

## Werk

**Titel:** Darstellung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde durch Entwicklung nach Kug...

**Autor:** Prey, Albert

**Jahr:** 1923

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?251726223\\_0011|log4](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?251726223_0011|log4)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

ABHANDLUNGEN  
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN  
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE NEUE FOLGE BD. XI, 1

---

# DARSTELLUNG DER HÖHEN- UND TIEFENVERHÄLTNISSE DER ERDE

DURCH EINE ENTWICKLUNG NACH KUGELFUNKTIONEN  
BIS ZUR 16. ORDNUNG

VON

**ADALBERT PREY**

MIT 2 TAFELN



BERLIN  
WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG

1922

Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei W. Fr. Kaestner  
in Göttingen.

A B H A N D L U N G E N  
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN  
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE NEUE FOLGE BD. XI, 1

---

DARSTELLUNG DER HÖHEN- UND  
TIEFENVERHÄLTNISSE DER ERDE  
DURCH EINE ENTWICKLUNG NACH KUGELFUNKTIONEN  
BIS ZUR 16. ORDNUNG

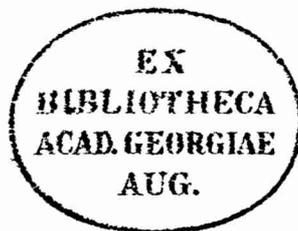
VON

ADALBERT PREY



B E R L I N  
WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG  
1 9 2 2

Vorgelegt von C. Runge in der Sitzung vom 25. November 1921.



1922. 8429, 22.7609

Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Die umfangreichen Untersuchungen, vornehmlich der amerikanischen Geodäten<sup>1)</sup> haben gezeigt, daß man bei der Untersuchung von Schwere und Lotstörungen auf Grund der Vorstellungen von der isostatischen Lagerung der Massen, sich nicht mit der Berücksichtigung der näheren Umgebung des Beobachtungsortes begnügen kann, sondern daß man die Massen bis zu mehreren tausend Kilometern Entfernung in Rechnung ziehen muß. Das Verfahren, welches man dabei einschlug, bestand darin, daß man vom Beobachtungsort ausgehend die Erdoberfläche durch Radien und konzentrische Kreise in Abteilungen einteilte, deren Einfluß einzeln berechnet werden mußte. Es war also dabei notwendig, für jeden Punkt eine eigene Einteilung der Erdoberfläche vorzunehmen, und aufs Neue für die einzelnen Abteilungen eine mittlere Höhe zu bestimmen. Auf Grund einer Darstellung der gesamten Erdoberfläche durch einen mathematischen Ausdruck könnte nun diese Aufgabe ein für allemal für alle Stationen erledigt werden. Dies war denn auch die Veranlassung, die im folgenden mitgeteilten Berechnungen zu unternehmen, die schon im Jahre 1908 begonnen, nach nunmehr 13 jähriger, allerdings wiederholt unterbrochener Arbeit, vollendet vorliegen.

Obwohl ursprünglich für die Schwerereduktionen gedacht, dürften doch auch viele andere Probleme der Geophysik davon Nutzen ziehen. Die Erdbeben-theorie, die Theorie der Gezeiten der festen und flüssigen Erde, die Polschwankungen, und auch die Meteorologie, mit einem Worte alle Probleme, bei welchen die Verteilung

---

1) J. Hayford: The figure of the earth and isostasy from measurements in the United States 1909 (U. S. coast and geodetic survey) Supplementary investigation in 1909 of the figure of the earth etc. 1910.

J. Hayford und W. Bowie: The effect of Topographie and isostatic compensation upon the intensity of Gravity, Special publication No. 10, 1912; Second paper by W. Bowie Special, publication No. 12, 1912.

von Land und Wasser, das Gewicht der Kontinente etc. eine Rolle spielt.

Dā viele Untersuchungen eine besondere Berücksichtigung des Ozeans verlangen, wurde gleichzeitig eine zweite Entwicklung hergestellt, welche nur die Tiefe des Meeres angibt, in allen Punkten des Festlandes aber gleich Null wird. Zur Kontrolle diente eine 3. Entwicklung, welche nur die Landmassen darstellt, dagegen in allen Punkten des Meeres den Wert Null gibt.

Als analytische Form der Entwicklung wurden selbstverständlich Kugelfunktionen gewählt. Dabei sollten die Rechnungen so angeordnet werden, daß ein vorbereitender Teil alles enthält, was von den Eigenschaften und der gewählten Ordnung der Kugelfunktionen, aber nicht von den Beobachtungswerten abhängt, so daß diese erst im letzten Stadium der Rechnung eintreten. Damit ist dann die Möglichkeit gegeben auch andere auf einer Kugel gegebene Wertsysteme mit verhältnismäßig geringer Mühe zu entwickeln z. B. magnetische oder meteorologische Elemente, Sternverteilung etc.

Diesem Zwecke entsprechen die beiden von Neumann gegebenen Methoden in vollstem Maße. Aus später zu besprechenden Gründen wurde die 2. Methode gewählt.

Es ist klar, daß die Darstellung der Erdoberfläche, selbst wenn sie nur eine recht näherungsweise sein soll, eine sehr weitgehende Entwicklung verlangen wird, während man sich in anderen Fällen mit einer einfachen Formel begnügen kann. Die Neumannschen Formeln gestatten nun die Entwicklung bei einer beliebigen Ordnung abzubrechen, wobei immer eine Reihe bleibt, welche im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate die jeweils beste Darstellung liefert. Die hier für hohe Kugelfunktionen (16. Ordnung) berechneten Konstanten enthalten somit auch das Material für kürzere Entwicklungen.

Das hier abgeleitete Zahlenmaterial dürfte somit ein weites Gebiet der Anwendung finden.

## I.

Die Kugelfunktion vom Argumente  $\mu$  und der Ordnung  $n$  ist definiert durch

$$1) \quad P_n(\mu) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!} \left[ \mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} \dots \right] = K_n \Phi_n \quad -1 < \mu < 1.$$

Setzt man:

$$\mu = \cos \vartheta,$$

so erhält man auch:

$$2) P_n(\mu) = 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n!} \left[ \cos n\vartheta + \frac{n}{2n-1} \cos (n-2)\vartheta + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \cos (n-4)\vartheta + \dots \right] = K'_n \Phi'_n.$$

Diese letztere Reihe schließt bei ungeradem  $n$  mit dem Gliede mit  $\cos \vartheta$  ab, bei geradem  $n$  tritt noch ein von  $\vartheta$  freies Glied auf, welchem der Faktor  $\frac{1}{2}$  beizufügen ist.

Die „adjungierten Kugelfunktionen“ sind definiert durch:

$$3) P_{nj}(\mu) = (\sqrt{1-\mu^2})^j \frac{\partial^j P_n(\mu)}{\partial \mu^j} = (\sqrt{1-\mu^2})^j P'_n(\mu).$$

Jedes auf einer Kugel gegebene Wertsystem läßt sich durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen darstellen. Man denke sich zu diesem Zwecke die Kugel durch Meridiane und Parallelkreise eingeteilt. Ist dann  $\vartheta$  das Komplement der geographischen Breite (Nord-Polardistanz) und  $\lambda$  die geographische Länge, so hat die Entwicklung die Form:

$$4) f(\mu\lambda) = A_0^0 P_0(\mu) + A_1^0 P_1(\mu) + (A_1^1 \cos \lambda + B_1^1 \sin \lambda) P_{11}(\mu) + A_2^0 P_2(\mu) + (A_2^1 \cos \lambda + B_2^1 \sin \lambda) P_{21}(\mu) + (A_2^2 \cos 2\lambda + B_2^2 \sin 2\lambda) P_{22}(\mu) + \dots + A_p^0 P_p(\mu) + (A_p^1 \cos \lambda + B_p^1 \sin \lambda) P_{p1}(\mu) + (A_p^2 \cos 2\lambda + B_p^2 \sin 2\lambda) P_{p2}(\mu) + \dots + (A_p^p \cos p\lambda + B_p^p \sin p\lambda) P_{pp}(\mu).$$

Hierin sind  $A_i^k$  und  $B_i^k$  die Entwicklungskoeffizienten, also konstante Größen, deren numerischer Betrag durch das auf der Kugel gegebene Wertsystem bestimmt ist. Alle Glieder einer Zeile enthalten Kugelfunktionen gleicher Ordnung. Das erste Glied ist von  $\lambda$  unabhängig und heißt eine „zonale Kugelfunktion“; sie wechselt längs des Meridians so oft das Zeichen als die Ordnungszahl angibt. Das letzte Glied jeder Zeile:

$$A_n^n P_{nn}(\mu) \cos n\lambda \text{ oder } B_n^n P_{nn}(\mu) \sin n\lambda$$

wechselt sein Zeichen längs des Meridians nicht, dagegen längs jedes halben Parallelkreises so oft als die Ordnungszahl ( $n$ ) angibt. Man spricht von einer „sectoriellen Kugelfunktion“.

Die übrigen Glieder der Zeile bilden zwischen diesen beiden Extremen einen kontinuierlichen Übergang. Die Zahl der Zeichen-

wechsel im Meridian nimmt ab, während die im Parallelkreise zunimmt. Sie heißen „tesserale Kugelfunktionen“.

Die Glieder einer Zeile bilden zusammen ein sogenanntes Laplace'sches  $Y$ . Also

$$5) \quad Y_n = A_n^0 P_n(\mu) + (A_n^1 \cos \lambda + B_n^1 \sin \lambda) P_{n1}(\mu) + \dots \\ + (A_n^n \cos n\lambda + B_n^n \sin n\lambda) P_{nn}(\mu)$$

und

$$f(\mu\lambda) = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_p.$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten  $A_n^j$  und  $B_n^j$  gibt F. Neumann<sup>1)</sup> zwei Methoden, die beide eine ganz bestimmte Anordnung des Beobachtungsmateriales oder der auf der Kugel verteilten Werte verlangen. Denn nur unter dieser Bedingung lassen sich für die gesuchten Größen einfache Formeln aufstellen.

