40)
$$\begin{aligned}
\log \varkappa &= 9{,}24507 \\
\Gamma &= 353^{0}25{,}'78 \\
\log \sin \iota &= 9{,}21033 \\
\Theta &= 225^{0}41{,}'63 \\
A &= -12^{0}7{,}'60 \\
n &= 1019{,}''8891 \\
\log a &= 0{,}3609691.
\end{aligned}$$

Anfangsepoche 1900 Jan. 0,0 mittl. Zeit Berlin. Äquinoctium 1900,0

Die Werte können als recht gut übereinstimmend angesehen werden, doch wird die Genauigkeit des Elementensystems erst aus der Darstellung der Beobachtungen selbst ersichtlich.

Zweites Kapitel.

Aufstellung der Bewegungstafeln für den Planeten Sappho (80) im Zeitraum von 1860 bis 1910.

1. Wir müssen bei der Tabulierung der Störungskoeffizienten darauf bedacht sein, die Zahl der Argumente in R, W, $\mathfrak{Z}$ bis auf Vielfache eines einzigen zu vermindern. Deshalb ziehen wir zunächst die für die Rechnung konstanten Größen Jupiters η', Π', $\sin J'$, σ' und die nur langsam veränderlichen Größen η, Π, $\sin j$, σ des Planeten heraus. Wir erhalten alsdann Ausdrücke, in denen nur noch w und v als Argumente auftreten.

41)
$$\begin{aligned}
R = {} & \Sigma R^{0}_{c,n} \cos nw + \Sigma R^{\pm 1}_{c,n} \cos (nw \pm v) + \Sigma R^{\pm 2}_{c,n} \cos (nw \pm 2v) \\
& + \Sigma R^{0}_{s,n} \sin nw + \Sigma R^{\pm 1}_{s,n} \sin (nw \pm v) + \Sigma R^{\pm 2}_{s,n} \sin (nw \pm 2v).
\end{aligned}$$

Entsprechende Ausdrücke für W und $\mathfrak{Z}$.

Hierin bedeuten die $R^{0,\pm 1,\pm 2}_{c,s,n}$ Koeffizienten, die mit der Zeit langsame Veränderungen erleiden, und die in der Kramerschen Arbeit pg. 33—35 ausführlicher mitgeteilt sind. In unserem Falle waren von etwa 30 Koeffizienten nur 6 veränderlich. Die größte Änderung in 50 Jahren betrug 14 Einheiten der 6. Dezimale. Da wir uns mit einer Genauigkeit in der 5. Dezimale begnügen, so wurden bei den 6 veränderlichen Störungskoeffizienten die Werte für 1885, die Mitte unserer Tafel, zu Grunde gelegt. Die $\mathfrak{Z}$-Funktion können wir wieder völlig vernachlässigen; die genaue Berechnung zeigte, daß sie auf den Ort des Planeten keinen Einfluß ausübt. Die R- und W-Koeffizienten seien hier numerisch in Einheiten der 6. Dezimale in Teilen des Radius gegeben:

42)

$$\begin{array}{lllllll}
R^0_{c\cdot 0} + 17 & & & & & & \\
R^0_{c\cdot 1} - 190 & R^{-1}_{c\cdot 1} - 41 & & & & & \\
R^0_{c\cdot 2} + 339. & R^{-1}_{c\cdot 2} + 485 & R^{-1}_{s\cdot 2} + 36 & R^{-2}_{c\cdot 2} + 103 & R^{-2}_{s\cdot 2} + 16 & & \\
R^0_{c\cdot 3} + 43 & R^{-1}_{c\cdot 3} - 264 & R^{-1}_{s\cdot 3} - 98 & R^{-2}_{c\cdot 3} - 120 & R^{-2}_{s\cdot 3} - 92 & & \\
 & R^{-1}_{c\cdot 4} - 27 & & R^{-2}_{c\cdot 4} - 41 & R^{-2}_{s\cdot 4} - 30 & & \\
 & & W^{+1}_{s\cdot 0} - 32 & & & & \\
W^0_{s\cdot 1} + 514 & & W^{+1}_{s\cdot 1} - 43 & W^{-1}_{s\cdot 1} + 132 & W^{-1}_{c\cdot 1} - 29 & & \\
W^0_{s\cdot 2} - 437 & & W^{+1}_{s\cdot 2} + 113 & W^{-1}_{s\cdot 2} - 1299 & W^{-1}_{c\cdot 2} + 126 & W^{-2}_{s\cdot 2} - 80 & W^{-2}_{c\cdot 2} + 12 \\
W^0_{s\cdot 3} - 142 & W^0_{c\cdot 3} + 24 & & W^{-1}_{s\cdot 3} + 524 & W^{-1}_{c\cdot 3} - 184 & W^{-1}_{s\cdot 3} + 205 & W^{-2}_{c\cdot 3} - 344 \\
 & & & W^{-1}_{s\cdot 4} + 44 & & W^{-2}_{s\cdot 4} + 83 & W^{-2}_{c\cdot 4} - 63.
\end{array}$$

