. Die Neumannschen Formeln gestatten nun die Entwicklung bei einer beliebigen Ordnung abzubrechen, wobei immer eine Reihe bleibt, welche im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate die jeweils beste Darstellung liefert. Die hier für hohe Kugelfunktionen (16. Ordnung) berechneten Konstanten enthalten somit auch das Material für kürzere Entwicklungen.

Das hier abgeleitete Zahlenmaterial dürfte somit ein weites Gebiet der Anwendung finden.

I.

Die Kugelfunktion vom Argumente μ und der Ordnung n ist definiert durch

$$1)\qquad P_n(\mu) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}\left[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4}\ldots\right] = K_n\,\Phi_n \qquad -1<\mu<1.$$

Setzt man:

$$\mu = \cos\vartheta,$$

so erhält man auch:

$$2)\quad P_n(\mu) = 2\cdot\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\left[\cos n\vartheta + \frac{n}{2n-1}\cos(n-2)\vartheta + \frac{1.3}{1.2}\cdot\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\vartheta + \cdots\right] = K_n'\,\Phi_n'.$$

Diese letztere Reihe schließt bei ungeradem n mit dem Gliede mit $\cos\vartheta$ ab, bei geradem n tritt noch ein von ϑ freies Glied auf, welchem der Faktor $\frac{1}{2}$ beizufügen ist.

Die „adjungierten Kugelfunktionen" sind definiert durch:

$$3)\quad P_{nj}(\mu) = \left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^j \frac{\partial^j P_n(\mu)}{\partial\mu^j} = \left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^j P_n^j(\mu).$$

Jedes auf einer Kugel gegebene Wertsystem läßt sich durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen darstellen. Man denke sich zu diesem Zwecke die Kugel durch Meridiane und Parallelkreise eingeteilt. Ist dann ϑ das Komplement der geographischen Breite (Nord-Polardistanz) und λ die geographische Länge, so hat die Entwicklung die Form:

$$\begin{aligned}4)\quad f(\mu\lambda) = {} & A_0^0 P_0(\mu)\\ & + A_1^0 P_1(\mu) + (A_1^1\cos\lambda + B_1^1\sin\lambda)\,P_{11}(\mu)\\ & + A_2^0 P_2(\mu) + (A_2^1\cos\lambda + B_2^1\sin\lambda)\,P_{21}(\mu) + (A_2^2\cos 2\lambda\\ & \qquad + B_2^2\sin 2\lambda)\,P_{22}(\mu)\\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & + A_p^0 P_p(\mu) + (A_p^1\cos\lambda + B_p^1\sin\lambda)\,P_{p1}(\mu) + (A_p^2\cos 2\lambda\\ & \qquad + B_p^2\sin 2\lambda)\,P_{p2}(\mu) + \cdots + (A_p^p\cos p\lambda + B_p^p\sin p\lambda)\,P_{pp}(\mu).\end{aligned}$$

Hierin sind A_i^k und B_i^k die Entwicklungskoeffizienten, also konstante Größen, deren numerischer Betrag durch das auf der Kugel gegebene Wertsystem bestimmt ist. Alle Glieder einer Zeile enthalten Kugelfunktionen gleicher Ordnung. Das erste Glied ist von λ unabhängig und heißt eine „zonale Kugelfunktion"; sie wechselt längs des Meridians so oft das Zeichen als die Ordnungszahl angibt. Das letzte Glied jeder Zeile:

$$A_n^n P_{nn}(\mu)\cos n\lambda \text{ oder } B_n^n P_{nn}(\mu)\sin n\lambda$$

wechselt sein Zeichen längs des Meridians nicht, dagegen längs jedes halben Parallelkreises so oft als die Ordnungszahl (n) angibt. Man spricht von einer „sectoriellen Kugelfunktion".

Die übrigen Glieder der Zeile bilden zwischen diesen beiden Extremen einen kontinuierlichen Übergang. Die Zahl der Zeichenwechsel im Meridian nimmt ab, während die im Parallelkreise zunimmt. Sie heißen „tesserale Kugelfunktionen".

