

Werk

Titel: Ueber die Grundlagen der Geometrie.

Autor: Killing, Wilhelm

Jahr: 1892

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0109|log12

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Ueber die Grundlagen der Geometrie.

(Von Herrn *Wilhelm Killing* in Braunsberg.)

Zu der vorliegenden Abhandlung habe ich bereits früher einige Vorarbeiten herausgegeben, nämlich eine Arbeit, welche im Jahresbericht des Gymnasiums zu Brilon 1880 erschien, und eine zweite, welche dem Verzeichniss der Vorlesungen unseres Lyceums für den Winter 1884/85 vorgedruckt ist. Einzelne Theile dieser Arbeiten sind, jedoch nicht ohne durchgreifende Aenderungen, in die vorliegende Arbeit aufgenommen; aber der grösste Theil, namentlich die letzten Paragraphen, ist ganz neu.

Dass die Geometrie gewisse Sätze unbewiesen voraussetzen und darauf den Beweis für ihre weiteren Sätze stützen müsse, ist von je her anerkannt. Aber ganz Entsprechendes gilt für die Begriffe. Die Bildung von Begriffen geschieht in der Geometrie durch Definitionen, deren Wesen darin besteht, mehrere Begriffe zu einem einzigen neuen zu verbinden. Daraus folgt, dass auch die Bildung von Definitionen einmal ihre Grenze findet, und dass gewisse Begriffe, ohne selbst definirt werden zu können, allen Definitionen zugrunde liegen; sie mögen als Grundbegriffe der Geometrie bezeichnet werden. Damit dieser Name einem System von Begriffen beigelegt werden kann, hat dasselbe somit drei Bedingungen zu genügen: erstens muss jeder dieser Begriffe für die Geometrie nothwendig sein, zweitens muss das System nicht auf eine geringere Zahl zurückgeführt werden können, und drittens zur Gewinnung aller geometrischen Begriffe ausreichen.

Mit der Aufstellung der Grundbegriffe ist aber die Möglichkeit von Definitionen keineswegs gegeben. Bevor man mehrere Begriffe in einer Definition zusammenstellt, muss die Möglichkeit erkannt sein, sie überhaupt zu verbinden, und weil die Verbindung einen neuen Begriff ergeben soll, darf die Verbindung nicht nothwendig sein. Ferner kann in vielen Fällen eine Definition nicht unmittelbar in voller Allgemeinheit aufgestellt werden, sondern benutzt einen Hilfsbegriff, der, wenigstens scheinbar, speciellen

Charakter hat; in diesen Fällen ist es nöthig, nachzuweisen, dass der neue Begriff wirklich allgemeine Gültigkeit besitzt. So erkennen wir, dass jede Definition bereits gewisse Urtheile voraussetzt. Diejenigen Urtheile (Sätze), welche nicht durch Beweise auf andere zurückführbar sind, bilden somit die Grundlage für die Definitionen und für die weiteren Urtheile; es möge gestattet sein, sie als Grundsätze der Geometrie zu bezeichnen.

Bei der grossen Verschiedenheit der Ansichten, welche über die ersten Begriffe der Geometrie herrschen, habe ich es für nöthig gehalten, bei Aufstellung der Grundbegriffe meine Anschauung näher zu begründen und möglichen Missverständnissen thunlichst vorzubeugen, wobei ich mit dem Geständniss nicht zurückhalten will, dass ich die Berechtigung der von mir aufgestellten Grundbegriffe und Grundsätze hauptsächlich in dem Umstande erblicke, dass mit ihrer Hülfe ein consequenter Aufbau der Geometrie möglich ist. Zugleich verhehle ich mir aber nicht, dass jetzt nothwendigerweise eine zweite Aufgabe an uns herantritt, nämlich tiefer auf die innere Berechtigung dieser Begriffe und Urtheile einzugehen. Diese Aufgabe, welche immer erst einen späteren Platz einnehmen kann, dürfte weniger der Mathematik angehören. Von dem philosophischen Gebiete habe ich aber geglaubt, mich ganz fernhalten zu sollen, so interessant es sicherlich gewesen wäre, wenigstens einige Ausblicke anzubringen.

Wenn ich auch in § 2 alle Grundsätze unmittelbar neben einander stelle, so würde ich es doch für angemessener erachtet haben, die einzelnen für sich in ihren Consequenzen soweit zu verfolgen, bis sich die Hinzunahme weiterer als nothwendig erweist. Hieran hinderte mich jedoch die Absicht, die Darlegung nicht breiter werden zu lassen, als bereits jetzt nothwendig war. Bei grundlegenden Arbeiten wird eine gewisse Breite nicht zu umgehen sein. Bei Herleitung der Begriffe schien mir eine peinliche Ausführlichkeit angebracht; bei einigen Beweisen glaubte ich aber, es mit kurzen Andeutungen bewenden lassen zu können, um nicht gar zu weitläufig zu werden.

Die ersten neun Paragraphen beschäftigen sich nur mit denjenigen Folgerungen, welche sich aus den sieben ersten Grundsätzen ergeben, und gelangen zu der überaus merkwürdigen Thatsache, dass das hierdurch bestimmte Wissensgebiet wesentlich identisch ist mit einer fest begrenzten analytischen Theorie, nämlich der der endlichen transitiven Transformationsgruppen. Sollte man einen Mangel darin finden wollen, dass man nicht

unmittelbar die intransitiven Gruppen mit erhält, so möge man nur berücksichtigen, dass die intransitiven Gruppen eben nicht in sich abgeschlossen sind und ein über die Gruppe hinausgehendes Grössengebiet voraussetzen. Andererseits führt aber die Theorie der transitiven Gruppen durch die in ihnen enthaltenen Untergruppen auf die intransitiven Gruppen, so dass letztere auch bei unserem Ausgangspunkte nicht ausgeschlossen sind.