2. Während Herr Kramer in seiner Arbeit als unabhängige Variable die wahre Länge in der Bahn v beibehält, führt Herr Brendel hingegen die mittlere Länge L, die sich mit der Zeit linear ändert, ein. Hier soll eine Art Mittelweg eingeschlagen werden. Ist die Exzentrizität, wie hier, nicht unbedeutend, so weicht die ungleichförmige elliptische Bewegung stark von der gleichförmigen Kreisbewegung ab. Verfährt man nun wie Herr Brendel, so muß man die Mittelpunktsgleichung aus den Argumenten herausnehmen, was bei größeren Exzentrizitäten, wo man höhere Potenzen von η berücksichtigen muß, recht unbequem werden kann. Wir wollen deshalb v durch eine Größe $\bar{L}$ ersetzen, die der wahren Länge in der ungestörten elliptischen Bewegung entspricht und den Hauptteil der säkularen Störungen der Perihellänge in der Mittelpunktsgleichung berücksichtigt.

Es ist in Brendelscher Bezeichnung:

43) $$v = L + \Phi - W$$

worin bedeutet:

44) $$\Phi = \Sigma A_n \sin nM = \left(2\eta - \frac{1}{4}\eta^3\right)\sin M + \frac{5}{4}\eta^2 \sin 2M + \frac{13}{12}\eta^3 \sin 3M,$$

wenn wir uns auf die dritten Potenzen von η beschränken. Wir nehmen nun η als konstant an und zwar den Wert für 1900,0. Für Π setzen wir $\Pi_0 + \varsigma v = \Pi_0 + \varsigma L$ ein, wo Π_0 ebenfalls für 1900,0 gilt. Setzen wir nun in 44) für M seinen Wert $L - \Pi - W$ ein und ziehen die Größe Π_0 aus den Argumenten heraus, so ist:

45) $$\Phi = \Sigma A_n \cos n\Pi_0 \sin n(L - \varsigma L - W) - \Sigma A_n \sin n\Pi_0 \cos n(L - \varsigma L - W).$$

Und wenn wir schreiben:

46) $$A_n \cos n\Pi_0 = A_{s\cdot n}; \quad -A_n \sin n\Pi_0 = A_{c\cdot n}$$

und ferner die sehr kleine Größe $\varsigma L + W$ unter Vernachlässigung von Gliedern höheren Grades herausnehmen, so erhalten wir:

47) $\Phi = \Sigma A_{s \cdot n} \sin nL + \Sigma A_{c \cdot n} \cos nL - (\Sigma n A_{s \cdot n} \cos nL - \Sigma n A_{c \cdot n} \sin nL)(\varsigma L + W)$

oder in kürzerer Schreibweise:

48) $$\Phi = \Phi_0 - \Phi_1(\varsigma L + W).$$

In 41) haben die Argumente die Form $nw \pm mv$, wo bei charakteristischen Planeten $w = (1-\mu)v - \mu V - (\Delta' - \mu\Delta)$ ist. Führen wir nun für $1-\mu$ in die erste Größe auf der rechten Seite den Wert $\frac{2+\delta}{3}$ ein, da ja Sappho. wenn auch mehr zu den gewöhnlichen Planeten gehörend, doch den charakteristischen des Hestia-Typus benachbart ist $\left(\delta = \frac{1}{10}\right)$, und berücksichtigen 43), so ergibt sich:

49) $$w = \frac{2}{3}(L+\Phi) + \frac{\delta}{3}(L+\Phi) - (1-\mu)W - (\Delta' - \mu\Delta) - \mu V.$$

Dann wird nach obigem unsere neue unabhängige Variable durch folgende Gleichung definiert:

50) $$\bar{L} = L + \Phi_0 - \Phi_1 \varsigma L.$$

Wir führen nun die Größe $\bar{L}$ in die Gleichungen für v und w ein:

51) $$v = 3\frac{\bar{L}}{3} - (1+\Phi_1)W, \quad w = 2\frac{\bar{L}}{3} + \left[\frac{\delta}{3}\bar{L} - (\Delta' - \mu\Delta)\right] - (1-\mu)(1+\Phi_1)W - \mu V.$$

Oder in abgekürzter Form:

52) $$v = 3\frac{\bar{L}}{3} - U_1, \quad w = 2\frac{\bar{L}}{3} - f - U_2,$$

wo

$$U_1 = (1+\Phi_1)W, \quad U_2 = (1-\mu)U_1 + \mu V, \quad f = -\delta\frac{\bar{L}}{3} + \Delta' - \mu\Delta$$

ist.