Die Glieder einer Zeile bilden zusammen ein sogenanntes Laplace'sches Y. Also

5) $$Y_n = A_n^0 P_n(\mu) + (A_n^1 \cos\lambda + B_n^1 \sin\lambda) P_{i1}(\mu) + \cdots + (A_n^n \cos n\lambda + B_n^n \sin n\lambda) P_{nn}(\mu)$$

und

$$f(\mu\lambda) = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_p.$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten A_n^j und B_n^j gibt F. Neumann[1]) zwei Methoden, die beide eine ganz bestimmte Anordnung des Beobachtungsmateriales oder der auf der Kugel verteilten Werte verlangen. Denn nur unter dieser Bedingung lassen sich für die gesuchten Größen einfache Formeln aufstellen.

1. Methode. Es seien die numerischen Werte (Beobachtungen) gegeben für die Schnittpunkte von $2p$ äquidistanten Meridianen mit $2p+1$ gegebenen oder beliebig gewählten Parallelkreisen, deren Lage durch die Größen $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{2p+1}$ bestimmt sei. Man bestimmt dann $2p+1$ Hilfsgrößen $a_1 a_2 \ldots a_{2p+1}$ durch das Gleichungssystem:

6) $$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p+1} &= 2 \\ a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_{2p+1}\mu_{2p+1} &= 0 \\ a_1\mu_1^2 + a_2\mu_2^2 + \cdots + a_{2p+1}\mu_{2p+1}^2 &= \tfrac{2}{3} \\ a_1\mu_1^3 + a_2\mu_2^3 + \cdots + a_{2p+1}\mu_{2p+1}^3 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_1\mu_1^{2p} + a_2\mu_2^{2p} + \cdots + a_{2p+1}\mu_{2p+1}^{2p} &= \frac{2}{2p+1}. \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\frac{2\pi}{2p} = \frac{\pi}{p} = \lambda_0,$$

und:

7) $$\begin{aligned} C_0^i &= \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{2p-1} f(\mu_i, k\lambda_0) & S_0^i &= 0 \\ C_1^i &= \frac{1}{p}\sum f(\mu_i, k\lambda_0)\cos k\lambda_0 & S_1^i &= \frac{1}{p}\sum f(\mu_i, k\lambda_0)\sin k\lambda_0 \\ C_2^i &= \frac{1}{p}\sum f(\mu_i, k\lambda_0)\cos 2k\lambda_0 & S_2^i &= \frac{1}{p}\sum f(\mu_i, k\lambda_0)\sin 2k\lambda_0 \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\ C_{p-1}^i &= \frac{1}{p}\sum f(\mu_i, k\lambda_0)\cos(p-1)k\lambda_0 & S_{p-1}^i &= \frac{1}{p}\sum f(\mu_i, k\lambda_0)\sin(p-1)k\lambda_0 \\ C_p^i &= \frac{1}{2p}\sum f(\mu_i k\lambda_0)\cos.pk\lambda_0 & S_p^i &= 0 \end{aligned}$$

1) Vorlesungen über die Theorie des Potentiales etc. von Fr. Neumann, herausgegeben von C. Neumann, Leipzig 1887.

wo die $f(\mu_i, k\lambda_0)$ die den Punkten $\mu_i, k\lambda_0$ der Kugel entsprechenden gegebenen Werte sind, so wird

8)
$$A_n^j = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-j)!}{(n+j)!} \sum_{i=1}^{2p+1} a_i C_j^i P_{nj}(\mu_i)$$
$$B_n^j = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-j)!}{(n+j)!} \sum_{i=1}^{2p+1} a_i S_j^i P_{nj}(\mu_i)$$

2. Methode: Es seien die numerischen Werte gegeben für die Schnittpunkte von $2p$ äquidistanten Meridianen mit $p+1$ Parallelkreisen. Die letzteren dürfen aber nun nicht beliebig gewählt werden, sondern derart, daß die $p+1$ Größen $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{p+1}$ zusammen mit den Hilfsgrößen $a_1 a_2 \ldots a_{p+1}$ dem Gleichungssystem:

6′)
$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_{p+1} &= 2 \\ a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \cdots + a_{p+1} \mu_{p+1} &= 0 \\ a_1 \mu_1^2 + a_2 \mu_2^2 + \cdots + a_{p+1} \mu_{p+1}^2 &= \tfrac{2}{3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_1 \mu_1^{2p+1} + a_2 \mu_2^{2p+1} + \cdots + a_{p+1} \mu_{p+1}^{2p+1} &= 0 \end{aligned}$$

Genüge leisten. Es läßt sich dann beweisen, daß die Größen $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{p+1}$ nichts anderes sind, als die Wurzeln der Gleichung

$$P_{p+1}(\mu) = 0.$$

Die Größen C und S behalten dieselbe Form wie bei der 1. Methode, und es wird nun

8′)
$$A_n^j = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-j)!}{(n+j)!} \sum_{i=1}^{p+1} a_i C_j^i P_{nj}(\mu_i)$$
$$B_n^j = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-j)!}{(n+j)!} \sum_{i=1}^{p+1} a_i S_j^i P_{nj}(\mu_i).$$

Die ersten Fragen, die nun zu beantworten sind, lauten: Welche der beiden Methoden ist zu wählen und bis zu welchem Werte von p muß man gehen? Was diesen zweiten Punkt betrifft, kommen zwei Gesichtspunkte in Betracht, die sich gegenseitig widerstreiten. Einerseits muß p so groß gewählt werden, daß eine genügende Darstellung wenigstens der wichtigsten Formen der Erdoberfläche erreicht wird, andererseits darf p nicht größer sein, als daß die numerische Rechnung noch bewältigt werden kann. Um die Konfiguration der Erdoberfläche in den wesentlichsten Zügen zum Ausdruck kommen zu lassen, erschien die Einführung eines Wert-netzes mit Maschen von höchstens 10^0 in Länge und Breite geboten. Dies gibt, mit Auslassung der Pole, 17 Parallelkreise. Bei Anwendung der 1. Methode findet man dann aus $2p+1 = 17$: $p = 8$. Die Zahl der Meridiane wird 16 und ihre gegenseitige Entfernung gleich $22^0 30'$. Das ist zu viel: es würde z. B. Süd-Amerika und Süd-Afrika schon in den Grundlagen nicht mehr zum Ausdruck kommen. Nimmt man aber die Zahl der Meridiane gleich 32, so wird $p = 16$ und die Zahl der Parallelkreise gleich 33; damit steigt aber die Rechenarbeit auf das 4 fache. Bei der 2. Methode wird bei 32 Meridianen p ebenfalls gleich 16, die Zahl der Parallelkreise aber nur 17. Ihre Lage ist jetzt nicht beliebig, sondern durch die Wurzeln der Gleichung $P_{17} = 0$ bestimmt. Diese Wurzeln fallen aber mit einer gegen den Äquator wachsenden Annäherung mit den Zehner-Parallelen zusammen. Für den Fall der Erdoberfläche, wo die Höhenwerte ohnehin mit großer Unsicherheit behaftet sind, kommt die Abweichung nicht in Betracht. Die Rechenarbeit ist nur die Hälfte gegenüber dem Falle $p = 16$ der 1. Methode und schien noch im Bereiche des Leistbaren zu liegen. Es wurde somit die 2. Methode mit $p = 16$ gewählt [1]).

Der Umstand, daß man bei der 2. Methode an bestimmte Parallelkreise gebunden ist, fällt nicht ins Gewicht, auch wenn man sich in irgendeinem Falle an die genauen Werte der Wurzeln halten müßte. Es wird doch niemals vorkommen, daß die Punkte, an welchen direkte Beobachtungen angestellt wurden, schon ein brauchbares Netz bilden. Diese werden im Gegenteil meist ganz wirr und ungleichmäßig über die Erde verteilt sein. Man ist also bei Herstellung des Netzes ohnehin auf Interpolationen und Mittelbildungen angewiesen, und da ist nun schon gleichgültig, ob man für diese oder jene Punkte die Werte sucht. Eine größere Entwicklung auf Grund der direkten Beobachtungen etwa nach der Methode der kleinsten Quadrate herzustellen würde zu Rechnungen von hoffnungsloser Länge führen.