1. Methode. Es seien die numerischen Werte (Beobachtungen) gegeben für die Schnittpunkte von  $2p$  äquidistanten Meridianen mit  $2p + 1$  gegebenen oder beliebig gewählten Parallelkreisen, deren Lage durch die Größen  $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2p+1}$  bestimmt sei. Man bestimmt dann  $2p + 1$  Hilfsgrößen  $a_1 a_2 \dots a_{2p+1}$  durch das Gleichungssystem:

$$6) \quad \begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{2p+1} &= 2 \\ a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_{2p+1} \mu_{2p+1} &= 0 \\ a_1 \mu_1^2 + a_2 \mu_2^2 + \dots + a_{2p+1} \mu_{2p+1}^2 &= \frac{2}{3} \\ a_1 \mu_1^3 + a_2 \mu_2^3 + \dots + a_{2p+1} \mu_{2p+1}^3 &= 0 \\ \dots &\dots \\ a_1 \mu_1^{2p} + a_2 \mu_2^{2p} + \dots + a_{2p+1} \mu_{2p+1}^{2p} &= \frac{2}{2p+1}. \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\frac{2\pi}{2p} = \frac{\pi}{p} = \lambda_0,$$

und:

$$7) \quad \begin{aligned} C_0^i &= \frac{1}{2p} \sum_{k=0}^{2p-1} f(\mu_i, k\lambda_0) & S_0^i &= 0 \\ C_1^i &= \frac{1}{p} \sum f(\mu_i, k\lambda_0) \cos k\lambda_0 & S_1^i &= \frac{1}{p} \sum f(\mu_i, k\lambda_0) \sin k\lambda_0 \\ C_2^i &= \frac{1}{p} \sum f(\mu_i, k\lambda_0) \cos 2k\lambda_0 & S_2^i &= \frac{1}{p} \sum f(\mu_i, k\lambda_0) \sin 2k\lambda_0 \\ \dots &\dots & \dots &\dots \\ C_{p-1}^i &= \frac{1}{p} \sum f(\mu_i, k\lambda_0) \cos (p-1)k\lambda_0 & S_{p-1}^i &= \frac{1}{p} \sum f(\mu_i, k\lambda_0) \sin (p-1)k\lambda_0 \\ C_p^i &= \frac{1}{2p} \sum f(\mu_i, k\lambda_0) \cos .pk\lambda_0 & S_p^i &= 0 \end{aligned}$$

1) Vorlesungen über die Theorie des Potentials etc. von Fr. Neumann, herausgegeben von C. Neumann, Leipzig 1887.

wo die  $f(\mu_i, k\lambda_0)$  die den Punkten  $\mu_i, k\lambda_0$  der Kugel entsprechenden gegebenen Werte sind, so wird

$$8) \quad \begin{aligned} A_n^j &= \frac{2n+1}{2} \frac{(n-j)!}{(n+j)!} \sum_{i=1}^{2p+1} a_i C_j^i P_{nj}(\mu_i) \\ B_n^j &= \frac{2n+1}{2} \frac{(n-j)!}{(n+j)!} \sum_{i=1}^{2p+1} a_i S_j^i P_{nj}(\mu_i) \end{aligned}$$

2. Methode: Es seien die numerischen Werte gegeben für die Schnittpunkte von  $2p$  äquidistanten Meridianen mit  $p+1$  Parallelkreisen. Die letzteren dürfen aber nun nicht beliebig gewählt werden, sondern derart, daß die  $p+1$  Größen  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p+1}$  zusammen mit den Hilfsgrößen  $a_1, a_2, \dots, a_{p+1}$  dem Gleichungssystem:

$$6') \quad \begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{p+1} &= 2 \\ a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_{p+1} \mu_{p+1} &= 0 \\ a_1 \mu_1^2 + a_2 \mu_2^2 + \dots + a_{p+1} \mu_{p+1}^2 &= \frac{2}{3} \\ \dots &\dots \\ a_1 \mu_1^{2p+1} + a_2 \mu_2^{2p+1} + \dots + a_{p+1} \mu_{p+1}^{2p+1} &= 0 \end{aligned}$$

Genüge leisten. Es läßt sich dann beweisen, daß die Größen  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p+1}$  nichts anderes sind, als die Wurzeln der Gleichung

$$P_{p+1}(\mu) = 0.$$

Die Größen  $C$  und  $S$  behalten dieselbe Form wie bei der 1. Methode, und es wird nun

$$8') \quad \begin{aligned} A_n^j &= \frac{2n+1}{2} \frac{(n-j)!}{(n+j)!} \sum_{i=1}^{p+1} a_i C_j^i P_{nj}(\mu_i) \\ B_n^j &= \frac{2n+1}{2} \frac{(n-j)!}{(n+j)!} \sum_{i=1}^{p+1} a_i S_j^i P_{nj}(\mu_i). \end{aligned}$$

Die ersten Fragen, die nun zu beantworten sind, lauten: Welche der beiden Methoden ist zu wählen und bis zu welchem Werte von  $p$  muß man gehen? Was diesen zweiten Punkt betrifft, kommen zwei Gesichtspunkte in Betracht, die sich gegenseitig widerstreiten. Einerseits muß  $p$  so groß gewählt werden, daß eine genügende Darstellung wenigstens der wichtigsten Formen der Erdoberfläche erreicht wird, andererseits darf  $p$  nicht größer sein, als daß die numerische Rechnung noch bewältigt werden kann. Um die Konfiguration der Erdoberfläche in den wesentlichsten Zügen zum Ausdruck kommen zu lassen, erschien die Einführung eines Wert-

netzes mit Maschen von höchstens  $10^\circ$  in Länge und Breite geboten. Dies gibt, mit Anlassung der Pole, 17 Parallelkreise. Bei Anwendung der 1. Methode findet man dann aus  $2p + 1 = 17$ :  $p = 8$ . Die Zahl der Meridiane wird 16 und ihre gegenseitige Entfernung gleich  $22^\circ 30'$ . Das ist zu viel: es würde z. B. Süd-Amerika und Süd-Afrika schon in den Grundlagen nicht mehr zum Ausdruck kommen. Nimmt man aber die Zahl der Meridiane gleich 32, so wird  $p = 16$  und die Zahl der Parallelkreise gleich 33; damit steigt aber die Rechenarbeit auf das 4fache. Bei der 2. Methode wird bei 32 Meridianen  $p$  ebenfalls gleich 16, die Zahl der Parallelkreise aber nur 17. Ihre Lage ist jetzt nicht beliebig, sondern durch die Wurzeln der Gleichung  $P_{17} = 0$  bestimmt. Diese Wurzeln fallen aber mit einer gegen den Äquator wachsenden Annäherung mit den Zehner-Parallelen zusammen. Für den Fall der Erdoberfläche, wo die Höhenwerte ohnehin mit großer Unsicherheit behaftet sind, kommt die Abweichung nicht in Betracht. Die Rechenarbeit ist nur die Hälfte gegenüber dem Falle  $p = 16$  der 1. Methode und schien noch im Bereiche des Leistbaren zu liegen. Es wurde somit die 2. Methode mit  $p = 16$  gewählt <sup>1)</sup>.

Der Umstand, daß man bei der 2. Methode an bestimmte Parallelkreise gebunden ist, fällt nicht ins Gewicht, auch wenn man sich in irgendeinem Falle an die genauen Werte der Wurzeln halten müßte. Es wird doch niemals vorkommen, daß die Punkte, an welchen direkte Beobachtungen angestellt wurden, schon ein brauchbares Netz bilden. Diese werden im Gegenteil meist ganz wirr und ungleichmäßig über die Erde verteilt sein. Man ist also bei Herstellung des Netzes ohnehin auf Interpolationen und Mittelbildungen angewiesen, und da ist nun schon gleichgültig, ob man für diese oder jene Punkte die Werte sucht. Eine größere Entwicklung auf Grund der direkten Beobachtungen etwa nach der Methode der kleinsten Quadrate herzustellen würde zu Rechnungen von hoffnungsloser Länge führen.

Bestimmung der Konstanten  $\mu_i$  und  $a_i$ . Die erste Aufgabe ist nun die Lösung des Systemes 6'). Da die  $\mu$  Wurzeln der Gleichung  $P_{17}(\mu) = 0$  sind, so folgt sofort, daß eines der  $\mu = 0$  sein muß, weil die ungeraden  $P$  alle den Faktor  $\mu$  haben. Dieser

---

1) Bis  $p = 6$  hat Seeliger die Werte der Konstanten berechnet: (H. Seeliger, Über die interpolatorische Darstellung einer Funktion durch eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe; Sitz.-Ber. der math.-phys. Kl. der k. Akad. d. Wiss. zu München. Bd. XX. Jahrg. 1890.

Wert entspricht dem Äquator. Die übrigen  $\mu$  sind, da nach Division durch  $\mu$  eine gerade Funktion bleibt, paarweise dem absoluten Werte nach gleich, dem Vorzeichen nach entgegengesetzt. Somit

$$9) \quad \mu_1 = -\mu_{17} \quad \mu_2 = -\mu_{16} \quad \mu_3 = -\mu_{15} \quad \mu_4 = -\mu_{14} \quad \mu_5 = -\mu_{13} \\ \mu_6 = -\mu_{12} \quad \mu_7 = -\mu_{10} \quad \mu_8 = -\mu_{10} \quad \mu_9 = 0.$$

Setzen wir also

$$10) \quad \begin{array}{lll} a_1 + a_{17} = b_1 & a_1 - a_{17} = c_1 & \mu_1^2 = \lambda_1 \\ a_2 + a_{16} = b_2 & a_2 - a_{16} = c_2 & \mu_2^2 = \lambda_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_8 + a_{10} = b_8 & a_8 - a_{10} = c_8 & \mu_8^2 = \lambda_8 \end{array}$$

so zerfällt das System 6') in die zwei folgenden:

$$11) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 + b_2 + \dots + b_8 + a_9 = 2 \\ b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + \dots + b_8 \lambda_8 = \frac{2}{3} \\ b_1 \lambda_1^2 + b_2 \lambda_2^2 + \dots + b_8 \lambda_8^2 = \frac{2}{5} \\ \cdot \\ b_1 \lambda_1^{16} + b_2 \lambda_2^{16} + \dots + b_8 \lambda_8^{16} = \frac{2}{3^8} \end{array} \right. \quad 12) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 + \dots + c_8 \mu_8 = 0 \\ c_1 \mu_2^3 + c_2 \mu_3^3 + \dots + c_8 \mu_8^3 = 0 \\ c_1 \mu_2^5 + c_2 \mu_3^5 + \dots + c_8 \mu_8^5 = 0 \\ \cdot \\ c_1 \mu_1^{33} + c_2 \mu_2^{33} + \dots + c_8 \mu_8^{33} = 0 \end{array} \right.$$

Da die  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_8$  alle voneinander verschieden sind, so ist die Determinante des 2. Systems von Null verschieden. Sie ist ja bekanntlich in einfacher Weise mit Hilfe des Differenzenproduktes darzustellen. Daraus folgt aber sofort

$$c_1 = c_2 = \dots = c_8 = 0$$

und die Größen  $a$  sind einander paarweise gleich:

$$13) \quad a_i = a_{17-i} = \frac{b_i}{2} \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

Das System 11) enthält nun 17 Gleichungen mit den 17 Unbekannten  $b_1, b_2, \dots, b_8, a_9, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8$ . Wenn man sich aber die  $\lambda_i = \mu_i^2$  durch Auflösung von  $P_{17}(\mu) = 0$  verschafft, so kann man sie in 11) als bekannt ansehen. Das System wird dann linear in den 9 Unbekannten  $b_1, b_2, \dots, b_8, a_9$ ; man kann die 1. Gleichung und etwa die 8 letzten unterdrücken, und hat nur mehr 8 Gleichungen mit 8 Unbekannten. Sie lauten unter Verwendung von 13)

$$10') \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \dots + a_8 \lambda_8 = \frac{1}{3} \\ a_1 \lambda_1^2 + a_2 \lambda_2^2 + \dots + a_8 \lambda_8^2 = \frac{1}{5} \\ \cdot \\ a_1 \lambda_1^8 + a_2 \lambda_2^8 + \dots + a_8 \lambda_8^8 = \frac{1}{17} \end{array} \right.$$

Es kommt also zunächst auf die Bestimmung der Werte von  $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_8$  als Wurzeln von  $P_{17}(\mu) = 0$  an. Durch Berechnung von Werten der Funktion  $P_{17}(\mu)$  in engen Intervallen in der Nähe der Wurzeln und einfache Interpolation ergaben sich die Werte zunächst mit 7 Dezimalen.