Man wird nun zunächst U_1 und U_2 berechnen und nach Einsetzung von 52) in 41) sie aus dem Argumente herausnehmen, sodaß außer $\frac{\bar{L}}{3}$ nur noch f darin vorkommt. Auch dieses nimmt man dann heraus, weil es wegen der Kleinheit von δ auch in unserm Falle noch als langperiodisch angesehen werden kann, Dann ist überall nur noch $\frac{\bar{L}}{3}$ als Argument vorhanden, und die Gleichung 41) erhält alsdann folgende Form.

53) $$R = R_0 + \Sigma R_n^c \cos n\frac{\bar{L}}{3} + \Sigma R_n^s \sin n\frac{\bar{L}}{3}$$
$$W = W_0 + \Sigma W_n^c \cos n\frac{\bar{L}}{3} + \Sigma W_n^s \sin n\frac{\bar{L}}{3}.$$

3. In unserm Falle, wo W verhältnismäßig klein ist, ergab sich durch die Herausnahme von U_1 und U_2 kein neues Glied, das größer war als 10 Einheiten der 6. Dezimale, d. h. es kann für Sappho ausreichend genau wie für gewöhnliche Planeten gesetzt werden:

$$w = (1-\mu)v - \varDelta' - \mu\varDelta, \quad U_1 = U_2 = 0, \quad v = \bar{L}, \quad w = 2\frac{\bar{L}}{3} - f.$$

Wir erhalten alsdann durch Einsetzen dieser Werte in 41) unter Berücksichtigung von 42) in Einheiten der 6. Dezimale:

$$
\begin{aligned}
R = &+17\\
&-190\cos\left(2\frac{\bar{L}}{3}-f\right)\\
&+339\cos\left(4\frac{\bar{L}}{3}-2f\right)\\
&+\;\;43\cos\left(6\frac{\bar{L}}{3}-3f\right)\\
&-\;\;41\cos\left(\frac{\bar{L}}{3}+f\right)\\
&+485\cos\left(\frac{\bar{L}}{3}-2f\right) + 36\sin\left(\frac{\bar{L}}{3}-2f\right)\\
&-264\cos\left(3\frac{\bar{L}}{3}-3f\right) - 98\sin\left(3\frac{\bar{L}}{3}-3f\right)\\
&-\;\;27\cos\left(5\frac{\bar{L}}{3}-4f\right)\\
&+103\cos\left(2\frac{\bar{L}}{3}+2f\right) - 16\sin\left(2\frac{\bar{L}}{3}+2f\right)\\
&-120\cos 3f \qquad\qquad + 92\sin 3f\\
&-\;\;41\cos\left(2\frac{\bar{L}}{3}-4f\right) - 30\sin\left(2\frac{\bar{L}}{3}-4f\right)\\
W = &+514\sin\left(2\frac{\bar{L}}{3}-f\right)\\
&-437\sin\left(4\frac{\bar{L}}{3}-2f\right)\\
&-142\sin\left(6\frac{\bar{L}}{3}-3f\right) + 24\cos\left(6\frac{\bar{L}}{3}-3f\right)\\
&-\;\;43\sin\left(5\frac{\bar{L}}{3}-f\right)\\
&+113\sin\left(7\frac{\bar{L}}{3}-2f\right)
\end{aligned}
\tag{54}
$$

$$
54)\quad
\begin{aligned}
&+\ 132\sin\left(\frac{\overline{L}}{3}+f\right) &&-\ 29\cos\left(\frac{\overline{L}}{3}+f\right)\\
&-1299\sin\left(\frac{\overline{L}}{3}-2f\right) &&+126\cos\left(\frac{\overline{L}}{3}-2f\right)\\
&+\ 524\sin\left(3\frac{\overline{L}}{3}-3f\right) &&-184\cos\left(3\frac{\overline{L}}{3}-3f\right)\\
&+\ 44\sin\left(5\frac{\overline{L}}{3}-4f\right) &&\\
&-\ 80\sin\left(2\frac{\overline{L}}{3}+2f\right) &&+\ 12\cos\left(2\frac{\overline{L}}{3}+2f\right)\\
&+\ 205\sin 3f &&-344\cos 3f\\
&+\ 83\sin\left(2\frac{\overline{L}}{3}-4f\right) &&-\ 63\cos\left(2\frac{\overline{L}}{3}-4f\right)\\
&-\ 32\sin 3\frac{\overline{L}}{3}.
\end{aligned}
$$