B e s t i m m u n g d e r K o n s t a n t e n μ_i und a_i. Die erste Aufgabe ist nun die Lösung des Systemes 6'). Da die μ Wurzeln der Gleichung $P_{17}(\mu) = 0$ sind, so folgt sofort, daß eines der $\mu = 0$ sein muß, weil die ungeraden P alle den Faktor μ haben. Dieser

1) Bis $p = 6$ hat Seeliger die Werte der Konstanten berechnet: (H. Seeliger, Über die interpolatorische Darstellung einer Funktion durch eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe; Sitz.-Ber. der math.-phys Kl. der k. Akad. d. Wiss. zu München. Bd. XX. Jahrg. 1890.

Wert entspricht dem Äquator. Die übrigen μ sind, da nach Division durch μ eine gerade Funktion bleibt, paarweise dem absoluten Werte nach gleich, dem Vorzeichen nach entgegengesetzt. Somit

$$
9)\quad \begin{array}{lllll}
\mu_1 = -\mu_{17} & \mu_2 = -\mu_{16} & \mu_3 = -\mu_{15} & \mu_4 = -\mu_{14} & \mu_5 = -\mu_{13} \\
\mu_6 = -\mu_{12} & \mu_7 = -\mu_{10} & \mu_8 = -\mu_{10} & \mu_9 = 0. &
\end{array}
$$

Setzen wir also

$$
10)\quad \begin{array}{lll}
a_1 + a_{17} = b_1 & a_1 - a_{17} = c_1 & \mu_1^2 = \lambda_1 \\
a_2 + a_{16} = b_2 & a_2 - a_{16} = c_2 & \mu_2^2 = \lambda_2 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
a_8 + a_{10} = b_8 & a_8 - a_{10} = c_8 & \mu_8^2 = \lambda_8
\end{array}
$$

so zerfällt das System 6′) in die zwei folgenden:

$$
11)\left\{\begin{array}{ll}
b_1 + b_2 + \cdots + b_8 + a_9 & = 2 \\
b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \cdots + b_8\lambda_8 & = \frac{2}{3} \\
b_1\lambda_1^2 + b_2\lambda_2^2 + \cdots + b_8\lambda_8^2 & = \frac{2}{5} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
b_1\lambda_1^{16} + b_2\lambda_2^{16} + \cdots + b_8\lambda_8^{16} & = \frac{2}{33}
\end{array}\right.
\qquad
12)\left\{\begin{array}{ll}
c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \cdots + c_8\mu_8 & = 0 \\
c_1\mu_2^3 + c_2\mu_3^3 + \cdots + c_8\mu_8^3 & = 0 \\
c_1\mu_2^5 + c_2\mu_3^6 + \cdots + c_8\mu_8^5 & = 0 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
c_1\mu_1^{33} + c_2\mu_2^{33} + \cdots + c_8\mu_8^{23} & = 0
\end{array}\right.
$$

Da die $\mu_1 \mu_3 \ldots \mu_8$ alle voneinander verschieden sind, so ist die Determinante des 2. Systems von Null verschieden. Sie ist ja bekanntlich in einfacher Weise mit Hilfe des Differenzenproduktes darzustellen. Daraus folgt aber sofort

$$
c_1 = c_2 = \cdots = c_8 = 0
$$

und die Größen a sind einander paarweise gleich:

$$
13)\qquad a_i = a_{17-i} = \frac{b_i}{2} \qquad i = 1, 2 \ldots 8
$$

Das System 11) enthält nun 17 Gleichungen mit den 17 Unbekannten $b_1 b_2 \ldots b_8 a_9$ $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_8$. Wenn man sich aber die $\lambda_i = \mu_i^2$ durch Auflösung von $P_{17}(\mu) = 0$ verschafft, so kann man sie in 11) als bekannt ansehen. Das System wird dann linear in den 9 Unbekannten $b_1 b_2 \ldots b_8 a_9$; man kann die 1. Gleichung und etwa die 8 letzten unterdrücken, und hat nur mehr 8 Gleichungen mit 8 Unbekannten. Sie lauten unter Verwendung von 13)

$$
10')\quad \left\{\begin{array}{l}
a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots + a_8\lambda_8 = \frac{1}{3} \\
a_1\lambda_1^2 + a_2\lambda_2^2 + \cdots + a_8\lambda_8^2 = \frac{1}{5} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
a_1\lambda_1^8 + a_2\lambda_2^8 + \cdots + a_8\lambda_8^8 = \frac{1}{17}
\end{array}\right.
$$