Für die Größen  $a$  läßt sich leicht eine geschlossene Formel ableiten. Bezeichnen wir das Differenzenprodukt mit  $D$

$$D = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_8 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \dots (\lambda_8 - \lambda_7)$$

so wird

$$a_i = (-1)^{i-1} \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{5} \lambda_1 \dots \lambda_{i-1} \lambda_{i+1} \dots \lambda_8 \\ \frac{1}{5} \lambda_1^2 \dots \lambda_{i-1}^2 \lambda_{i+1}^2 \dots \lambda_8^2 \\ \vdots \\ \frac{1}{17} \lambda_1^8 \dots \lambda_{i-1}^8 \lambda_{i+1}^8 \dots \lambda_8^8 \end{vmatrix}}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_8 D} = (-1)^{i-1} \frac{1}{\lambda_i D} \begin{vmatrix} \frac{1}{5} 1 \dots 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{5} \lambda_1 \dots \lambda_{i-1} \lambda_{i+1} \dots \lambda_8 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{17} \lambda_1^7 \dots \lambda_{i-1}^7 \lambda_{i+1}^7 \dots \lambda_8^7 \end{vmatrix}$$

Behandelt man die Determinante in der gleichen Weise, wie von der Bildung des Differenzenprodukts bekannt ist, so erhält man einen Ausdruck, welcher das Differenzenprodukt der Größen  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1} \lambda_{i+1} \dots \lambda_8$  als Faktor enthält. Alle darin enthaltenen Differenzen heben sich gegen die entsprechenden in  $D$  weg, und es bleibt.

$$14) \quad \alpha_i = (-1)^{i+6} \frac{1}{\lambda_i (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2) \dots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \dots (\lambda_8 - \lambda_i)} \cdot M_i$$

Die Größe  $M_i$  entwickelt sich bei der Transformation der Determinante in folgender Weise. Die Glieder der 1. Kolonne nehmen zuerst die Form an:

$$\begin{aligned} (\frac{1}{7} - \frac{1}{5} \lambda_1) - (\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \lambda_1) \lambda_2 &= \frac{1}{7} - \frac{1}{5} (\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{1}{3} \lambda_1 \lambda_2 \\ (\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \lambda_1) - (\frac{1}{7} - \frac{1}{5} \lambda_1) \lambda_2 &= \frac{1}{5} - \frac{1}{7} (\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{1}{5} \lambda_1 \lambda_2 \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Beim nächsten Schritt wird:

$$\begin{aligned} & [\frac{1}{5} - \frac{1}{7} (\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{1}{5} \lambda_1 \lambda_2] - [\frac{1}{7} - \frac{1}{5} (\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{1}{3} \lambda_1 \lambda_2] \lambda_3 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{7} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \frac{1}{5} (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1) - \frac{1}{3} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \end{aligned}$$

Man erkennt das Gesetz der Entwicklung. Bezeichnet man die elementarsymmetrischen Funktionen der  $\lambda$  mit  $\Sigma_k^i$ , wo der untere

Index den Grad der Funktion bezeichnet, der obere aber angibt, welches  $\lambda$  nicht vorkommt, so wird:

$$15) M_i = \frac{1}{17} - \frac{1}{15} \Sigma_1^i + \frac{1}{13} \Sigma_2^i - \frac{1}{11} \Sigma_3^i + \frac{1}{9} \Sigma_4^i - \frac{1}{7} \Sigma_5^i + \frac{1}{5} \Sigma_6^i - \frac{1}{3} \Sigma_7^i.$$

Zur Bestimmung der  $\Sigma_k^i$  ist der einfachste Weg der folgende. In dem Ausdrücke für  $\Phi_n$  in 1), der für  $n = 17$  in der Form:

$$16) \quad \Phi_{17} = \mu \left[ \lambda^8 - \frac{17 \cdot 16}{2 \cdot 33} \lambda^7 + \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{2 \cdot 4 \cdot 33 \cdot 31} \lambda^6 - \dots \right]$$

erscheint, sind die Koeffizienten die elementar-symmetrischen Funktionen aus allen 8 Größen  $\lambda$ . Dividiert man  $\Phi_{17}$  durch den Wurzelfaktor  $\lambda - \lambda_i$ , so muß die Division aufgehen, und die Koeffizienten der bleibenden Funktion 7. Grades sind die  $\Sigma^i$ .

Berechnet man nun die  $M$  mit den oben gewonnenen 7stelligen Werten von  $\mu$ , so werden die positiven und negativen Glieder so nahe einander gleich, daß in  $M$  nur 2 geltende Stellen bleiben, und daher auch die  $a$  nicht genauer erhalten werden. Um die Größen  $a$  auf 6 Stellen genau zu erhalten, mußte man die  $\lambda$  auf 10 Stellen, die Koeffizienten in 16) aber auf 15 Stellen rechnen, wobei einerseits der „Thesaurus“, andererseits die gewöhnlichen elementaren Rechenmethoden zur Anwendung kamen. So ergaben sich zunächst die Größen  $a_1$  bis  $a_8$ , die mit  $a_{10}$  bis  $a_{17}$  identisch sind (nach 12). Die erste Gleichung 11) liefert dann hinzu:  $a_9$ .

Zum Schlusse wurde durch das Einsetzen der gefundenen  $a$  und  $\lambda$  in alle Gleichungen 11) die Probe gemacht.

Das bisher gefundene Zahlenmaterial ist in Tafel I zusammengestellt. (s. S. 12).

#### Bestimmung von $P_n(\mu_i)$ und $P_{n_j}(\mu_i)$ .

Die nächste Aufgabe ist die Berechnung der Größen  $P_n(\mu)$ , welche in 4) in der 1. Kolonne stehen. Die Formel 1) erwies sich hierfür als ungeeignet. Die positiven und negativen Glieder werden für größere  $n$  so nahe einander gleich, daß das Resultat illusorisch wird. Die Formel 2) ist von diesem Übelstande frei. Da die Koeffizienten allgemeines Interesse bieten und die Bestimmung anderer Werte der Kugelfunktionen gestatten, so sind sie in Tafel II sowohl in Bruchform, als in Dezimalzahlen, endlich auch in Logarithmen gegeben. In letzterem Falle ist der Faktor  $K'$  der Gleichung 2) in die Klammer hineinmultipliziert. Tafel II enthält endlich auch die fertigen Werte  $P_n(\mu_i)$  für die in 19) gegebenen Werte von  $\mu_i$ . Um für diese Rechnung eine Kontrolle zu haben, wurde die Formel

## Tafel I.

Koeffizienten von  $\Phi$ .

1·00000 00000 00000	$\vartheta_1 = 180 - \vartheta_{17} = 7^{\circ}52'20''762785$
4·12121 21212 12121	$\vartheta_2 = 180 - \vartheta_{16} = 18\ 4\ 13\ 828264$
6·97947 21407 62463	$\vartheta_3 = 180 - \vartheta_{15} = 28\ 19\ 43\ 586913$
6·25745 77813 73243	$\vartheta_4 = 180 - \vartheta_{14} = 38\ 36\ 2\ 138587$
17) 3·18666 83145 88225	18) $\vartheta_5 = 180 - \vartheta_{13} = 48\ 52\ 38\ 988919$
0·91776 04746 01409	$\vartheta_6 = 180 - \vartheta_{12} = 59\ 9\ 24\ 437401$
0·13965 92026 56736	$\vartheta_7 = 180 - \vartheta_{11} = 69\ 26\ 14\ 374370$
0·00950 06260 31070	$\vartheta_8 = 180 - \vartheta_{10} = 79\ 43\ 6\ 671626$
0·00018 75123 55876	$\vartheta_9 = 90\ 0\ 0\ 000000$

$\log \mu_1 = 9\cdot995\ 8875\ 714$	$\lambda_1 = 0\cdot981\ 2397\ 723$
$\log \mu_2 = 9\cdot978\ 0323\ 117$	$\lambda_2 = 0\cdot903\ 7839\ 477$
$\log \mu_3 = 9\cdot944\ 6006\ 823$	$\lambda_3 = 0\cdot774\ 8209\ 677$
$\log \mu_4 = 9\cdot892\ 9367\ 645$	$\lambda_4 = 0\cdot610\ 7641\ 383$
19) $\log \mu_5 = 9\cdot818\ 0087\ 971$	20) $\lambda_5 = 0\cdot432\ 5313\ 537$
$\log \mu_6 = 9\cdot709\ 8553\ 016$	$\lambda_6 = 0\cdot262\ 8515\ 868$
$\log \mu_7 = 9\cdot545\ 5937\ 841$	$\lambda_7 = 0\cdot123\ 3637\ 517$
$\log \mu_8 = 9\cdot251\ 5997\ 318$	$\lambda_8 = 0\cdot031\ 8566\ 030$
$\log \mu_9 = -\infty$	

---

 Summe = 4·121 2121 212

$M_1 = +0\cdot000\ 0450\ 601$	$a_1 = a_{17} = 0\cdot024\ 148$
$M_2 = -0\cdot000\ 0301\ 532$	$a_2 = a_{16} = 0\cdot055\ 460$
$M_3 = +0\cdot000\ 0244\ 064$	$a_3 = a_{15} = 0\cdot085\ 036$
$M_4 = -0\ 000\ 0212\ 934$	$a_4 = a_{14} = 0\cdot111\ 884$
21) $M_5 = +0\cdot000\ 0193\ 812$	22) $a_5 = a_{13} = 0\cdot135\ 136$
$M_6 = -0\cdot000\ 0181\ 558$	$a_6 = a_{12} = 0\cdot154\ 046$
$M_7 = +0\cdot000\ 0173\ 868$	$a_7 = a_{11} = 0\cdot168\ 005$
$M_8 = -0\cdot000\ 0169\ 607$	$a_8 = a_{10} = 0\cdot176\ 561$
	$a_9 = 0\cdot179\ 447$

$$nP_n = \mu(2n-1)P_{n-1} - (n-1)P_{n-2}$$

herangezogen, und zwar in der Form

$$23) \quad P_{n-1} = \frac{n}{\mu(2n-1)}P_n + \frac{n-1}{\mu(2n-1)}P_{n-2}$$

die in Folge des meist großen Divisors  $\mu(2n-1)$  die geringste Steigerung der Unsicherheit erwarten läßt. Die Rechnung wurde 7 stellig geführt und dann auf 6 Stellen abgekürzt.

Zur Bestimmung der durch 3) definierten Größen  $P_n(\mu)$  wurde die Differentialgleichung verwendet:

$$(n-j)(n+j+1)\frac{\partial^j P_n(\mu)}{\partial \mu^j} - (2j+2)\frac{\partial^{j+1} P_n(\mu)}{\partial \mu^{j+1}} + (1-\mu^2)\frac{\partial^{j+2} P_n(\mu)}{\partial \mu^{j+2}} = 0$$

die man auch schreiben kann

$$24) \quad P_n^j(\mu) = \frac{2j+2}{(n-j)(n+j+1)}P_n^{j+1}(\mu) - \frac{1-\mu^2}{(n-j)(n+j+1)}P_n^{j+2}(\mu) = 0.$$

Diese Form schützt wegen der großen Divisoren vor Fehleranhäufungen. Sie gestattet die niederen Differentiale aus den höheren zu berechnen, wobei

$$25) \quad \begin{aligned} P_n^n &= 1.3.5 \dots (2n-1) \\ P_n^{n-1} &= 1.3.5 \dots (2n-1) \cdot \mu \end{aligned}$$

als Ausgangswerte dienen. Als letzter Wert erscheint das schon bekannte  $P_n$ , was zur Kontrolle dient. Immerhin ist es mißlich, daß diese Kontrolle erst am Schlusse einer langen Kette kommt, und es war daher wünschenswert eine weitere, mitlaufende Kontrolle zu haben. Diese bot sich in der Gleichung

$$26) \quad P_n^{j-1} = \frac{1}{2n+1}(P_{n+1}^j - P_{n-1}^j).$$

Man wird diese Gleichung in der Weise am besten ausnützen, daß man die Reihen, die aus 24) für die verschiedenen Werte von  $n$  entspringen, immer gleichzeitig bis zu gleichen Werten von  $j$  fördert. Man erhält so ein geschlossenes nach allen Richtungen durch Kontrollen versteiftes Wertsystem.