Gleichwie es ausserordentlich viele verschiedene transitive Gruppen giebt, so kann man auch ganz verschiedene in sich abgeschlossene Systeme aufstellen, welche den angegebenen Grundsätzen genügen. Alle diese zeigen, wie sie auf derselben Grundlage ruhen, in ihrem Aufbau wesentliche Uebereinstimmung. Sie müssen demnach als Zweige einer einzigen Wissenschaft bezeichnet werden, und es wird passend sein, dieser einen eigenen Namen zu geben. Es liegt aber nichts näher, als diese Wissenschaft eine „verallgemeinerte Geometrie“ zu nennen und ihren Zweigen den Namen „Raumformen im allgemeinen Sinne“ beizulegen, im Gegensatz zu den „eigentlichen Raumformen“, welche durch den Grundsatz VIII bestimmt werden und für den Fall dreier Dimensionen unserer Erfahrung genügen.

Es dürfte überhaupt fraglich sein, ob der letzte Grundsatz mit den übrigen ganz auf dieselbe Stufe gestellt werden kann. Nach demselben soll bei der Ruhe eines Punktes weder ein zweiter jede beliebige Lage annehmen können, noch soll ein durch den ruhenden Punkt gehendes Gebilde nothwendig bei der Ruhe des Punktes in sich verbleiben. Während die übrigen Grundsätze ganz allgemein vorausgesetzt werden müssen, darf hier die postulierte Eigenschaft nur für einen einzigen Punkt angenommen werden und folgt dann für jeden andern. Somit begründet auch dieser Grundsatz nur eine gewisse Abtheilung in einem grösseren Gebiete.

Für meine Ueberzeugung, dass die Geometrie im engeren Sinne nur als kleiner Theil in einem allgemeinen Wissens-Gebiete aufgefasst werden muss, spricht auch folgender Umstand. Wenn man, in Verfolgung eines *Plückerschen* Gedankens, in einer eigentlichen Raumform eine gerade Linie, eine Ebene oder überhaupt ein Gebilde, welches bei allen Transformationen einer Untergruppe in sich verbleibt, als Element einer Raumform auffasst, so gelangt man im tiefsten Grunde nur zu einer andern Behandlung derselben Raumform; auch zeigt das System, zu dem man auf diese Weise geführt wird, stets die Eigenschaften einer verallgemeinerten, aber nur in

den seltensten Fällen die einer eigentlichen Raumform. So wird man durch eine ganz einfache Operation, welche an einer eigentlichen Raumform ausgeführt wird, auf die allgemeineren geführt.

Endlich darf ich wohl zur Stütze meiner Ansicht auf eine zweidimensionale Raumform aufmerksam machen, welche ich in § 13 näher charakterisirt habe, und welche mit meinem achten Grundsatz vielleicht noch vereinbar ist. In derselben wird der Kreis durch eine gewisse Spirale ersetzt. Herr *von Helmholtz*, der, ohne ihre Gleichungen aufzustellen, sie genau beschreibt, schliesst sie durch das Postulat aus, dass bei der Ruhe eines Punktes ein zweiter sich in einer geschlossenen Linie bewege. Beschränken wir uns aber auf Erfahrungen, bei denen nur Bewegungen in einer Ebene benutzt werden, so lässt sich die Unmöglichkeit einer solchen Raumform nicht erweisen; für den mehrdimensionalen Raum wird sie allerdings von selbst ausgeschlossen.

Bei der engen Beziehung, welche zwischen den verallgemeinerten Raumformen und den Transformations-Gruppen stattfindet, erachte ich es für nothwendig, auf die kleinen zwischen beiden Theorien bestehenden Unterschiede hinzuweisen. Der eine beruht darin, dass in der Gruppe complexe Werthe der Variabeln mit den reellen gleich berechtigt sind, in der Raumform aber nicht, und dass infolge dessen zwei Gruppen als wesentlich identisch (ähnlich) zu betrachten sind, wenn sie auch durch eine imaginäre Transformation in einander umgewandelt werden, während die entsprechenden Raumformen wesentliche Verschiedenheiten zeigen. Ein zweiter Unterschied ist der, dass zu derselben Gruppe mehrere Raumformen gehören können. Es giebt nämlich Fälle, in denen einem Punkte sowohl je ein einziges als auch mehrere Werthsysteme der Variabeln beigeordnet werden können. Ich erinnere an die beiden Raumformen positiver constanter Krümmung, welche für jede Zahl von Dimensionen möglich sind (dieses Journal Bd. 83 S. 72).

In § 9 habe ich einen Ueberblick über die Theorie der Transformations-Gruppen gegeben. Dabei musste ich vor allem solche Parteen berücksichtigen, welche in den folgenden Paragraphen Anwendung finden oder doch geeignet sind, das Verständniss der darin benutzten Beweise zu erleichtern. Angaben darüber, wo der einzelne Satz zuerst aufgestellt sei, oder wo man seinen einfachsten Beweis finde, habe ich ganz ausgeschlossen. Die Litteratur auf diesem Gebiete ist ja noch ziemlich klein. Für § 9

kommt es vor allem auf den ersten Band der „Transformations-Gruppen“ des Herrn *Lie* (Leipzig 1888) an; daneben vergleiche man eine Arbeit des Herrn *Schur* im 35. Bande der *Annalen* und endlich meine eigenen Arbeiten, namentlich diejenigen, welche in den Bänden 31—36 der *Annalen* veröffentlicht sind. Wenn ich mich in § 8 bei Entwicklung des Begriffs der Transformations-Gruppen recht eng an Herrn *Lie* angeschlossen habe, so leitete mich vor allem das Bestreben, die volle Uebereinstimmung um so deutlicher hervortreten zu lassen. Auch hätte ich in § 10 erwähnen können, dass Herr *Lie* bereits mehrfach die lineare Gruppe in Betracht gezogen hat, durch welche die Bewegung der einem festen Punkte unendlich nahen Punkte bestimmt wird.