Es kommt also zunächst auf die Bestimmung der Werte von $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_8$ als Wurzeln von $P_{17}(\mu) = 0$ an. Durch Berechnung von Werten der Funktion $P_{17}(\mu)$ in engen Intervallen in der Nähe der Wurzeln und einfache Interpolation ergaben sich die Werte zunächst mit 7 Dezimalen.

Für die Größen a läßt sich leicht eine geschlossene Formel ableiten. Bezeichnen wir das Differenzenprodukt mit D

$$D = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)\ldots(\lambda_8 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)\ldots(\lambda_8 - \lambda_7)$$

so wird

$$a_i = (-1)^{i-1} \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{3}\,\lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}\,\lambda_{i+1} \ldots \lambda_8 \\ \frac{1}{5}\,\lambda_1^2 \ldots \lambda_{i-1}^2\,\lambda_{i+1}^2 \ldots \lambda_8^2 \\ \vdots \\ \frac{1}{17}\,\lambda_1^8 \ldots \lambda_{i-1}^8\,\lambda_{i+1}^8 \ldots \lambda_8^8 \end{vmatrix}}{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_8 D}$$

$$= (-1)^{i-1} \frac{1}{\lambda_i D} \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\,1 \ldots 1\;\;1\; \ldots 1 \\ \frac{1}{5}\,\lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}\,\lambda_{i+1} \ldots \lambda_8 \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ \frac{1}{17}\,\lambda_1^7 \ldots \lambda_{i-1}^7\,\lambda_{i+1}^7 \ldots \lambda_8^7 \end{vmatrix}$$

Behandelt man die Determinante in der gleichen Weise, wie von der Bildung des Differenzenprodukts bekannt ist, so erhält man einen Ausdruck, welcher das Differenzenprodukt der Größen $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{i-1} \lambda_{i+1} \ldots \lambda_8$ als Faktor enthält. Alle darin enthaltenen Differenzen heben sich gegen die entsprechenden in D weg, und es bleibt.

$$14)\quad a_i = (-1)^{i+6} \frac{1}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2)\ldots(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_{i+1} - \lambda_i)\ldots(\lambda_8 - \lambda_1)} \cdot M_i.$$

Die Größe M_i entwickelt sich bei der Transformation der Determinante in folgender Weise. Die Glieder der 1. Kolonne nehmen zuerst die Form an:

$$\begin{gathered} (\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{5}\lambda_1) - (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{3}\lambda_1)\lambda_2 = \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{5}(\lambda_1 + \lambda_2) + \tfrac{1}{3}\lambda_1\lambda_2 \\ (\tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{7}\lambda_1) - (\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{5}\lambda_1)\lambda_2 = \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{7}(\lambda_1 + \lambda_2) + \tfrac{1}{5}\lambda_1\lambda_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{gathered}$$

Beim nächsten Schritt wird:

$$\begin{aligned} &[\tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{7}(\lambda_1 + \lambda_2) + \tfrac{1}{5}\lambda_1\lambda_2] - [\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{5}(\lambda_1 + \lambda_2) + \tfrac{1}{3}\lambda_1\lambda_2]\lambda_3 \\ &= \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{7}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \tfrac{1}{5}(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) - \tfrac{1}{3}\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Man erkennt das Gesetz der Entwicklung. Bezeichnet man die elementarsymmetrischen Funktionen der λ mit Σ_k^i, wo der untere

Index den Grad der Funktion bezeichnet, der obere aber angibt, welches λ nicht vorkommt, so wird:

$$15)\quad M_i = \tfrac{1}{17} - \tfrac{1}{15}\Sigma_1^i + \tfrac{1}{13}\Sigma_2^i - \tfrac{1}{11}\Sigma_3^i + \tfrac{1}{9}\Sigma_4^i - \tfrac{1}{7}\Sigma_5^i + \tfrac{1}{5}\Sigma_6^i - \tfrac{1}{3}\Sigma_7^i.$$