Beim ersten Anblick mag es scheinen, als ob die Gleichung 26) in der Form

$$P_{n+1}^j = P_{n-1}^j + (2n+1)P_n^{j-1}$$

das einfachste Mittel zur Bestimmung der  $P_n^j$  wäre. Sie führt

aber zu ungeheuren Fehleranhäufungen, die von den großen Faktoren herrühren, welche bei den vielfachen Differentiationen der  $P_n$  auftreten.

Jedes  $P_n^j(\mu_i)$  wurde nach 3) nun mit dem Faktor  $(\sqrt{1-\mu_i^2})^j$  multipliziert, wodurch das System der Tafel III entstand. Die Faktoren  $\sqrt{1-\mu_i^2}$  sind mit  $P_{11}$  identisch und daher selbst in der Tafel enthalten.

Die Formeln 8') für die gesuchten Entwicklungskoeffizienten verlangen nun noch die Multiplikation mit den Faktoren

$$\frac{2n+1}{2} \cdot \frac{(n-j)!}{(n+j)!} \text{ und } a_i.$$

Die letzteren sind schon bekannt (22)). Die ersteren finden sich in Tafel IV. Das Ergebnis endlich, das sind die Größen

$$\frac{2n+1}{2} \frac{(n-j)!}{(n+j)!} a_i P_{nj}(\mu_i)$$

ist in Tafel V zusammengestellt.

Wenn es sich um die Herstellung einer einzigen speziellen Entwicklung handelte, wäre es offenbar ökonomischer zuerst die Größen  $C_i$  und  $S_i$  abzuleiten, und diese erst mit  $a_i$  zu multiplizieren. Man hätte dann für jeden Koeffizienten nur 17 Multiplikationen zu machen, während so 153 ausgeführt wurden. Da aber das Zahlenmaterial gestatten soll, jede beliebige auf der Kugel gegebene Verteilung mit der geringsten Mühe durch Kugelfunktionen darzustellen, so erscheint es zweckmäßig, auch die Multiplikation mit  $a_i$  vorwegzunehmen, so daß man damit überhaupt nichts mehr zu tun hat.

Die Rechnung wurde wieder 7 stellig geführt und auf 6 Stellen abgekürzt. In Fällen, wo sich das Resultat mit geringerer Sicherheit ergab, sind die unsicheren Stellen abgestrichen. Ergab zufällig die Kontrollrechnung den sichereren Wert, so wurde dieser verwendet.

Während die Größen  $P_n^j$  und  $P_{nj}$  mit wachsendem  $n$  und  $j$  selbst bedeutend anwachsen und die Größenordnung  $10^{19}$  erreichen, sinken im Gegensatz hierzu die Werte des Faktors  $\frac{2n+1}{2} \cdot \frac{(n-j)!}{(n+j)!}$  bis zur Größenordnung  $10^{-38}$  herab. Das Produkt bleibt also noch immer klein von der Ordnung  $10^{-19}$ , mit Rücksicht auf  $a_i$  sogar von der Ordnung  $10^{-20}$ . Daraus dürfen wir aber nicht die Berechtigung ableiten, diese Größen etwa von vornherein zu vernachlässigen. Allerdings werden nun auch die Größen  $A_n^j$  und  $B_n^j$

in 8') von der gleichen Größenordnung, was der Entwicklung den Schein außerordentlicher Konvergenz verleihen wird. In der Tat sind aber diese Koeffizienten in der Entwicklung 4) wieder mit den großen Werten  $P_{nj}$  in Kombination. Es kommt also schließlich doch auf das Verhalten der  $C$  und  $S$  an, ob die Entwicklung eine Konvergenz zeigt, und wie viele Glieder man beibehalten muß.

## II.

Die im vorigen berechneten Konstanten sollen nun zur Herstellung einer Entwicklung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde verwendet werden. Mit Rücksicht auf den Hauptzweck der Rechnungen, nämlich die Untersuchung der Schwereverhältnisse, sowie vielleicht im Interesse mancher anderer Probleme, bei welchen die Massen der Ozeane besonders behandelt werden müssen, wurde, wie schon in der Einleitung erwähnt, eine zweite Entwicklung hergestellt, welche nur die Tiefen der Meere darstellen, in allen Punkten des Festlandes aber den Wert Null geben soll. Eine dritte Entwicklung, welche nur die Höhe des Festlandes darstellen, in allen Punkten des Meeres aber den Wert Null geben soll, wurde zur Kontrolle berechnet. Jedes Glied der 1. Entwicklung ist also gleich der Summe der entsprechenden Glieder der beiden anderen Entwicklungen. Wir haben also 3 Entwicklungen herzustellen

- A. Lithosphäre
- B. Hydrosphäre
- C. physische Erdoberfläche.

### Bestimmung der mittleren Höhen und mittleren Tiefen auf der Erdoberfläche.

Das darzustellende Material wurde im Wesentlichen dem Erdprofilen von Heiderich<sup>1)</sup> entnommen. Leider zeigte sich, daß die der Publikation beigegebene Tafel im Maßstab 1:800 000 für die Längen und 1:800 000 für die Höhen die Verhältnisse ganz ungenügend wiedergibt. Mit Erlaubnis des Verfassers aber und durch das Entgegenkommen des Herrn Prof. E. Brückner, des derzeitigen Vorstandes des geographischen Instituts der Wiener Universität, gelang es mir, Heiderichs Originalzeichnungen im Maßstabe 1:2 000 000 resp. 1:200 000 zu erhalten, für welches Entgegenkommen ich hier meinen besten Dank ausspreche. Um die modernen Forschungsergebnisse zu berücksichtigen, wurden die Profile nach Dr.

1) Franz Heiderich: Die mittleren Erhebungsverhältnisse der Erdoberfläche (Geographische Abhandlungen herausg. von A. Penck in Wien, Bd. V, Heft 1.)

M. Groll's Meerestiefenkarten<sup>1)</sup> verbessert. Daraus konnten nun die Höhen- und Tiefenverhältnisse längs der Parallelkreise von  $5^{\circ}$  zu  $5^{\circ}$  zwischen  $+80^{\circ}$  und  $-65^{\circ}$  abgelesen werden.

Da die Durchführung der Entwicklung auf Werte in der Nähe der Pole nicht verzichten kann, mußten die fehlenden Parallelkreise ergänzt werden. Für den 85. Nordparallel wurde hierzu Stieler's Handatlas herangezogen, für die Südpolargegenden die Karten von Adametz<sup>2)</sup> und Stieler, sowie die Angaben Amundsen's<sup>3)</sup>. Bei der geringen Zahl der Messungen, die aus diesen Gebieten vorliegen, blieb beim Zeichnen der Profile der Willkür ein großer Spielraum und man mußte sich begnügen, die Lücken durch einen möglichst einfachen Zug zu überbrücken. Es handelt sich dabei aber nur um kleine Gebiete.

Jedes Profil wurde nun in 32 Teile zerlegt, derart, daß die für die Entwicklung verwendeten Meridiane die einzelnen Teile in der Mitte durchschneiden. Es reicht somit der erste Teil von  $5^{\circ}37'30''$  w. L. v. Gr. bis  $5^{\circ}37'30''$  östl. L., der 2. Teil von  $5^{\circ}37'30''$  bis  $16^{\circ}52'30''$  u. s. f., so daß jeder Teil eine Ausdehnung von  $11^{\circ}15'$  erhält. Die einzelnen Teile wurden nun mit einem gewöhnlichen Polarplanimeter ausgemessen, und durch Multiplikation mit einer Konstanten, die von der linearen Breite des Teiles, den Maßstäben des Profiles und von der Planimeterkonstante abhängt, ergab sich für den betreffenden Teil ein mittlerer Wert der Höhe oder Tiefe.

Die gleiche Operation wurde nun mit der Abänderung wiederholt, daß die Höhe des Festlandes immer gleich Null angenommen wurde.

Die Anwendung der 2. Neumann'schen Methode verlangt nun die Werte nicht von  $5^{\circ}$  zu  $5^{\circ}$  in Breite, sondern von den durch 13) gegebenen Stellen, die beiläufig je  $10^{\circ}$  auseinanderliegen. Die Abweichungen gegen die ganzen Zehner sind gering, im Maximum  $2^{\circ}8'$  beim 80. Parallelkreis, gehen sie auf die Werte:  $1^{\circ}56'$ ,  $1^{\circ}40'$ ,  $1^{\circ}24'$ ,  $1^{\circ}7'$ ,  $51'$ ,  $34'$ ,  $17'$ , 0 herunter. Bei der Unsicherheit welche den mittleren Höhen überhaupt anhaftet, können diese Unterschiede außer Acht bleiben.

Es wurde nun für jeden Zehnerparallel das Mittel der umschließenden Fünfer genommen, wobei der Cosinus der Breite als

1) M. Groll: Meerestiefenkarten (Institut f. Meereskunde d. Univ. Berlin. Veröffentl. Neue Folge A Heft 2).

2) E. Adametz: Die kartographische Entwicklung der Antarktis (Kartographische und schulgeographische Zeitschrift 1912 Heft 8).

3) A. Amundsen: Die Eroberung des Südpoles, München 1912.

Gewicht eingeführt wurde, um der Meridiankonvergenz Rechnung zu tragen. Das so gefundene Mittel wurde dann mit dem Zehnerwert zu einem neuen Mittel vereinigt. Es ist also für die Breite  $\varphi$ :

$$h = \frac{1}{2} \left[ \frac{h_{\varphi-5^\circ} \cos(\varphi-5^\circ) + h_{\varphi+5^\circ} \cos(\varphi+5^\circ)}{\cos(\varphi-5^\circ) + \cos(\varphi+5^\circ)} + h_{\varphi} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{h_{\varphi-5} + h_{\varphi+5}}{2} + h_{\varphi} \right] + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} 5^\circ \frac{h_{\varphi-5} - h_{\varphi+5}}{4}.$$

Das letzte Glied stellt nur eine kleine Korrektur dar. So entstanden die Wertsysteme der Tafel VI, welche die Grundlage für die 3 Entwicklungen  $A, B, C$  bilden. Dabei wurden für  $C$  die Werte  $A - B$  genommen.

**Bestimmung der intermediären Konstanten  $C_j^i$  und  $S_j^i$  und der Grössen  $A_n^i$  und  $B_n^i$ .**

Die Entwicklung beginnt mit der Bestimmung der intermediären Konstanten  $C_j^i$  und  $S_j^i$  nach den Formeln 7). Man hat zu diesem Zwecke die zu einem Parallelkreise gehörenden Werte der Tafel VI mit dem Cosinus oder Sinus des zugehörigen ( $j$  fachen) Vielfachen seiner geographischen Länge zu multiplizieren und die Summe zu bilden. Da aber der ganze Umkreis in 32, jeder Quadrant also in 8 gleiche Teile geteilt ist, so kommen die gleichen absoluten Werte des Cosinus oder Sinus mehrmals vor, und zwar bei ungeradem  $j$  viermal, bei geradem  $j$  mindestens 8 mal. Man wird sich also die Sache dadurch vereinfachen, daß man die entsprechenden Werte gleich zusammenzieht, wobei man nur auf das Vorzeichen zu achten hat.