Die vier letzten Paragraphen sind den eigentlichen Raumformen gewidmet. Wie Herr *von Helmholtz* von gewissen Eigenschaften der Bewegung ausgeht und dadurch zuerst auf die wahre Grundlage der Geometrie hingewiesen hat, setze auch ich Eigenschaften der Bewegung voraus, und zwar betrachte ich ebenfalls die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt. Meine Voraussetzung führt mich dann auf eine Invariante zwischen den Coordinaten zweier Punkte, also auf eine Abstandsfunktion im Sinne des Herrn *Weierstrass*. Indem ich die beiden Punkte unendlich nahe an einander rücken lasse, vertritt die Invariante *Riemanns* Ausdruck für das Quadrat des Bogenelementes, und ich weise nach, dass derselbe in den Differentialen homogen linear vom zweiten Grade ist. Denselben behandle ich in zweifacher Weise, einmal im Anschluss und unter Benutzung der Untersuchungen, welche in diesem Journal von den Herren *Christoffel* (Bd. 70) und *Lipschitz* (Bd. 70—72) angestellt worden sind. Endlich wende ich die Theorie der Transformations-Gruppen an und gelange dadurch zu einer recht einfachen und elementaren Herleitung der eigentlichen Raumformen.

Zum Schluss sei noch folgende Bemerkung gestattet: Bei den eigentlichen Raumformen tritt die wichtige Erscheinung auf, dass niemals ein Körper oder ein Grenzgebilde mit einem seiner Theile zur Deckung gebracht werden kann. Bei meinem Grundsatz VIII (und ebenso bei den Voraussetzungen des Herrn *von Helmholtz*) stellt sich diese Thatsache als ein Lehrsatz dar, der bewiesen werden kann. Man kann auch versuchen, diese Eigenschaft zur Grundlage zu wählen; nur muss man sie dann nicht bloss für Körper, sondern auch für sämtliche Grenzgebilde machen. Ob es dann gelingt, die Bewegung ganz zu entbehren, kann ich noch nicht

übersehen; jedenfalls würde die Durchführung grosse Schwierigkeiten bieten. Auch hieraus geht hervor, dass es in der Geometrie besonders auf Lagenbeziehungen ankommt, und dass Grössensätze immer erst die zweite Stelle einnehmen.

§ 1.

Grundbegriffe.

Als Grundbegriffe der Geometrie stellen wir folgende auf:

Feste Körper, Theile eines Körpers, Raum, Theile eines Raumes, einen Raum einnehmen (decken), Zeit, Ruhe, Bewegung.

Die Alten glaubten bekanntlich, die Bewegung sei der Geometrie fremd, und sie machten infolge dessen die grössten Anstrengungen, auch aus den geometrischen Beweisen den Gebrauch der Bewegung ganz zu verbannen. Aber es ist ihnen keineswegs gelungen, ohne Bewegung auszukommen. Wenn *Euklid* die Congruenzsätze des Dreiecks und manche Sätze über den Kreis beweist, so benutzt er die Bewegung ganz offenkundig; selbst der Gebrauch des Zirkels in denjenigen Constructions-Aufgaben, welche als Existenzbeweise dienen, kommt meistens auf Bewegung hinaus; endlich ist in sehr vielen Fällen, wo *Euklid* seine Grössensätze benutzt, der tiefere Grund in der Bewegung zu suchen. Sobald aber ein Satz, dessen Beweis unter Anwendung der Bewegung geführt wird, beim Beweise eines anderen Satzes benutzt wird, stützt sich auch der letztere auf Bewegung; daraus, dass mancher Beweis nur die Congruenzsätze der Dreiecke in Anwendung bringt, darf daher keineswegs gefolgert werden, dass für denselben die Bewegung überflüssig sei. Vielmehr wird man zugeben müssen, dass die directe Anwendung der Bewegung in sehr vielen Fällen die Beweise einfacher, natürlicher und übersichtlicher macht. Könnte die Bewegung in der Geometrie wirklich entbehrt werden, so würden die Versuche der Alten ganz gewiss einen besseren Erfolg gehabt haben.

In neuerer Zeit sagt man vielfach, es komme nicht auf die Bewegung der Körper, sondern auf die Vergleichung verschiedener Raumtheile an. Dieser Gedanke liegt um so näher, da grossartige Fortschritte, welche die Geometrie in letzter Zeit gemacht hat, gerade dadurch herbeigeführt worden sind, dass man die Vergleichung in der verschiedensten Weise zugelassen hat. Man übersieht aber hierbei, dass die verschiedenen Arten der Vergleichung einer gesonderten Herleitung bedürfen, und dass sich alle aus der Congruenz herleiten lassen. Auch kommt es der Geometrie an und für

sich nur auf die begrifflichen Operationen an, und es ist ihr gleichgültig, welche Vorstellungen mit den Begriffen verbunden werden. Man darf daher ohne Zweifel eine gewisse Vergleichung von Raumtheilen an die Spitze der Geometrie stellen; aber diese Vergleichung muss identisch sein mit derjenigen, welche durch die Bewegung von starren Körpern vermittelt wird. Indessen gelangt der Geist zu der Vergleichung von Raumtheilen zunächst durch die Bewegung fester Körper; dann erst wird dieselbe durch die Benutzung von Auge und Hand (also im wesentlichen auch durch Bewegung) vermittelt; und wenn schliesslich auch hiervon Abstand genommen wird, so recurriert man wenigstens indirect auf die angegebenen Hilfsmittel. Schon aus diesem Grunde ist es am natürlichsten, den festen Körper als Grundbegriff für die Geometrie beizubehalten. Man versuche es nur einmal, die grundlegenden Sätze ohne Benutzung des Begriffs von festen Körpern auszusprechen, und man wird erkennen, wie schwierig dies ist, und wie sehr die Natürlichkeit darunter leidet.

Mit der Bewegung ist ihr Gegensatz, die Ruhe, mitverlangt; dann kann aber der Begriff der Zeit nicht entbehrt werden. Die Nothwendigkeit der Theilung ist von je her anerkannt.

Dabei müssen wir jedoch zugestehen, dass einige dieser Begriffe mehr den Charakter von Hilfsbegriffen haben. Das gilt vor allem von der Zeit, betreffs deren für die Geometrie nur das „zugleich, vorher und nachher“ nicht entbehrt werden kann. Auch der feste Körper wird nicht an sich gebraucht, sondern nur insofern, als mit seiner Hülfe weitere Begriffe hergeleitet werden.