Zur Bestimmung der Σ_k^i ist der einfachste Weg der folgende. In dem Ausdrucke für Φ_n in 1), der für $n = 17$ in der Form:

$$16)\qquad \Phi_{17} = \mu\left[\lambda^8 - \frac{17.16}{2.33}\lambda^7 + \frac{17.16.15.14}{2.4.33.31}\lambda^6 - \cdots\right]$$

erscheint, sind die Koeffizienten die elementar-symmetrischen Funktionen aus allen 8 Größen λ. Dividiert man Φ_{17} durch den Wurzelfaktor $\lambda - \lambda_i$, so muß die Division aufgehen, und die Koeffizienten der bleibenden Funktion 7. Grades sind die Σ^i.

Berechnet man nun die M mit den oben gewonnenen 7stelligen Werten von μ, so werden die positiven und negativen Glieder so nahe einander gleich, daß in M nur 2 geltende Stellen bleiben, und daher auch die a nicht genauer erhalten werden. Um die Größen a auf 6 Stellen genau zu erhalten, mußte man die λ auf 10 Stellen, die Koeffizienten in 16) aber auf 15 Stellen rechnen, wobei einerseits der „Thesaurus", andererseits die gewöhnlichen elementaren Rechenmethoden zur Anwendung kamen. So ergaben sich zunächst die Größen a_1 bis a_8, die mit a_{10} bis a_{17} identisch sind (nach 12). Die erste Gleichung 11) liefert dann hinzu: a_9.

Zum Schlusse wurde durch das Einsetzen der gefundenen a und λ in alle Gleichungen 11) die Probe gemacht.

Das bisher gefundene Zahlenmaterial ist in Tafel I zusammengestellt. (s. S. 12).

Bestimmung von $P_n(\mu_i)$ und $P_{nj}(\mu_i)$.

Die nächste Aufgabe ist die Berechnung der Größen $P_n(\mu)$, welche in 4) in der 1. Kolonne stehen. Die Formel 1) erwies sich hierfür als ungeeignet. Die positiven und negativen Glieder werden für größere n so nahe einander gleich, daß das Resultat illusorisch wird. Die Formel 2) ist von diesem Übelstande frei. Da die Koeffizienten allgemeines Interesse bieten und die Bestimmung anderer Werte der Kugelfunktionen gestatten, so sind sie in Tafel II sowohl in Bruchform, als in Dezimalzahlen, endlich auch in Logarithmen gegeben. In letzterem Falle ist der Faktor K' der Gleichung 2) in die Klammer hineinmultipliziert. Tafel II enthält endlich auch die fertigen Werte $P_n(\mu_i)$ für die in 19) gegebenen Werte von μ_i. Um für diese Rechnung eine Kontrolle zu haben, wurde die Formel

Tafel I.

	Koeffizienten von Φ.		
	1·00000 00000 00000		$\vartheta_1 = 180 - \vartheta_{17} = 7^\circ 52' 20'' 762785$
	4·12121 21212 12121		$\vartheta_2 = 180 - \vartheta_{16} = 18 \;\; 4 \; 13 \; 828264$
	6·97947 21407 62463		$\vartheta_3 = 180 - \vartheta_{15} = 28 \; 19 \; 43 \; 586913$
	6·25745 77813 73243		$\vartheta_4 = 180 - \vartheta_{14} = 38 \; 36 \;\; 2 \; 138587$
17)	3·18666 83145 88225	18)	$\vartheta_5 = 180 - \vartheta_{13} = 48 \; 52 \; 38 \; 988919$
	0·91776 04746 01409		$\vartheta_6 = 180 - \vartheta_{12} = 59 \;\; 9 \; 24 \; 437401$
	0·13965 92026 56736		$\vartheta_7 = 180 - \vartheta_{11} = 69 \; 26 \; 14 \; 374370$
	0·00950 06260 31070		$\vartheta_8 = 180 - \vartheta_{10} = 79 \; 43 \;\; 6 \; 671626$
	0·00018 75123 55876		$\vartheta_6 \qquad\qquad\quad = 90 \;\; 0 \;\; 0 \; 000000$