Man gelangt leicht zu folgendem Schema. Wir geben den Meridianen die Nummern 0 bis 31 und bilden die folgenden Kombinationen

$$\begin{array}{rcl} 0 - 16 & = a & - \\ 1 - 17 - (15 - 31) & = b & 1 - 17 + (15 - 31) = b' \\ 2 - 18 - (14 - 30) & = c & 2 - 18 + (14 - 30) = c' \\ 3 - 19 - (13 - 29) & = d & 3 - 19 + (13 - 29) = d' \\ 4 - 20 - (12 - 28) & = e & 4 - 20 + (12 - 28) = e' \\ 5 - 21 - (11 - 27) & = f & 5 - 21 + (11 - 27) = f' \\ 6 - 22 - (10 - 26) & = g & 6 - 22 + (10 - 26) = g' \\ 7 - 23 - (9 - 25) & = h & 7 - 23 + (9 - 25) = h' \\ & - & 8 - 24 = i = i' \end{array}$$

$$\begin{aligned}
0 + 16 - (8 + 24) &= a_1 & 0 + 16 + (8 + 24) &= a_2 \\
1 + 17 - (9 + 25) &= b_1 & 1 + 17 + (9 + 25) &= b_2 \\
2 + 18 - (10 + 26) &= c_1 & 2 + 18 + (10 + 26) &= c_2 \\
3 + 19 - (11 + 27) &= d_1 & 3 + 19 + (11 + 27) &= d_2 \\
4 + 20 - (12 + 28) &= e_1 & 4 + 20 + (12 + 28) &= e_2 \\
5 + 21 - (13 + 29) &= f_1 & 5 + 21 + (13 + 29) &= f_2 \\
6 + 22 - (14 + 30) &= g_1 & 6 + 22 + (14 + 30) &= g_2 \\
7 + 23 - (15 + 31) &= h_1 & 7 + 23 + (15 + 31) &= h_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 - e_2 &= a_3 & a_2 + e_2 &= a'_3 & a'_3 + c'_3 &= a'_4 \\
b_2 - f_2 &= b_3 & b_2 + f_2 &= b'_3 & b'_3 + d'_3 &= b'_4 \\
c_2 - g_2 &= c_3 & c_2 + g_2 &= c'_3 & & \\
d_2 - h_2 &= d_3 & d_2 + h_2 &= d'_3 & &
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
a_1 = p \quad \quad \quad - \\
b_1 - h_1 = q \quad b_1 + h_1 = q' \\
c_1 - g_1 = r \quad c_1 + g_1 = r' \\
d_1 - f_1 = s \quad d_1 + f_1 = s' \\
\quad \quad \quad \quad \quad e_1 = t' \\
\hline
a'_3 - c'_3 = p_3 \quad \quad \quad - \\
\quad \quad \quad \quad \quad b'_3 - d'_3 = q'_3
\end{array} \left| \begin{array}{l}
a_3 = p_2 \quad \quad \quad - \\
b_3 - d_3 = q_2 \quad b_3 + d_3 = q'_2 \\
\quad \quad \quad \quad \quad c_3 = r'_2 \\
\hline
a'_4 - b'_4 = p_4 \\
\quad \quad \quad \quad \quad b'_3 - d'_3 = q'_3
\end{array} \right.$$

Setzen wir dann noch:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \frac{1}{p} & \gamma_1 &= \frac{1}{p} \cos \lambda_0 = \frac{1}{p} \sin 7 \lambda_0 \\
\gamma_2 &= \frac{1}{p} \cos 2 \lambda_0 = \frac{1}{p} \sin 2 \lambda_0 \cdots \gamma_7 = \frac{1}{p} \cos 7 \lambda_0 = \frac{1}{p} \sin \lambda_0 & \gamma_8 &= 0,
\end{aligned}$$

wo  $\lambda_0 = 11^\circ 15'$  ist, so finden wir:

$$\begin{aligned}
C_1 &= a\gamma_0 + b\gamma_1 + c\gamma_2 + d\gamma_3 + e\gamma_4 + f\gamma_5 + g\gamma_6 + h\gamma_7 \\
C_3 &= a\gamma_0 - f\gamma_1 - g\gamma_2 + b\gamma_3 - e\gamma_4 - h\gamma_5 + c\gamma_6 - d\gamma_7 \\
C_5 &= a\gamma_0 - d\gamma_1 + g\gamma_2 + h\gamma_3 - e\gamma_4 + b\gamma_5 - c\gamma_6 + f\gamma_7 \\
C_7 &= a\gamma_0 - h\gamma_1 - c\gamma_2 + f\gamma_3 + e\gamma_4 - d\gamma_5 - g\gamma_6 + b\gamma_7 \\
C_9 &= a\gamma_0 + h\gamma_1 - c\gamma_2 - f\gamma_3 + e\gamma_4 + d\gamma_5 - g\gamma_6 - b\gamma_7 \\
C_{11} &= a\gamma_0 + d\gamma_1 + g\gamma_2 - h\gamma_3 - e\gamma_4 - b\gamma_5 - c\gamma_6 - f\gamma_7 \\
C_{13} &= a\gamma_0 + f\gamma_1 - g\gamma_2 - b\gamma_3 - e\gamma_4 + h\gamma_5 + c\gamma_6 + d\gamma_7 \\
C_{15} &= a\gamma_0 - b\gamma_1 + c\gamma_2 - d\gamma_3 + e\gamma_4 - f\gamma_5 + g\gamma_6 - h\gamma_7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= p\gamma_0 + q\gamma_2 + r\gamma_4 + s\gamma_6 \\ C_6 &= p\gamma_0 - s\gamma_2 - r\gamma_4 + q\gamma_6 \\ C_{10} &= p\gamma_0 + s\gamma_2 - r\gamma_4 - q\gamma_6 \\ C_{14} &= p\gamma_0 - q\gamma_2 + r\gamma_4 - s\gamma_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= b'\gamma_7 + c'\gamma_6 + d'\gamma_5 + e'\gamma_4 + f'\gamma_3 + g'\gamma_2 + h'\gamma_1 + i'\gamma_0 \\ S_3 &= f'\gamma_7 - g'\gamma_6 + b'\gamma_5 + e'\gamma_4 - h'\gamma_3 + c'\gamma_2 + d'\gamma_1 - i'\gamma_0 \\ S_5 &= d'\gamma_7 - g'\gamma_6 + h'\gamma_5 - e'\gamma_4 + b'\gamma_3 + c'\gamma_2 - f'\gamma_1 + i'\gamma_0 \\ S_7 &= -h'\gamma_7 + c'\gamma_6 + f'\gamma_5 - e'\gamma_4 - d'\gamma_3 + g'\gamma_2 + b'\gamma_1 - i'\gamma_0 \\ S_9 &= -h'\gamma_7 - c'\gamma_6 + f'\gamma_5 + e'\gamma_4 - d'\gamma_3 - g'\gamma_2 + b'\gamma_1 + i'\gamma_0 \\ S_{11} &= d'\gamma_7 + g'\gamma_6 + h'\gamma_5 + e'\gamma_4 + b'\gamma_3 - c'\gamma_2 - f'\gamma_1 - i'\gamma_0 \\ S_{13} &= f'\gamma_7 + g'\gamma_6 + b'\gamma_5 - e'\gamma_4 - h'\gamma_3 - c'\gamma_2 + d'\gamma_1 + i'\gamma_0 \\ S_{15} &= b'\gamma_7 - c'\gamma_6 + d'\gamma_5 - e'\gamma_4 + f'\gamma_3 - g'\gamma_2 + h'\gamma_1 - i'\gamma_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= q'\gamma_6 + r'\gamma_4 + s'\gamma_2 + t'\gamma_0 \\ S_6 &= -s'\gamma_6 + r'\gamma_4 + q'\gamma_2 - t'\gamma_0 \\ S_{10} &= -s'\gamma_6 - r'\gamma_4 + q'\gamma_2 + t'\gamma_0 \\ S_{14} &= q'\gamma_6 - r'\gamma_4 + s'\gamma_2 - t'\gamma_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4 &= p_2\gamma_0 + q_2\gamma_4 & S_4 &= q'_2\gamma_4 + r'_2\gamma_0 \\ C_{12} &= p_2\gamma_0 - q_2\gamma_4 & S_{12} &= q'_2\gamma_4 - r'_2\gamma_0 \\ C_8 &= p_3\gamma_0 & S_8 &= q'_3\gamma_0 \\ 2 C_{16} &= p_4\gamma_0 & S_{16} &= 0. \end{aligned}$$

$C_0$  endlich ist das arithmetische Mittel aus allen Werten eines Parallelkreises.

Nach diesem Schema wurden die Größen  $C_j^i$  und  $S_j^i$  und zwar für die 3 Entwicklungen  $A$ ,  $B$  und  $C$  selbständig berechnet. Die Kontrollgleichung  $C = A - B$  ergab Abweichungen, welche den Betrag von  $\pm 2^m$  nirgends überschritten. Daran schloß sich die Berechnung von  $A'_n$  und  $B'_n$ , die ebenfalls für alle 3 Entwicklungen selbständig ausgeführt wurde. Um die Kontrolle sicherer zu gestalten, wurden aber in  $C$  die genauen Werte  $A - B$  zu Grunde gelegt. Hierzu ist weiter nichts zu bemerken, als daß die Rechnung nunmehr um eine Stelle genauer geführt werden mußte, um die Kontrollgleichung auf wenige Einheiten der letzten Stelle zum stimmen zu bringen.

In der Tafel VII sind die vollständigen Entwicklungen  $A$  und  $B$  gegeben. Für  $C$  kann man ohne weiteres  $A - B$  nehmen, nachdem die Kontrollgleichung keine wesentlichen Unterschiede ergeben

hat. Die Glieder erscheinen alle in der Form

$$a \cdot 10^k P_{nj}(\mu) \begin{cases} \cos j\lambda \\ \sin j\lambda \end{cases}$$

Die Einführung der Zehnerpotenzen ist durch die großen Unterschiede der Größenordnung der  $P_{nj}$  bedingt, welche in Tafel III zum Ausdruck kommt. Der Exponent  $k$  wurde so gewählt, daß der Zahlenkoeffizient  $a$  beiläufig dem entspricht, was die Amplitude des betreffenden Gliedes in Metern ausmacht. Da somit die Amplitude noch immer etwa 5 mal größer, oder 2 mal kleiner sein kann als  $a$ , so läßt sich aus diesen Tafeln die Konvergenz nur schlecht entnehmen, und wir müssen daher auch mit dem Urteil darüber, d. i. über die Stärke des Abnehmens der Koeffizienten bis zur Besprechung der Darstellung zurückhalten.

Bezüglich der technischen Seite der Herstellung einer solchen Entwicklung möge noch bemerkt werden, daß die Rechenarbeit keine sehr bedeutende ist. Die Berechnung der Größen  $C_j^i$  und  $S_j^i$  erfordert 8, die der  $A_n^i$  und  $B_n^i$  nur 6 Seiten Rechenpapierses im Format  $40 \times 25$  cm für jede einzelne der 3 Entwicklungen.