Wir können uns nicht mit dem Nachweis befassen, dass es unmöglich ist, die angegebenen Begriffe auf eine geringere Zahl zurückzuführen. Wenn man die bisher gemachten Versuche, Definitionen von den aufgestellten Begriffen zu liefern, irgend genauer ansieht, so wird man sicherlich zu der Ueberzeugung gelangen, dass es sich nur um Erläuterung, nicht um eine strenge Definition handelt. Wenn z. B. ein fester Körper als ein solcher definirt wird, für welchen die Grösse und die Gestalt ungeändert bleiben, so treten an die Stelle des einen Grundbegriffs „fester Körper“ zwei neue, nämlich „Grösse“ und „Gestalt eines Körpers“, deren Erläuterung noch mehr Mühe macht, als die des ursprünglich gegebenen Begriffs.

Somit bedarf es nur noch des Nachweises, dass die aufgestellten Begriffe für die Geometrie genügen, und dieser Nachweis kann nur durch den wirklichen Aufbau geführt werden.

§ 2.

Grundsätze der Geometrie.

Die Ausdehnung und die Undurchdringlichkeit der Körper müssen auch in der Geometrie an erster Stelle genannt werden; wir fassen sie zu einem Grundsatz zusammen.

I. Jeder Körper nimmt zu jeder Zeit einen Raum ein; den von einem Körper eingenommenen Raum kann nicht gleichzeitig ein zweiter Körper decken.

Die Geometrie bedarf der unbegrenzten Theilung eines jeden Körpers. Aber die geometrische Theilung ist von der mechanischen wesentlich verschieden, indem letztere die Theile von einander trennt, während bei der geometrischen Theilung die Theile als dem Ganzen anhaftend gedacht werden können. Wenn z. B. zwei Lagen desselben Körpers einen Raumtheil gemeinschaftlich haben, in einem andern aber nicht übereinstimmen, so ist dadurch geometrisch eine Theilung des Körpers ausgeführt; man unterscheidet denjenigen Theil des Körpers, dessen zweite Lage von dem Körper in der ersten Lage noch mit eingenommen wurde, von demjenigen Theile, dessen zweite Lage der ersten Lage des Körpers nicht angehört. Demnach ist die Forderung einer unbegrenzten geometrischen Theilung mit der physikalischen Annahme von Molekeln und Atomen ganz vereinbar.

II. Jeder Raum (Körper) kann getheilt werden; jeder Theil eines Raumes (Körpers) ist wiederum ein Raum (Körper); ist A ein Theil von B, und B ein Theil von C, so ist auch A ein Theil von C, wo man unter A, B, C sowohl Räume als Körper verstehen kann.

Die Unabhängigkeit des Raumes von dem ihn einnehmenden Körper führt zu folgendem Grundsatz:

III. Jeder Körper kann bewegt werden; wenn ein Körper zu irgend einer Zeit den früheren Raum eines zweiten Körpers deckt, so kann er zur Deckung mit jedem Raum gebracht werden, welchen der zweite zu irgend einer Zeit einnimmt.

Dieser Grundsatz erlaubt die Definition der Congruenz für Räume und für Körper, indem er diesen Begriff von der Zeit, und für Räume von dem benutzten Körper, dagegen für Körper von dem benutzten Raume unabhängig macht. So werden wir zwei Räume als congruent bezeichnen, wenn derselbe Körper beide Räume decken kann; ebenso können congruente Körper zur Deckung desselben Raumes gebracht werden. Der von einem Körper eingenommene Raum wird mit Rücksicht auf die Beweglich-

keit des Körpers als seine Lage bezeichnet. Diesem Grundsatz entsprechend, sieht die Geometrie ganz von dem Stoffe der Körper ab; nur in diesem Sinne darf der zuweilen gebrauchte Ausdruck verstanden werden, die Geometrie betrachte den Raum als leer.

IV. *Jeder Körper lässt sich so bewegen, dass ein Theil desselben mit einem Theile eines beliebigen Raumes zur Deckung gelangt.*

M sei der gegebene Raum, etwa bestimmt durch einen Körper m , welcher ihn zu einer bestimmten Zeit eingenommen hat; a sei der bewegte Körper, A der Raum, welchen er nach der in diesem Grundsatz geforderten Bewegung deckt; dann sind vier Fälle möglich: A und M sind vollständig identisch, oder A ist ein Theil von M , oder M ist ein Theil von A , oder viertens A und M haben einen Theil gemeinschaftlich, während ein Theil von A nicht zu M und ein Theil von M nicht zu A gehört. Wenn einer dieser vier Fälle angenommen wird, ohne dass entschieden werden soll, welcher es ist, so möge von theilweiser Deckung gesprochen werden.

A sei eine Lage eines Körpers a , welche mit einem Raume M keinen Theil gemeinschaftlich hat; dagegen soll a auch eine Lage A_1 erhalten können, welche ganz ein Theil von M ist; dann giebt es für denselben Körper a auch eine Lage A' von der Beschaffenheit, dass ein Theil von A' dem Raume M angehört, ein anderer Theil von A' aber nicht; bei jeder Bewegung, welche den Körper a von A nach A_1 überführt, erlangt er eine Lage, wie sie für A' angegeben wurde. Diesem Satz geben wir folgenden Ausspruch:

V. *Wenn ein Körper vor seiner Bewegung keinen Theil mit einem Raume gemeinschaftlich hat, aber nach derselben diesem Raume ganz angehört, so erlangt er bei seiner Bewegung eine Lage, in welcher nur ein Theil von ihm dem Raume angehört.*

Der Raum A sei beliebig in die beiden Theile M und N zerlegt; dann lässt sich immer ein Körper k bestimmen und mit demselben eine Bewegung ausführen, welche folgenden Bedingungen genügt: bei Beginn der Bewegung soll k einen Theil von M , am Ende derselben einen Theil von N decken, und während der Bewegung soll k und jeder Theil von k immer dem Raume A angehören. Dies liefert den Grundsatz:

VI. *Wenn ein (zusammenhängender) Raum A in irgend zwei Theile M und N zerlegt ist, so lässt sich immer ein Körper k bestimmen, welcher so bewegt werden kann, dass während der Bewegung kein Theil des Körpers den*

Raum A verlässt, und k bei Beginn der Bewegung einen Theil von M und am Schluss derselben einen Theil von N deckt.