	$\log \mu_1 = 9{\cdot}995 \; 8875 \; 714$		$\lambda_1 = 0{\cdot}981 \; 2397 \; 723$
	$\log \mu_2 = 9{\cdot}978 \; 0323 \; 117$		$\lambda_2 = 0{\cdot}903 \; 7839 \; 477$
	$\log \mu_3 = 9{\cdot}944 \; 6006 \; 823$		$\lambda_3 = 0{\cdot}774 \; 8209 \; 677$
	$\log \mu_4 = 9{\cdot}892 \; 9367 \; 645$		$\lambda_4 = 0{\cdot}610 \; 7641 \; 383$
19)	$\log \mu_5 = 9{\cdot}818 \; 0087 \; 971$	20)	$\lambda_5 = 0{\cdot}432 \; 5313 \; 537$
	$\log \mu_6 = 9{\cdot}709 \; 8553 \; 016$		$\lambda_6 = 0{\cdot}262 \; 8515 \; 868$
	$\log \mu_7 = 9{\cdot}545 \; 5937 \; 841$		$\lambda_7 = 0{\cdot}123 \; 3637 \; 517$
	$\log \mu_8 = 9{\cdot}251 \; 5997 \; 318$		$\lambda_8 = 0{\cdot}031 \; 8566 \; 030$
	$\log \mu_9 = -\infty$		
			Summe $= 4{\cdot}121 \; 2121 \; 212$

	$M_1 = +0{\cdot}000 \; 0450 \; 601$		$a_1 = a_{17} = 0{\cdot}024 \; 148$
	$M_2 = -0{\cdot}000 \; 0301 \; 532$		$a_2 = a_{16} = 0{\cdot}055 \; 460$
	$M_3 = +0{\cdot}000 \; 0244 \; 064$		$a_3 = a_{15} = 0{\cdot}085 \; 036$
	$M_4 = -0{\cdot}000 \; 0212 \; 934$		$a_4 = a_{14} = 0{\cdot}111 \; 884$
21)	$M_5 = +0{\cdot}000 \; 0193 \; 812$	22)	$a_5 = a_{13} = 0{\cdot}135 \; 136$
	$M_6 = -0{\cdot}000 \; 0181 \; 558$		$a_6 = a_{12} = 0{\cdot}154 \; 046$
	$M_7 = +0{\cdot}000 \; 0173 \; 868$		$a_7 = a_{11} = 0{\cdot}168 \; 005$
	$M_8 = -0{\cdot}000 \; 0169 \; 607$		$a_8 = a_{10} = 0{\cdot}176 \; 561$
			$a_9 \qquad\;\; = 0{\cdot}179 \; 447$

$$n P_n = \mu (2n-1) P_{n-1} - (n-1) P_{n-2}$$

herangezogen, und zwar in der Form

$$P_{n-1} = \frac{n}{\mu(2n-1)} P_n + \frac{n-1}{\mu(2n-1)} P_{n-2} \tag{23}$$

die in Folge des meist großen Divisors $\mu(2n-1)$ die geringste Steigerung der Unsicherheit erwarten läßt. Die Rechnung wurde 7 stellig geführt und dann auf 6 Stellen abgekürzt.

Zur Bestimmung der durch 3) definierten Größen $P_n^j(\mu)$ wurde die Differentialgleichung verwendet:

$$(n-j)(n+j+1) \frac{\partial^j P_n(\mu)}{\partial \mu^j} - (2j+2) \frac{\partial^{j+1} P_n(\mu)}{\partial \mu^{j+1}} + (1-\mu^2) \frac{\partial^{j+2} P_n(\mu)}{\partial \mu^{j+2}} = 0$$

die man auch schreiben kann

$$P_n^j(\mu) = \frac{2j+2}{(n-j)(n+j+1)} P_n^{j+1}(\mu) - \frac{1-\mu^2}{(n-j)(n+j+1)} P_n^{j+2}(\mu) = 0. \tag{24}$$