#### Berechnung der Darstellung.

Es ist nun die Frage zu beantworten, in wie weit die Entwicklungen ein brauchbares Bild der Erdoberfläche geben, oder wenigstens das wiedergeben, was die Tafel VI enthält. Es bestand ursprünglich die Absicht die Berechnung der Darstellung von den niederen zu höheren Ordnungen der Kugelfunktionen fortschreiten zu lassen, um zu erkennen, wie sich das Erdbild durch Hinzutreten der höheren Ordnungen nach und nach vervollständigt. Ich bin aber in dieser Richtung nur bis zur 5. Ordnung fortgeschritten. Im Weiteren steigt die Arbeit dann derart ins Ungeheure, daß ich davor zurückschreckte. Ich habe daher die Berechnung der einzelnen  $Y$  (nach Formel 4) aufgegeben, und gleich von vornherein angestrebt, alle Glieder verschiedener Ordnung zusammenzufassen, welche mit gleichen Cosinus- oder Sinus-Faktoren multipliziert sind, mit anderen Worten im System der Tafel VII nicht kolonnenweise, sondern zeilenweise fortzuschreiten. Die Arbeit geht dadurch mindestens auf den 10. Teil herunter.

Die Aequidistanz der Meridiane erlaubt dabei noch einige Abkürzungen. Man rechnet alle Glieder zunächst nur für einen Quadranten. Bei den Gliedern gerader Ordnung reicht man schon mit der direkten Berechnung eines halben resp. Viertel- oder Achtelquadranten aus und kann die auf den Quadranten fehlenden

Werte dann nach der Symmetrie ergänzen. Man summiert dann die geraden und ungeraden Sinus- resp. Cosinusglieder, jede Gruppe für sich, und erhält für jede dieser Gruppen die Werte für den Quadranten als Summe von 8 Zahlen. Nun schreibt man diese Gruppen nach der Symmetrie für die ganze Erde aus, und erhält das Schlußresultat durch Addition von 4 Zahlen für jeden Netzpunkt, wozu als 5. noch das von der Länge unabhängige Glied der 1. Zeile in Tafel VII tritt.

Das Resultat dieser ziemlich mühevollen Rechnung ist in den Tafeln VIII für die 3 Entwicklungen  $A$ ,  $B$  und  $C$  niedergelegt. Aus dem Vergleich zwischen  $C$  und  $A - B$  ergibt sich, daß nirgends eine größere Fehleranhäufung stattgefunden hat. Der Unterschied erreicht nur in 71 von 544 Fällen den Wert  $\pm 1$  m, nur 2 mal den Wert  $\pm 2$  m. Nach der Wahrscheinlichkeitskurve ergibt sich daraus ein mittlerer Fehler von  $\pm 0.64$  m.

Die Berechnung der Darstellung wurde um eine Stelle genauer geführt, als die Berechnung der Koeffizienten. Es ist nämlich für viele Aufgaben wichtiger die Darstellung genau zu haben, wie die Koeffizienten selbst. Daß eine solche Entwicklung noch weit entfernt ist, die Verhältnisse der Erde richtig wiederzugeben, ist klar, und wenn man irgend einen Koeffizienten willkürlich um etwa 40 oder 50 m änderte, so würde dies den Wert der Entwicklung kaum schmälern. Dagegen ist es oft sehr wichtig zu wissen, was man in der Entwicklung überhaupt besitzt. Dies wird z. B. deutlich, wenn wir eine Anwendung auf die Schwerereduktionen machen wollen. Die Entwicklung wird hier nicht nur die Massen in großer Entfernung, sondern auch einen Teil der Massen in unmittelbarer Nähe jedes Punktes berücksichtigen. Es ist dann unbedingt nötig genau zu wissen, wie viel unberücksichtigt geblieben ist. Es ist daher in diesem Falle viel wichtiger zu wissen, wie die Entwicklung verläuft, als ob sie absolut richtig verläuft.

#### Konvergenzbetrachtungen.

Wir kommen nun zur Frage der Konvergenz. Es handelt sich dabei um die Feststellung, ob die Amplituden der einzelnen Glieder von Ordnung zu Ordnung so abnehmen, daß mit Hinzunehmen höherer und höherer Ordnungen eine fortschreitende Annäherung an eine gute Darstellung erreicht wird, oder mit anderen Worten, daß durch die Glieder der nächsthöheren Ordnung das Bild nicht wieder vollständig verändert wird. Es scheint nun auf den ersten Anblick, als ob man bei dem komplizierten Bau der Erdoberfläche solches von vornherein gar nicht erwarten dürfte ;

kommen doch innerhalb weniger Kilometer oft Schwankungen von mehreren tausend Metern vor, die also 30—50 % dessen betragen, was auf der Erde überhaupt vorkommt. Daraus kann man sich zu dem Schlusse verleiten lassen, daß selbst Glieder sehr hoher Ordnung noch nicht wesentlich kleiner sein werden, als die allerersten. In der Tat ist es aber nicht so.

Zunächst kann man eine Abnahme der Glieder nur von Ordnung zu Ordnung verlangen; die Zahl der Glieder gleicher Ordnung steigt aber; man wird also immer eine größere Anzahl von Gliedern in etwa gleicher Größe erwarten müssen. Nun betrachten wir ein extremes Beispiel: wir fragen: wie müßten die Glieder aussehen, durch welche die Alpen dargestellt werden, wenn wir uns dieselben als drei parallele Gebirgszüge von 2000 m Höhe und 40 km Basis vorstellen? Wellen, deren Kämme 40 km voneinander abstehen, müßten offenbar den Gliedern 1000. Ordnung entsprechen, da der Erdumfang 40 000 km beträgt. Die Zahl der Glieder dieser Ordnung ist aber 2001: Bei einer Amplitude von  $\pm 1000$  m käme also auf jedes Glied durchschnittlich 0.5 m. Nun werden aber die Glieder 1000. Ordnung gewiß nicht die einzigen sein, die sich am Aufbau der Alpen beteiligen. Diese nehmen nur einen sehr kleinen Teil der Erdoberfläche ein, und im übrigen Teile spielen die Glieder 1000. Ordnung keine hervorragende Rolle. Es werden also andere Ordnungen dazu dienen müssen, für die übrige Erde den Effekt der Glieder 1000. Ordnung wieder zu zerstören, werden sich dabei aber auch an den Alpen beteiligen müssen. So dürften wohl mehrere hundert Ordnungen in Betracht kommen, und die Zahl der Glieder steigt auf einige Hunderttausende; ihre mittlere Größe wird daher noch kleiner sein.

Diese Überlegung ist allerdings nur richtig, wenn alle Glieder mit Fleiß ihre Maxima aufeinanderlegen, um die Alpen zu bauen. Jedenfalls aber folgt daraus nicht nur, daß die einzelnen Glieder von Ordnung zu Ordnung abnehmen werden, sondern daß auch die Summe aller Glieder einer Ordnung, also das zugehörige  $Y$ , noch kleiner sein wird, als die noch darzustellenden Unterschiede in den Beobachtungen. Bloß aus dem Umstande also, daß die  $Y$  kleiner werden als die schließlich bleibenden Reste in der Darstellung, darf man nicht schließen, daß die Entwicklung überflüssig weit fortgesetzt wurde. Aus diesen Gesichtspunkten haben wir nun das Zahlenmaterial zu prüfen.

Zur Feststellung der Abnahme der Glieder wurde in jeder Ordnung das arithmetische Mittel aus allen Amplituden genommen. Die Amplituden wurden ihrerseits aus den Koeffizienten in Tafel

VII durch Multiplikation mit dem Maximum des zugehörigen  $P_n$  gebildet. Es ergibt sich folgende Zusammenstellung:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$A$	1013 m	691 m	578 m	564 m	402 m	300 m	206 m	151 m
$B$	894	617	488	479	331	247	197	143
$C$	119	74	90	85	71	53	9	8
$n$	9	10	11	12	13	14	15	16
$A$	153 m	147 m	124 m	89 m	104 m	94 m	94 m	75 m
$B$	126	120	96	77	93	85	76	63
$C$	27	27	28	12	11	9	18	12

Die Abnahme ist also deutlich ausgesprochen, wenn sie auch namentlich im Falle  $C$  unregelmäßig ist. Doch sind hier von  $n = 7$  an die Glieder überhaupt schon sehr klein.

Um nun die Abnahme von  $Y$  zu  $Y$  zu untersuchen, müßten diese berechnet vorliegen. Es wurde aber schon früher erwähnt, daß diese Berechnung nicht durchführbar war. Man muß sich also hier mit einer Überschlagsrechnung begnügen. Die Amplituden sämtlicher Glieder sind bekannt, doch läßt sich nicht überblicken in welcher Weise sie sich überanderlagern, und welche Maxima resultieren. Es wurde näherungsweise angenommen, daß die Maxima der einzelnen Glieder längs der Parallelkreise nach dem Zufallgesetze verteilt sind, und das resultierende Maximum durch die Wurzel der Quadratsumme der Amplituden ausgedrückt. Diese Rechnung wurde für alle Parallelkreise durchgeführt, und dann das Maximum herausgesucht. Es ergab sich folgendes

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$	$Y_8$
$A$	$\pm 1818$ m	$\pm 1474$ m	$\pm 1607$ m	$\pm 1574$ m	$\pm 1600$ m	$\pm 934$ m	$\pm 923$ m	$\pm 493$ m
$B$	1600	1307	1351	1345	1335	800	793	484
$C$	243	196	321	238	306	312	172	198
	$Y_9$	$Y_{10}$	$Y_{11}$	$Y_{12}$	$Y_{13}$	$Y_{14}$	$Y_{15}$	$Y_{16}$
$A$	$\pm 644$ m	$\pm 527$ m	$\pm 561$ m	$\pm 324$ m	$\pm 422$ m	$\pm 388$ m	$\pm 420$ m	$\pm 317$ m
$B$	546	458	360	287	380	406	302	270
$C$	230	161	212	161	97	112	108	119

Es ist also auch hier die Abnahme der Amplitude deutlich ausgesprochen, wenigstens im Falle  $A$  und  $B$ . Im Falle  $C$  ist die Abnahme allerdings sehr gering, hauptsächlich wohl deshalb, weil die ersten Glieder schon recht klein sind.

**Resultate.**

Wir wenden uns zu dem Vergleich mit den Grundlagen, die in Tafel VI enthalten sind. Ordnet man die Abweichungen (Beobachtung—Rechnung) nach der Größe, so ergibt die Abzählung folgende Zahlen:

<i>B—R</i>	0— 200 m	200— 400 m	400— 600 m	600— 800 m	800— 1000 m	1000— 2000 m	über 2000 m	Summe
<i>A</i>	274	159	61	24	13	12	1	544
<i>B</i>	326	148	42	13	8	6	1	544
<i>C</i>	489	37	5	9	1	3	0	544

Die größte Abweichung fällt bei *A* und *B* auf den Punkt:  $\varphi = +80$   $\lambda = 0$ , wie überhaupt alle größeren Abweichungen in die höheren Breiten fallen. Um diese Verhältnisse näher zu beleuchten wurde aus den Unterschieden *B—R* für jeden Parallelkreis ein mittlerer Fehler gerechnet. Die folgende Übersicht enthält das Resultat:

$\varphi$	+ 80°	+ 70°	+ 60°	+ 50°	+ 40°	+ 30°	+ 20°	+ 10°	0°
<i>A</i>	± 865 m	± 646 m	± 351 m	± 301 m	± 247 m	± 264 m	± 253 m	± 239 m	± 181 m
<i>B</i>	532	434	268	277	206	253	220	197	158
<i>C</i>	481	331	147	102	103	118	95	74	72
$\varphi$	— 10°	— 20°	— 30°	— 40°	— 50°	— 60°	— 70°	— 80°	
<i>A</i>	± 194 m	± 302 m	± 284 m	± 387 m	± 344 m	± 321 m	± 454 m	± 410 m	
<i>B</i>	194	226	232	289	339	316	406	258	
<i>C</i>	66	128	77	62	47	49	118	276	

Aus diesen Zahlen erkennt man zunächst, daß die Entwicklung *C* dem zugehörigen Material am besten entspricht. Das ist nicht verwunderlich, da die darzustellenden Werte den einfachsten Verlauf zeigen: sind doch zwei Drittel aller Werte gleich Null. Demgegenüber ist *A* der komplizierteste Fall, während *B* die Mitte hält.