Wenn ein Raum A in zwei Theile M und N zerlegt ist, so nennen wir diese beiden Theile zusammenhängend. Ueberhaupt bezeichnen wir zwei Räume als zusammenhängend, wenn sie nach dem vorangehenden Grundsatz als die Theile eines einzigen Raumes betrachtet werden können. [Erläuternd möge bemerkt werden, dass hiernach zwei Raumtheile des dreidimensionalen Raumes nur dann als zusammenhängend (einen einzigen Raum bildend) betrachtet werden dürfen, wenn sie in einer Fläche zusammenstossen; dass aber bei Zusammenstoss in einem Punkte oder längs einer Linie dieser Ausdruck nicht gestattet sein soll].

VII. *Sobald ein Theil a eines festen Körpers wieder in eine solche Lage kommt, dass jeder Theil von a in theilweise Deckung mit seiner Anfangslage gelangt, so erhält jeder Theil des Körpers seine Anfangslage wieder.*

Hiernach nimmt der Begriff Lage eine genauere Bedeutung an, als demselben durch den Grundsatz III gegeben wurde. So sind zwei Lagen desselben Körpers nur dann als identisch zu bezeichnen, wenn nicht nur der Körper als Ganzes, sondern auch jeder beliebige Theil desselben beide-mal denselben Raum deckt.

Den folgenden Grundsatz sprechen wir zunächst in einer etwas ungenauen Form aus:

Zerlegen wir einen Körper in zwei Theile m und n und bewegen wir ihn so, dass m in theilweiser Deckung mit seiner Anfangslage bleibt, so kann n nicht in theilweise Deckung mit jedem Raume gebracht werden; dagegen beschreibt jetzt n einen Raumtheil, in dessen Innerem m gelegen ist.

Das Wort „Inneres“ bedarf noch einer Erläuterung; deshalb sprechen wir den Satz in folgender Form aus:

VIII. *Ein Körper a bestehe aus den beiden Theilen m und n ; m decke in der Anfangslage den Raum M . Soll bei einer Bewegung m in theilweiser Deckung mit M bleiben, so kann man immer einen Raumtheil P so bestimmen, dass bei der angegebenen Bewegung n mit demselben nicht in theilweise Deckung gelangen kann. Bewegt man aber einen Körper k so, dass er bei Beginn der Bewegung mit einem solchen Raume P und bei Schluss derselben mit M in theilweiser Deckung ist, so muss er nothwendig bei der Bewegung auch in theilweise Deckung mit einem Raume gelangen, den n bei der*

bezeichneten Bewegung einnehmen kann. Dies gilt für jeden Körper und bei jeder beliebigen Theilung desselben.

Wir haben jetzt nachzuweisen, dass die aufgestellten Grundsätze von einander unabhängig sind. Dass keiner der späteren Grundsätze in einem früheren enthalten ist, ergibt sich daraus, dass die früheren Sätze auch für solche Vorstellungen gelten, welche mit den folgenden nicht vereinbar sind. „Einen Raum einnehmen“ ist verbunden mit dem „Bestehen aus einem Stoffe“; ebenso zerlegt die Theilung eines Körpers auch den Stoff; aber die Möglichkeit, denselben Raum zu decken, erfordert nicht die Gleichartigkeit des Stoffes; daher folgt der Grundsatz III nicht aus den Sätzen I und II. Im zweiten Satze könnte „theilen“ durch „zusammenfügen“, und „einen Theil bilden“ durch „in sich fassen“ ersetzt werden; aber diese Vorstellung fällt bei IV weg. Während III und IV nur das Ergebniss einer Bewegung betrachten, stellt V den Verlauf derselben dar, indem ihr die Stetigkeit beigelegt wird. Alle diese Sätze bleiben bestehen, wenn man einen einzelnen Körper durch eine Zusammenstellung mehrerer Körper und einen Raum durch eine Zusammenstellung getrennter Räume ersetzt, eine Vorstellung, welche durch VI ausgeschlossen wird. Ebenso kann man mit den sechs ersten Sätzen die Vorstellung von flüssigen und luftförmigen Körpern verbinden; erst VII fügt die feste Verbindung der einzelnen Theile hinzu. Dass aber dann auch der Grundsatz VIII nicht überflüssig ist, sondern erst die Begriffe von Grösse und Gestalt liefert, wird die weiter folgende Darlegung recht deutlich hervortreten lassen. Umgekehrt sieht man aber auch, dass die vorangehenden Sätze nicht durch spätere überflüssig gemacht werden. Ich will den Nachweis nicht im Einzelnen durchführen, sondern nur bemerken, dass die späteren Sätze fast immer einen von den früheren bereits voraussetzen, also über den Inhalt der früheren hinausgehen.

Den Nachweis dafür, dass die aufgestellten Sätze für die Geometrie nothwendig, aber auch hinreichend sind, muss die folgende Entwicklung liefern.

§ 3.

Unabhängigkeit der Untersuchung von dem benutzten Körper.

Als einen einzigen Raum können wir zunächst den von einem einzigen Körper gedeckten Raum ansehen; wir können aber auch alle Lagen zusammenfassen, welche ein Körper während irgend einer Bewegung erlangt.

Das erkennt man in folgender Weise: Sind A und M irgend zwei Lagen desselben Körpers α , so kann man von den Lagen, welche α bei der von A nach M führenden Bewegung erlangt, eine solche Reihe auswählen, dass jede derselben mit der vorangehenden und nachfolgenden einen Theil gemeinschaftlich hat; sind diese Lagen $B, C, D, E, \dots$, so soll B mit A und C , C mit B und D , D mit C und E je einen Theil gemeinschaftlich haben. Dem neu betrachteten Theile S soll jeder Raum $A, B, C, \dots M$ angehören; aber man sieht davon ab, dass ein gewisser Theil von A auch B und ein gewisser Theil von B auch C angehört u. s. w. Jeder Raum A' , welchen α bei der betrachteten Bewegung einmal einnimmt, soll ein Theil von S sein; überhaupt soll ein Raumtheil R dem Raume S angehören, wenn jeder Theil von R mit dem Körper α während dessen Bewegung in theilweise Deckung gelangt. Dann erkennt man unmittelbar, dass auch für den Raum S die oben angegebenen Gesetze gelten.