Nehmen wir nun die Funktion f heraus, so ergibt sich:

$$
55)\quad
\begin{aligned}
R = {} & (+17-120\cos 3f+92\sin 3f)\\
&+\cos\frac{\overline{L}}{3}(-41\cos f+485\cos 2f-36\sin 2f)\\
&+\cos 2\frac{\overline{L}}{3}(-190\cos f+103\cos 2f-41\cos 4f-16\sin 2f+30\sin 4f)\\
&+\cos 3\frac{\overline{L}}{3}(-264\cos 3f+98\sin 3f)\\
&+\cos 4\frac{\overline{L}}{3}(+339\cos 2f)\\
&+\cos 5\frac{\overline{L}}{3}(-27\cos 4f)\\
&+\cos 6\frac{\overline{L}}{3}(+43\cos 3f)\\
&+\sin\frac{\overline{L}}{3}(+41\sin f+485\sin 2f+36\cos 2f)\\
&+\sin 2\frac{\overline{L}}{3}(-190\sin f-103\sin 2f-41\sin 4f-16\cos 2f-30\cos 4f)\\
&+\sin 3\frac{\overline{L}}{3}(-264\sin 3f-98\cos 3f)\\
&+\sin 4\frac{\overline{L}}{3}(+339\sin 2f)\\
&+\sin 5\frac{\overline{L}}{3}(-27\sin 4f)\\
&+\sin 6\frac{\overline{L}}{3}(+43\sin 3f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W = & +(-205 \sin 3f - 344 \cos 3f) \\
& + \sin \frac{\bar{L}}{3} (-132 \cos f - 1299 \cos 2f + 29 \sin f + 126 \sin 2f) \\
& + \sin 2\frac{\bar{L}}{3} (+514 \cos f + 80 \cos 2f + 83 \cos 4f - 12 \sin 2f - 63 \sin 4f) \\
& + \sin 3\frac{\bar{L}}{3} (-32 + 524 \cos 3f - 184 \sin 3f) \\
& + \sin 4\frac{\bar{L}}{3} (-437 \cos 2f) \\
& + \sin 5\frac{\bar{L}}{3} (-43 \cos f + 44 \cos 4f) \\
& + \sin 6\frac{\bar{L}}{3} (-142 \cos 3f + 24 \sin 3f) \\
& + \sin 7\frac{\bar{L}}{3} (+113 \cos 2f) \\
& + \cos \frac{\bar{L}}{3} (-132 \sin f + 1299 \sin 2f - 29 \cos f + 126 \cos 2f) \\
& + \cos 2\frac{\bar{L}}{3} (-514 \sin f + 80 \sin 2f - 83 \sin 4f + 12 \cos 2f - 63 \cos 4f) \\
& + \cos 3\frac{\bar{L}}{3} (-524 \sin 3f - 184 \cos 3f) \\
& + \cos 4\frac{\bar{L}}{3} (+437 \sin 2f) \\
& + \cos 5\frac{\bar{L}}{3} (+43 \sin f - 44 \sin 4f) \\
& + \cos 6\frac{\bar{L}}{3} (+142 \sin 3f + 24 \cos 3f) \\
& + \cos 7\frac{\bar{L}}{3} (-113 \sin 2f).
\end{aligned} \tag{55}
$$

4. Aus diesen Ausdrücken für R und W berechnet man alsdann die Tafel der Störungskoeffizienten. Für die Aufstellung dieser Tafel sind folgende Hülfstafeln nötig.

1) Tafeln für L und $\frac{L}{3}$ für Jahre, Monate und Tage und zwar L in Perioden von 360^0, $\frac{L}{3}$ aber durchgezählt.

2) Tafel für $\frac{\Phi_0}{3}$ von 2^0 zu 2^0 mit L als Argument.

3) Tafel für $\frac{\Phi_1}{3}$ von 10^0 zu 10^0 mit L als Argument.

4) Tafel für ϱL von 200^0 zu 200^0 mit $\frac{L}{3}$ als Argument.