In allen drei Fällen aber spricht sich die obenerwähnte schlechte Darstellung der Polgebiete deutlich aus, besonders im Norden, weniger im Süden, wo die Verhältnisse einfacher sind. Die Sache erscheint zunächst auffallend. Infolge der Meridiankonvergenz sind nämlich die Polargebiete mit Beobachtungspunkten verhältnismäßig reicher ausgestattet, als die niederen Breiten. Man könnte daher erwarten, daß ihnen deshalb ein größeres Gewicht und damit auch eine bessere Darstellung zufallen werde. Diesem Umstande aber

wirken die Größen  $a_i$  in 8') entgegen, deren numerische Werte unter 22) gegeben sind. Sie spielen die Rolle von Gewichten, und da sie dem Cosinus der geographischen Breite beiläufig proportional sind, so wird dadurch die ungleichmäßige Verteilung der Beobachtungen ausgeglichen. Aus diesem Gesichtspunkte sollten die Zahlen in obiger Zusammenstellung besser untereinander stimmen.

Der Grund des Mißverhältnisses liegt nun darin, daß die  $P_{nj}$  für alle  $j \neq 0$  wegen der darin enthaltenen Potenzen von  $\cos \varphi = (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}$  am Pole selbst verschwinden, und in höheren Breiten meist so klein bleiben, daß sie praktisch gleich Null zu setzen sind. Während also in den mittleren Breiten sich jeder Wert aus 289 Gliedern zusammensetzt, haben unter  $80^\circ$  Breite nur 187 einen nennenswerten Betrag, und für den Pol selbst bleiben nur noch die 17 Glieder, welche die  $P_n$  enthalten. Die Ausdrucksfähigkeit der Entwicklung nimmt also gegen die Pole stark ab, und deshalb wird die Darstellung hier mangelhaft.

Bei dem Äquator, für welchen auch die Hälfte der Glieder verschwindet, nämlich alle ungeraden Funktionen von  $\mu = \sin \varphi$ , tritt solches nicht auf, weil hier ein beiderseitiger Anschluß vorliegt, der in den hohen Breiten fehlt. Es wäre daher auch möglich gewesen, daß für die Pole selbst ganz unbrauchbare Werte auftreten. Tatsächlich erhält man aber für diese beiden Punkte ganz gute Werte

Nordpol:  $-1376.2$  m    Südpol  $+1020.8$  m.

Glücklicherweise sind die Gebiete mit schlechterer Darstellung verhältnismäßig klein, und die Abweichungen deshalb weniger bedenklich. Führt man den Cosinus der geographischen Breite als Gewicht ein und bildet das Mittel aus allen Parallelkreisen, so findet man

$A: \pm 202$  m     $B: \pm 170$  m     $C: \pm 70$  m.

Die mittleren Höhen der Tafel VI sind also bis auf 100—200 m richtig dargestellt. Da es unwahrscheinlich ist, daß die Ausgangswerte genauer sind, oder auch, daß sich heute auf irgendwelchem Wege bessere Werte überhaupt gewinnen lassen, so kann man wohl sagen, daß die Entwicklungen allen Anforderungen entsprechen, und daß es kaum einen Wert hätte, sie weiter zu treiben.

Es bleibt nur noch übrig das Resultat der Entwicklung mit der Natur zu vergleichen. Es wurde früher erwähnt, daß bis  $n = 5$  die Darstellungen einzeln berechnet werden konnten. Es ist nämlich gestattet bei jedem beliebigen  $n$  stehen zu bleiben und

man erhält immer die im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate beste Entwicklung, wenn man die Größen  $a_i$  als Gewichte der Parallelkreise einführt. Es ist nicht ohne Interesse die Resultate dieser einfacheren Entwicklungen zu betrachten.

Das 1. Glied ( $n = 0$ ) ist für die Entwicklung  $A$  gleich  $-2455.7$  m, für  $B$ :  $-2680.9$  m und für  $C$ :  $+225.2$ . Wenn man also die Kontinentalmassen abträgt und damit die Tiefen der Ozeane ausfüllt, so würde die ausgeglichene Fläche  $2455.7$  m unter das jetzige Meeressniveau fallen. Die Wasser des Ozeans könnten die ganze Erde mit einer Tiefe von  $2680.9$  m überdecken. Den Landmassen entspricht eine die ganze Erde umspannende Schicht von  $225.2$  m Mächtigkeit.

Die folgenden Bemerkungen beziehen sich nur noch auf die Entwicklung  $A$ , da sie allein die für das Gesamtbild so charakteristische Küstenlinie gut darstellt, während diese bei  $B$  und  $C$  begreiflicherweise ganz verwischt wird.

Die Glieder 1. Ordnung erzeugen eine Unsymmetrie im Ausmaße von  $\pm 1800$  m, so daß noch nirgends der Meeresspiegel erreicht wird. Der europäisch-asiatische Kontinent erscheint nur angedeutet durch ein Ansteigen des Meeresbodens bis auf  $-640$  m. Erst die Hinzunahme von  $Y_1$  läßt „trockenes Land“ erscheinen an der Stelle von Europa—Asien, alles andere bleibt noch vom Meer überdeckt. Daran ändert auch die Hinzunahme von  $Y_2$  nicht viel: Die Kontinentalmasse umfaßt nun einen Teil von Nord-Afrika; Amerika liegt noch in einer Tiefe von  $8-900$  m. Legt man die 0-Linie in etwa  $-2800$  m, so erhält man beiläufig das Bild, das Love<sup>1)</sup> nach seiner Entwicklung bis zu Gliedern 3. Ordnung zeichnet.

Die Glieder 4. Ordnung ( $Y_4$ ) bringen die erste Andeutung von Amerika in Form einer Kontinentalmasse, die von Norden herein bis etwa zum 60. Parallel reicht. Sie setzt sich als submarine Bodenwelle in der Richtung gegen Süd-Amerika fort, erhebt sich aber nirgends über die Tiefe von  $600$  m. Afrika reicht nun bis zum Äquator.

Die Glieder 5. Ordnung ( $Y_5$ ) endlich lassen Süd-Amerika als selbständige kleine Insel entstehen. Süd-Afrika ist durch eine Bodenwelle unter dem Meere kaum angedeutet. Australien bleibt mit  $800$  m Meer bedeckt. Das Ergebnis dieser Rechnungen

1) Love: Gravitational Stability of the earth. Phil. Trans. of London Bd. 207 A. Love rechnet unter der vereinfachenden Annahme, daß allen Punkten oberhalb seiner Null-Linie ( $-8400$  Fuß) die Höhe  $+1$ , allen Punkten unterhalb die Höhe  $-1$  zukommt.

ist also, daß selbst bei  $n = 5$  noch kein annähernd richtiges Bild entsteht. Mit einer Entwicklung, die nur wenige Glieder enthält, wird man also gewiß nie auskommen.

Um endlich das Schlußresultat, welches in der Darstellung auf Tafel VIII enthalten ist, zu überblicken, wurden die Werte in eine Karte eingetragen (Karte II), für welche eine flächentreue Projektion gewählt wurde und auf Grund einer graphischen Interpolation Schichtenlinien von 1000 zu 1000 m gezogen. Zum Vergleich wurde eine ähnliche Karte (Karte I) aus den Beobachtungsdaten nach Tafel VI hergestellt. Dieser Vergleich ist deshalb wichtig, weil er zeigt, wie viel man von der Entwicklung überhaupt erwarten darf; denn was in den Grundlagen nicht enthalten ist, kann auch die Darstellung nicht bringen. Ein Blick auf die beiden Karten zeigt nun eine weit über die Erwartung gehende Ähnlichkeit, so daß man fast von einer vollkommenen Wiedergabe des Materiales sprechen kann. Durch einen merkwürdigen Zufall erscheint das Bild sogar verbessert. So ist in der Darstellung das auffallend spitze Aussehen von NW-Afrika verschwunden, und die Form von NE-Amerika hat auch an Richtigkeit gewonnen. Namentlich in dem letzteren Falle handelt es sich aber um ganz geringe Höhenunterschiede, für welche flache Küsten sehr empfindlich sind.

Die Form der Kontinente erscheint in großen Zügen wiedergegeben. Doch ist die Küstenlinie durchwegs landeinwärts verschoben, während die  $-1000$  m Linie mit der wahren Lage der Küste viel besser zusammenfällt. Es hängt dies damit zusammen, daß die mittlere Höhe der Kontinente viel geringer ist, als die mittlere Tiefe des Meeres. Die Mitte liegt etwa bei  $-2000$  m. Bei dem Ausgleich der Steilabfälle werden also die oberen Schichtenlinien gegen das Land, die unteren gegen die See zu rücken.

Im einzelnen sind folgende Punkte hervorzuheben. Die Behringstraße erscheint stark verbreitert, aber durch ein sehr seichtes Meer ersetzt. Der Abschluß des stillen Ozeans gegen das Eismeer ist also recht gut wiedergegeben. Dagegen erscheint der Mangel von Zentral-Amerika bedenklich, da hier das Meer doch über 1000 m tief bleibt. An sich ist die Sache nicht verwunderlich: um die schmale Landbrücke zwischen den zwei tiefen Meeren darzustellen, hätte man die Netzpunkte viel enger wählen und die Entwicklung viel weiter treiben müssen. Darum fehlt Zentral-Amerika auch schon in Karte I. Aus einem ähnlichen Grunde machen sich auch die Anden wenig bemerkbar: sie gleichen sich mit dem nahen tiefen Meere aus. Der submarine Zusammen-

hang zwischen Süd-Amerika und dem antarktischen Kontinent kommt gut zum Ausdruck. Auch sonst sind viele Einzelheiten in den Tiefenverhältnissen des pacifischen Ozeans dargestellt: so die geringere Tiefe westlich des Südens von Süd-Amerika, und die großen Tiefen östlich von Neu-Seeland und Japan. Neu-Seeland selbst und die anschließenden Inselgruppen sind durch ein ziemlich seichtes Meer ersetzt.

Die nordamerikanischen Gebirge nehmen einen breiten Raum ein.

Der atlantische Ozean erscheint im NE naturgetreu durch ein Meer geringer Tiefe abgeschlossen. Das Telegrafenterrasse wird durch eine Ausbiegung der  $-4000$  m-Linie nach Süden bis zum 35. Breitengrad dargestellt. Ebenso sind die Tiefenverhältnisse des südatlantischen Ozeans gut wiedergegeben. Das mittelländische Meer erscheint stark vergrößert, aber sehr seicht.

Das afrikanische Hochland ist mehrfach kenntlich; Madagaskar ist in den Tiefenlinien angedeutet.

Nördlich vom kaspischen Meere findet man eine kleine Depression; das asiatische Hochland steigt über  $3000$  m; Vorder-Indien ist in der Küstenlinie nur angedeutet, in der  $-2000$  m-Linie aber ganz ausgebildet; besser zeigt sich Hinter-Indien; die Sunda-Inseln sind durch eine kleine Insel im seichten Meer ersetzt.

Australien ist von Süden her etwas verkleinert.