Den hier angegebenen Process kann man aber unbegrenzt fortsetzen. Man betrachte eine zweite Bewegung, welche den Körper α aus der früheren Anfangslage A nach irgend einer andern Lage M' führt. Schliesslich darf man die Zusammenfassung aller Lagen, welche ein Körper überhaupt erlangen kann, als Raum bezeichnen. Eine leichte Anwendung der aufgestellten Grundsätze zeigt, dass es durchaus gleichgültig ist, von welchem Körper und von welcher Lage desselben man ausgeht; die Forderung, den angegebenen Process unbegrenzt fortzusetzen und die Vereinigung der gedeckten Räume als „den Raum“ im absoluten Sinne zu bezeichnen, macht uns von den angegebenen Besonderheiten unabhängig. Wenn das Wort Raum in diesem Sinne gebraucht wird, so bezeichnet man den von irgend einem Körper zu einer bestimmten Zeit eingenommenen Raum als Raumtheil.

Auch für die Bewegung kann man sich von dem benutzten Körper unabhängig machen. Es seien a und b irgend zwei Theile desselben festen Körpers. Für a seien zwei Lagen A und A' vollständig bestimmt in dem beim Grundsatz VII angegebenen Sinne, dass auch für jeden Theil von a sowohl die erste wie die zweite Lage angegeben ist. Da b demselben festen Körper angehört, ist hierdurch (nach VII) auch für b sowohl die erste als die zweite Lage vollständig bestimmt. Jetzt gebe ich irgend einem Theile b' dieses Körpers die Lage B oder lasse ihn auch nur einen Theil von B einnehmen; dann erlangt ein weiterer Theil c zugleich eine festbestimmte Lage C . Bringe ich jetzt b' in die Lage B' , so wird auch c eine ganz

bestimmte Lage C' annehmen. Den Räumen A, B, C (und jedem Theile derselben) sind jetzt die Räume A', B', C' (und entsprechende ihrer Theile) so zugeordnet, dass, wenn Theile desselben festen Körpers in der ersten Lage je die Räume A, B, C decken, dieselben Theile in der zweiten Lage je die A', B', C' einnehmen. Die hier gefundene Zuordnung der Räume C und C' ist aber unabhängig von der im vorliegenden Falle benutzten Einschließung von B und B' ; man würde zu C denselben Raumtheil C' zuordnen, wenn man andere Zwischenglieder gewählt hätte. Indem man in gleicher Weise weitergeht, muss es möglich sein, zu jedem beliebigen Raumtheil M zu gelangen und diesem einen ganz bestimmten anderen Raumtheil M' zuzuordnen. Die Art dieser Zuordnung ist ganz unabhängig von den benutzten Zwischengliedern; wäre man umgekehrt von der Zuordnung von M und M' ausgegangen, so würde man auch für die übrigen Raumtheile zu derselben Zuordnung gelangt sein, speciell hätte man dem A das A' zugeordnet. Wenn ferner ein Theil eines festen Körpers in seiner ersten Lage den Raum M deckt, so giebt es eine zweite Lage, in welcher M' von demselben Theile gedeckt wird, und jedem Raume, welchen irgend ein anderer Theil I dieses Körpers in der ersten Lage deckt, entspricht bei der obigen Zuordnung derjenige Raum, welchen der Theil I in seiner zweiten Lage einnimmt.

Dadurch sind wir von dem bewegten Körper ganz unabhängig geworden; die beiden Lagen des Körpers haben uns eine Zuordnung geliefert, wo jedem Raumtheile ein ganz bestimmter zweiter Theil entspricht. Die Gesetze dieser Zuordnung im Einzelnen anzugeben, wird nicht nöthig sein. Zudem werden wir der Einfachheit wegen im Folgenden bei Herleitung weiterer Gesetze uns auch ferner der Vermittelung von Körpern bedienen; wir brauchen aber nicht mehr ausdrücklich hervorzuheben, dass die Wahl des Körpers für das Resultat ohne Einfluss ist.

Wenn eine Bewegung eines Körpers a gegeben ist, so kann man ihr für jeden andern Körper m eine ganz bestimmte Bewegung zuordnen. Deckt nämlich irgend ein Theil von m in der Anfangslage einen Raum, den ein Theil von a in seiner Anfangslage annimmt (dabei wird vorausgesetzt, dass die Bewegungen nicht gleichzeitig erfolgen), so lasse man diesen Theil von m dieselbe Bewegung machen, welche jener Theil von a gemacht hat; dadurch wird eine bestimmte Bewegung von m angegeben. Wenn aber die Anfangslage von m keinen Theil mit der von a gemeinschaftlich hat, so schalte man gewisse feste Körper ein und bestimme für diese der

Reihe nach die zugeordnete Bewegung. Indem wir anstelle von m immer andere Körper wählen, erhalten wir eine „stetige Folge“ (welcher Ausdruck hier nicht näher erklärt werden soll) von Zuordnungen; eine solche bezeichnet man wohl als „Bewegung des Raumes“. Dieser Ausdruck ist an sich durchaus unstatthaft, da der Raum im Gegensatz zu den Körpern als unbeweglich vorausgesetzt werden muss. Aber andererseits wird schwerlich jemand in Versuchung kommen, ihn wörtlich zu verstehen; zudem drückt er ganz deutlich aus, dass die Untersuchung von dem bewegten Körper unabhängig ist, und dass für die Folge derjenigen Zuordnungen eines jeden Raumtheiles zu einem bestimmten andern, welche im Vorstehenden entwickelt sind, dieselben Gesetze gelten, wie für die Bewegung starrer Körper. Deshalb wird der Ausdruck „Bewegung des Raumes“ unbedenklich angewandt werden dürfen.

Directe Anwendungen von den Ergebnissen dieses Paragraphen werden in den zunächst folgenden Paragraphen zwar nicht gemacht werden; dennoch glaubte ich, die durchgeführten Entwicklungen schon an diese Stelle setzen zu sollen.

§ 4.

Die Grenzgebilde und die Zahl der Dimensionen einer Raumform.