Diese Form schützt wegen der großen Divisoren vor Fehleranhäufungen. Sie gestattet die niederen Differentiale aus den höheren zu berechnen, wobei

$$\begin{aligned} P_n^n &= 1.\,3.\,5.\dots(2n-1) \\ P_n^{n-1} &= 1.\,3.\,5.\dots(2n-1).\mu \end{aligned} \tag{25}$$

als Ausgangswerte dienen. Als letzter Wert erscheint das schon bekannte P_n, was zur Kontrolle dient. Immerhin ist es mißlich, daß diese Kontrolle erst am Schlusse einer langen Kette kommt, und es war daher wünschenswert eine weitere, mitlaufende Kontrolle zu haben. Diese bot sich in der Gleichung

$$P_n^{j-1} = \frac{1}{2n+1} (P_{n+1}^j - P_{n-1}^j). \tag{26}$$

Man wird diese Gleichung in der Weise am besten ausnützen, daß man die Reihen, die aus 24) für die verschiedenen Werte von n entspringen, immer gleichzeitig bis zu gleichen Werten von j fördert. Man erhält so ein geschlossenes nach allen Richtungen durch Kontrollen versteiftes Wertsystem.

Beim ersten Anblick mag es scheinen, als ob die Gleichung 26) in der Form

$$P_{n+1}^j = P_{n-1}^j + (2n+1) P_n^{j-1}$$

das einfachste Mittel zur Bestimmung der P_n^j wäre. Sie führt aber zu ungeheuren Fehleranhäufungen, die von den großen Faktoren herrühren, welche bei den vielfachen Differentiationen der P_n auftreten.

Jedes $P_n^j(\mu_i)$ wurde nach 3) nun mit dem Faktor $(\sqrt{1-\mu_i^2})^j$ multipliziert, wodurch das System der Tafel III entstand. Die Faktoren $\sqrt{1-\mu_i^2}$ sind mit P_{11} identisch und daher selbst in der Tafel enthalten.

Die Formeln 8') für die gesuchten Entwicklungskoeffizienten verlangen nun noch die Multiplikation mit den Faktoren

$$\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{(n-j)!}{(n+j)!} \text{ und } a_i.$$

Die letzteren sind schon bekannt (22)). Die ersteren finden sich in Tafel IV. Das Ergebnis endlich, das sind die Größen

$$\frac{2n+1}{2}\,\frac{(n-j)!}{(n+j)!}\,a_i\,P_{nj}(\mu_i)$$

ist in Tafel V zusammengestellt.

Wenn es sich um die Herstellung einer einzigen speziellen Entwicklung handelte, wäre es offenbar ökonomischer zuerst die Größen C_i und S_i abzuleiten, und diese erst mit a_i zu multiplizieren. Man hätte dann für jeden Koeffizienten nur 17 Multiplikationen zu machen, während so 153 ausgeführt wurden. Da aber das Zahlenmaterial gestatten soll, jede beliebige auf der Kugel gegebene Verteilung mit der geringsten Mühe durch Kugelfunktionen darzustellen, so erscheint es zweckmäßig, auch die Multiplikation mit a_i vorwegzunehmen, so daß man damit überhaupt nichts mehr zu tun hat.

Die Rechnung wurde wieder 7 stellig geführt und auf 6 Stellen abgekürzt. In Fällen, wo sich das Resultat mit geringerer Sicherheit ergab, sind die unsicheren Stellen abgestrichen. Ergab zufällig die Kontrollrechnung den sichereren Wert, so wurde dieser verwendet.

Während die Größen P_n^j und P_{nj} mit wachsendem n und j selbst bedeutend anwachsen und die Größenordnung 10^{19} erreichen, sinken im Gegensatz hierzu die Werte des Faktors $\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{(n-j)!}{(n+j)!}$ bis zur Größenordnung 10^{-38} herab. Das Produkt bleibt also noch immer klein von der Ordnung 10^{-19}, mit Rücksicht auf a_i sogar von der Ordnung 10^{-20}. Daraus dürfen wir aber nicht die Berechtigung ableiten, diese Größen etwa von vornherein zu vernachlässigen. Allerdings werden nun auch die Größen A_n^j und B_n^j