Im Südpolargebiete spricht sich das Roß-Meer deutlich aus, dagegen ist Graham-Land und das Wedell-Meer verwischt, während es auf Karte I noch ziemlich deutlich ist. Unter  $100-130^{\circ}$  östl. v. Gr. und etwa  $80^{\circ}$  Breite erhebt sich das Land über  $2000$  m. Die Stelle ist nicht weit vom König Eduard VII Plateau.

Im allgemeinen kann man also wohl sagen, daß sich die Entwicklung den tatsächlichen Verhältnissen recht gut anschließt, und sie dürfte für viele Probleme der Geophysik eine brauchbare Grundlage bilden.

Der Grundsatz, der bei der Herstellung der Entwicklung leitend war, war der, die Massenverteilung richtig zu erhalten, da es vornehmlich Schwereuntersuchungen waren, die die Veranlassung geboten haben. Bei anderen Problemen sind aber vielleicht andere Gesichtspunkte maßgebend, und da wird sich die obige Entwicklung vielleicht weniger eignen. So wird z. B. bei Untersuchungen über die Ebbe und Flut des Meeres das Fehlen von Zentral-Amerika

störend sein. Die im ersten Teile abgeleiteten Konstanten gestatten leicht eine entsprechende Entwicklung für dieses Problem herzustellen, wenn man entsprechende Höhenwerte zu Grunde legt, bei denen statt der Massenverteilung die Küstenentwicklung besser zum Ausdruck kommt. Die gute Übereinstimmung der beiden Karten zeigt, daß die Entwicklung auch auf ziemlich geringfügige Änderung der Grundlagen richtig reagiert. Einfacher dürfte es vielleicht sein, eine Zusatzentwicklung herzustellen, welche nur die gewünschten Verbesserungen darstellt. Die Rechnung wird dadurch sehr abgekürzt, daß alle nicht geänderten Punkte mit Nullen eintreten.

---



## Inhaltsübersicht.

- Einleitung p. 3  
Methode und Formeln p. 4—15.  
Tafel der Konstanten  $\vartheta$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $M$  und  $a$  p. 12 (Taf. I)  
Tafel der Koeffizienten der Kugelfunktionen (Taf. II, s. Anhang)  
Tafel der Kugelfunktionen  $P_n$  (Taf. II, s. Anhang)  
Tafel der Größen  $\log P_{n_j}(\mu_i)$  (Taf. III, s. Anhang)  
Tafel der Größen  $\frac{2n+1}{2} \cdot \frac{(n-j)!}{(n+j)!}$  (Taf. IV, s. Anhang)  
Tafel der Größen  $\log a_i \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{(n-j)!}{(n+j)!} P_{n_j}(\mu_i)$  (Taf. V, s. Anhang)  
Bestimmung der mittleren Höhen und Tiefen der Erdoberfläche p. 15—17 (Taf. VI, s. Anhang) (hierzu Karte I)  
Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten p. 17—20  
Entwicklung  $A$  (Lithosphäre) (Taf. VII, s. Anhang)  
Entwicklung  $B$  (Hydrosphäre) (Taf. VII, s. Anhang)  
Berechnung der Darstellung für  $A$ ,  $B$  und  $C$  p. 20—21 (Taf. VIII, s. Anhang) (hierzu Karte II)  
Konvergenzbetrachtungen p. 21—23  
Resultate p. 24—29.
-



## **Bildfehler**

Die Seite ist im System nicht hinterlegt, bitte melden Sie den Fehler an die DigiZeitschriften Geschäftsstelle.

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## **Bildfehler**

Die Seite ist im System nicht hinterlegt, bitte melden Sie den Fehler an die DigiZeitschriften Geschäftsstelle.

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## **Bildfehler**

Die Seite ist im System nicht hinterlegt, bitte melden Sie den Fehler an die DigiZeitschriften Geschäftsstelle.

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## **Bildfehler**

Die Seite ist im System nicht hinterlegt, bitte melden Sie den Fehler an die DigiZeitschriften Geschäftsstelle.

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## **Bildfehler**

Die Seite ist im System nicht hinterlegt, bitte melden Sie den Fehler an die DigiZeitschriften Geschäftsstelle.

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## **Bildfehler**

Die Seite ist im System nicht hinterlegt, bitte melden Sie den Fehler an die DigiZeitschriften Geschäftsstelle.

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## **Bildfehler**

Die Seite ist im System nicht hinterlegt, bitte melden Sie den Fehler an die DigiZeitschriften Geschäftsstelle.

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## **Bildfehler**

Die Seite ist im System nicht hinterlegt, bitte melden Sie den Fehler an die DigiZeitschriften Geschäftsstelle.

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## **Bildfehler**

Die Seite ist im System nicht hinterlegt, bitte melden Sie den Fehler an die DigiZeitschriften Geschäftsstelle.

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## **Bildfehler**

Die Seite ist im System nicht hinterlegt, bitte melden Sie den Fehler an die DigiZeitschriften Geschäftsstelle.

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## **Bildfehler**

Die Seite ist im System nicht hinterlegt, bitte melden Sie den Fehler an die DigiZeitschriften Geschäftsstelle.

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## **Bildfehler**

Die Seite ist im System nicht hinterlegt, bitte melden Sie den Fehler an die DigiZeitschriften Geschäftsstelle.

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## **Bildfehler**

Die Seite ist im System nicht hinterlegt, bitte melden Sie den Fehler an die DigiZeitschriften Geschäftsstelle.

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## **Bildfehler**

Die Seite ist im System nicht hinterlegt, bitte melden Sie den Fehler an die DigiZeitschriften Geschäftsstelle.

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)



# ABHANDLUNGEN

DER  
KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN  
ZU GÖTTINGEN.

## Mathematisch - physikalische Klasse. Neue Folge.

- I. Bd. No. 1. **Koenen, A. v.**, *Ueber Fossilien der Unteren Kreide am Ufer des Mungo in Kamerun*. Mit 4 Tafeln. 4. (48 S.) 1897. 5.  
Nachtrag dazu. 4. (S. 49 — 65 mit Tafeln V—VII.) 1898. 3.
- I. Bd. No. 2. **Brendel, Martin**, *Theorie der kleinen Planeten*. Erster Teil. 4. (171 S.) 1898. 16.
- I. Bd. No. 3. **Schur, W.**, *Ableitung relativer Oerter des Mondes gegen die Sonne aus heliometrischen Messungen von Sehnenlängen ausgeführt auf der Sternwarte zu Göttingen während der partiellen Sonnenfinsternisse von 1890 Juni 16/17 (Beobachter: Schur, Ambronn u. Hayn) und von 1891 Juni 6 (Beobachter: Schur)*. Mit 3 Plänen der Sternwarte nebst Verzeichniss der grösseren Instrumente. 4. (26 S.) 1898. 3.
- I. Bd. No. 4. **Schur, W.**, *Vermessung der beiden Sternhaufen  $\eta$  und  $\alpha$  Persei mit dem sechszoölligen Heliometer der Sternwarte in Göttingen verbunden mit einer Uebersicht aller bis zum Jahre 1900 ausgeführten Instrumentaluntersuchungen*. Mit einer Sternkarte. 4. (88 S.) 1900. 9.
- II. Bd. No. 1. **Wiechert, E.**, *Theorie der automatischen Seismographen*. 4. (128 S.) 1903. 8.
- II. Bd. No. 2. **Kramer, Julius**, *Theorie der kleinen Planeten. Die Planeten vom Hekubatypus*. 4. (153 S.) 1902. 15.
- II. Bd. No. 3. **Furtwängler, Ph.**, *Ueber das Reciprocitätsgesetz der  $i$ ten Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn  $i$  eine ungerade Primzahl bedeutet*. 4. (82 S.) 1902. 6.
- II. Bd. No. 4. **Prasad, G.**, *Constitution of Matter and Analytical Theories of Heat*. 4. (68 S.) 1903. 6.
- III. Bd. No. 1. **Ehlers, E.**, *Neuseeländische Anneliden*. Mit 9 Tafeln. 4. (79 S.) 1904. 10.
- III. Bd. No. 2. **Koenen, A. v.**, *Ueber die Untere Kreide Helgolands und ihre Ammonitiden*. Mit 4 Tafeln. 4. (63 S.) 1904. 4.
- III. Bd. No. 3. **Schur u. Ambronn**, *Die Messungen des Sonnendurchmessers an dem Kepsoldschen 6zöll. Heliometer der Sternwarte zu Göttingen*. 4. (126 S. u. 2 Taf.) 1905. 12.
- III. Bd. No. 4. **Brendel, M.**, *Theorie des Mondes*. 4. (97 S.) 1905. 7.
- III. Bd. No. 5. **Linke, F.**, *Luftelektrische Messungen bei 12 Ballonfahrten*. Mit 4 Tafeln. 4. (30 S.) 1904. 6.
- IV. Bd. No. 1. **Schwarzschild, K.**, *Untersuchungen zur geometrischen Optik. I. Einleitung in die Fehlertheorie optischer Instrumente auf Grund des Eikonalbegriffs*. Mit 6 Fig. 4. (31 S.) 1905. 2.
- IV. Bd. No. 2. **Schwarzschild, K.**, *Untersuchungen zur geometrischen Optik. II. Theorie der Spiegelteleskope*. Mit 9 Fig. 4. (28 S.) 1905. 2.
- IV. Bd. No. 3. **Schwarzschild, K.**, *Untersuchungen zur geometrischen Optik. III. Ueber die astrophotographischen Objektive*. Mit 10 Fig. 4. (54 S.) 1905. 4.
- IV. Bd. No. 4. **Verworn, M.**, *Die archaolithische Cultur in den Hipparionschichten von Aurillac (Cantal)*. Mit 5 Taf. 4. (56 S.) 1905. 4,50.
- IV. Bd. No. 5. **Meyermann, B.**, *Vermessung der Umgebung des Orionnebels*. 4. (47 S.) 1906. 3,50.
- V. Bd. No. 1. **Kohlschütter, E.**, *Ergebnisse der Ostafrikanischen Pendlexpedition v. J. 1899 u. 1900*. Mit 16 Tafeln u. 8 Figuren im Text. 4. (VIII u. 229 S.) 1907. 26.
- V. Bd. No. 2. **Schwarzschild, K.**, *Ueber die totale Sonnenfinsternis vom 30. August 1905*. Mit 5 Tafeln. 4. (73 S.) 1907. 6.
- V. Bd. No. 3. **Kramer, J.**, *Theorie der kleinen Planeten vom Hekubatypus*. 4. (154 S.) 1907. 14.
- V. Bd. No. 4. **Ehlers, E.**, *Neuseeländische Anneliden. II*. Mit 16 Figuren. 4. (31 S.) 1907. 2.
- V. Bd. No. 5. **Gerdien, H.**, *Untersuchungen über die atmosphärischen radioaktiven Induktionen*. Mit 4 Tafeln. 4. (74 S.) 1907. 7.
- VI. Bd. Nr. 1. **Pütter, August**, *Studien zur vergleichenden Physiologie des Stoffwechsels*. 4. (79 S.) 1908. 5.
- VI. Bd. No. 2. **Holm, Ragnar**, *Experimentelle Untersuchungen über die geschichtete positive Glühlichtsäule, insbesondere über das Schichtenpotential in  $H_2, N_2, He$* . Mit 3 Tafeln und 6 Figuren im Text. 4. (50 S.) 1908. 4.

## **Bildfehler**

Die Seite ist im System nicht hinterlegt, bitte melden Sie den Fehler an die DigiZeitschriften Geschäftsstelle.

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)