Wenn ein Körper k in theilweiser Deckung mit einem Raume ist, so gilt dasselbe bei jeder Theilung von k mindestens für einen der erhaltenen Theile. Für einen Körper, welcher mit mehreren Räumen in gleichzeitiger theilweiser Deckung ist, untersuchen wir demnach auch nur die Möglichkeit, dass bei beliebiger Zerlegung ein Theil mit denselben Räumen in theilweiser Deckung verbleibt.

Zerlegen wir einen Raum A in zwei Theile B und C , so lässt sich jeder Körper k in gleichzeitige theilweise Deckung mit B und C bringen. Für unsern Zweck genügt es, anzunehmen, dass jeder Theil von k dem Raume A angehört. Sollte das nämlich nicht der Fall sein, so würden wir immerhin erreichen können, dass ein Theil k' von k ganz im Raume A liegt und zugleich in theilweiser Deckung mit B und C ist; in diesem Falle betrachte man anstelle von k nur den genannten Theil k' . Mit diesem Körper nehme man weitere Theilungen vor. Eine solche könnte darin bestehen, dass wir den dem Raume B angehörigen Theil von k als den einen und den dem Raume C angehörigen als den andern Theil be-

trachten. Von dieser ganz besonderen Zerlegung sehen wir vorläufig ab. Bei jeder andern wird man aber mindestens einen Theil erhalten, welcher mit B und C zugleich in theilweiser Deckung ist. Wir sagen in diesem Falle, k liege auf der *Grenze* von B und C .

Von B können wir solche Theile abtrennen, welche nicht mit C zusammenhängen. So sei B in B' und B'' zerlegt, wo B' , nicht aber B'' mit C zusammenhängt. Dann muss k in der angegebenen Lage mit B' und C in gleichzeitiger theilweiser Deckung sein. Dasselbe gilt, wenn wir von C einen Theil C'' abtrennen, welcher nicht mit B Zusammenhang besitzt. Ebenso dürfen wir natürlich zu B beliebige Theile hinzufügen, welche nicht mit C zusammenhängen, so dass wir von den gerade gewählten Raumtheilen B und C in mancher Beziehung unabhängig sind.

Wir sind von einem Raume A ausgegangen und haben denselben in zwei Theile B und C zerlegt; von B trennen wir beliebige Theile ab, welche nicht mit C zusammenhängen, und entsprechende Theile trennen wir von C ab. Bei dieser Abtrennung wird der übrigbleibende Theil entweder stets einen einzigen Raum bilden oder in mehrere Räume zerfallen. Im ersteren Falle lassen wir die Grenze aus einem, im letzteren aus mehreren Grenzgebilden bestehen. (BC) stellt demnach ein einziges Grenzgebilde dar, wenn

a) die Räume B und C einen einzigen Raum bilden, und

b) nach Abtrennung solcher Theile von B , welche nicht mit C zusammenhängen, der übrigbleibende Theil stets einen einzigen Raum bildet. Besteht die Grenze aus mehreren Gebilden, so kann man jedes einzelne für sich bestimmen.

Da dieselbe Theilung, welche hier für einen Raum durchgeführt ist, auch bei einem Körper vorgenommen und die Definition der Grenzgebilde hierauf übertragen werden kann, so ergiebt sich die Möglichkeit, von der Bewegung eines Grenzgebildes zu sprechen. Dasselbe gilt auch für die weiteren, im Folgenden zu definirenden Grenzgebilde und soll deshalb bei ihnen nicht wieder erwähnt werden. Auch wollen wir im folgenden Paragraphen manche Definitionen und Lehrsätze nur für den Fall aussprechen, dass die Grenzgebilde durch Theilung eines Raumes erhalten werden, ohne die Veränderungen anzugeben, welche nothwendig sind, wenn man die Grenzgebilde durch Theilung eines Körpers entstanden denkt.

Für ein Grenzgebilde (BC) ergeben sich zwei Fälle: entweder wird jede Theilung von C nur einen einzigen Theil ergeben, welcher mit B

zusammenhängt, oder man kann C so in zwei Theile zerlegen, dass jeder mit B einen zusammenhängenden Raum bildet. Im ersten Falle wird jeder Körper, welcher auf dem Grenzgebilde liegt, in theilweiser Deckung sein mit dem Raume, welchen irgend ein anderer Körper bei einer früheren derartigen Lage eingenommen hat. Durch Bewegung ergiebt sich, dass jeder Raum, in welchen ein Körper durch Bewegung gelangen kann, dieselbe Eigenschaft hat. Wir sind hierdurch zu zwei gleichberechtigten Möglichkeiten geführt; gilt eine derselben für einen speciellen Raumtheil, so muss sie für jeden Theil des Raumes bestehen. Die im vorigen Paragraphen definirte Bedeutung des Wortes Raum im absoluten Sinne lässt also noch mehrere Möglichkeiten zu; wir bezeichnen jede derselben als Raumform und unterscheiden zunächst einfach und mehrfach ausgedehnte Raumformen, Raumformen von einer und von mehreren Dimensionen. Bei einer eindimensionalen Raumform wird, nachdem ein Raumtheil A in zwei Theile B und C zerlegt ist, jede weitere Zerlegung von B nur einen einzigen Raumtheil ergeben, welcher mit C zusammenhängt. (Bei dieser Definition ist allerdings ein specieller Raumtheil A und eine besondere Zerlegung benutzt; aber es zeigt sich sofort, dass dieselbe Eigenschaft für jeden anderen Raumtheil und jede andere Zerlegung gilt.)

Lässt sich, indem man unter (BC) ein einziges Grenzgebilde versteht, B in zwei Theile D und E zerlegen, welche beide mit C zusammenhängen, so wird sowohl (CD) als (CE) ein einziges Grenzgebilde darstellen. Jetzt kann man jeden Körper k so bewegen, dass er in gleichzeitige theilweise Deckung mit allen drei Theilen C , D , E gelangt. Dabei soll derjenige Theil, welcher in C liegt, sowohl mit dem in D wie mit dem in E liegenden zusammenhängen, und dasselbe soll für die in D und E liegenden Theile gelten. Zugleich wird, nachdem k diese Lage erhalten hat, jede beliebige Theilung von k nothwendig mindestens einen Theil ergeben, welcher entweder wieder mit C , D , E in gleichzeitiger Deckung liegt, oder doch mit einem nicht gedeckten Theile in Zusammenhang ist. Bei dieser Lage liegt k auf der Grenze der drei Raumtheile C , D , E . Man trenne von C ein beliebiges Stück ab, welches nicht mit D und E zugleich zusammenhängt (so dass ein mit D allein zusammenhängendes Stück weggelassen werden kann), und verfähre ebenso mit D und E . Der übrigbleibende Theil, für welchen wieder die angegebenen Gesetze gelten, zerlegt sich entweder in mehrere Räume oder bildet immer einen einzigen Raum. Im letzteren Falle

erhalten wir ein einziges, im ersteren mehrere Grenzgebilde. Wenn die Theilung des Raumes A in die drei Räume C , D , E ein einziges Grenzgebilde bestimmt, so fragt es sich, ob sich C in zwei Theile zerlegen lässt, welche beide mit D und E zusammenhängen. Ist das nicht möglich, so ist die Raumform zweifach ausgedehnt; giebt es eine solche Theilung, so erhalten wir eine Grenze und Grenzgebilde von vier Raumtheilen. Ob eine solche Theilung, bei welcher die Zahl der mit einander zusammenhängenden Raumtheile stets um eins vermehrt wird, bei einer Raumform unbegrenzt fortgesetzt werden kann, in welchem Falle wir derselben unendlich viele Dimensionen beilegen müssten, muss dahingestellt bleiben; wir betrachten jedoch im Folgenden nur den Fall, dass dieser Process nach einer endlichen Zahl von Operationen sein Ende erreicht, und können dann die Zahl der Dimensionen in folgender Weise bestimmen.

Wir zerlegen irgend einen Raumtheil in zwei Theile und untersuchen, ob durch Abzweigung solcher Gebiete des einen, welche nicht mit dem andern zusammenhängen, das Gebiet zerfällt; trifft dies ein, so betrachten wir nur ein Gebiet, bei welchem dies nicht der Fall ist; den einen der beiden Theile zerlegen wir wieder so, dass jeder der beiden neuen Theile mit dem andern zusammenhängt, und sehen zu, ob eine Abtrennung solcher Gebiete, in denen kein Zusammenhang aller drei Theile statt hat, zu einer Zerlegung führt; in derselben Weise fahren wir fort, bis eine weitere derartige Theilung unmöglich ist; wenn dies nach n Zerlegungen eintritt, so legen wir der Raumform n Dimensionen bei. Wir können dies kurz in folgender Weise zusammenfassen:

Wenn von $n+1$ Raumtheilen jeder mit jedem andern zusammenhängt und dieser Zusammenhang bestehen bleibt, nachdem man von jedem Theile solche Gebiete beliebig abgezweigt hat, welche mit einem andern nicht zusammenhängen, so bezeichnet man die grösste Zahl n , welche in dieser Hinsicht möglich ist, als die Zahl der Dimensionen.

§ 5.

Definitionen und Sätze über Grenzgebilde.

Um nicht zu weitläufig zu werden, gebe ich die folgenden einfachen Definitionen und Lehrsätze nicht in derjenigen Reihenfolge, in der ihre Natürlichkeit am meisten hervortritt, sondern so, dass die Darlegung auf dem kürzesten Wege möglich ist.

Wenn wieder n die Zahl der Dimensionen für die betrachtete Raumform ist, so ist die Zahl der Zerlegungen, welche zu einem Grenzgebilde führt, höchstens gleich n . Wenn ein Grenzgebilde durch $n-m$ Zerlegungen erhalten wird, so legen wir demselben m Dimensionen bei; ein m -dimensionales Gebilde ist durch $n-m+1$ Raumtheile bestimmt, von denen jeder mit den anderen $n-m$ zusammenhängt, und deren Zusammenhang nicht aufgehoben wird, wenn man von jedem solche Theile abtrennt, welche nicht mit allen andern in Zusammenhang stehen. Das nulldimensionale Grenzgebilde heisst Punkt (oder auch Element), das eindimensionale Linie, das zweidimensionale Fläche.

Wenn ein Grenzgebilde durch $n-m$ Theilungen erhalten ist, und diese Theile sind $M_0, M_1, \dots M_{n-m}$, so kann man für $m > 0$ den Theil M_0 so in zwei Theile M'_0 und M''_0 zerlegen, dass sowohl M'_0 wie M''_0 mit allen Theilen $M_1, \dots M_{n-m}$ in Zusammenhang stehen. Wäre nämlich für M_0 eine solche Theilung unmöglich, so erhielten wir einen $(n-m)$ -dimensionalen Raum, was wir ausgeschlossen haben. Daraus folgen die weiteren Definitionen und Lehrsätze:

„Zwei Grenzgebilde sind identisch, wenn jeder Körper, welcher auf dem einen liegt, auch auf dem andern liegt; solche besitzen stets gleich viele Dimensionen.“

„Ein Grenzgebilde ist ein Theil eines zweiten, wenn beide gleich viel Dimensionen besitzen und jeder Körper, welcher auf dem ersten liegt, auch auf dem zweiten liegt, aber Körper auf dem zweiten liegen können, welche dem ersten fremd sind.“

„Der Punkt ist untheilbar, dagegen kann jede Linie, Fläche und jedes mehrdimensionale Gebilde getheilt werden.“

„Zwei Grenzgebilde α und β bilden ein drittes γ (sind die Theile von γ), wenn jeder Körper, welcher zu γ gehört, entweder in α oder in β liegt, aber von jedem Körper, welcher zugleich den beiden Gebilden α und β angehört, ein Theil nur auf α und ein anderer nur auf β liegt.“

„Zerfällt ein (einziges) Grenzgebilde γ in zwei Theile α und β , so soll jeder Körper, welcher sowohl in α als in β liegt, als der Grenze beider angehörig betrachtet werden. Für die gegenseitige Grenze zweier solcher Gebilde kann wieder dieselbe Betrachtung angestellt werden, wie oben für die Theilung des Raumes, und man gelangt auch auf diesem Wege zu Grenzgebilden.“

„Wenn ein m -dimensionales Gebilde ($0 < m < n$) in zwei Theile zer-

fällt und diese ein einziges Grenzgebilde bestimmen, so hat dasselbe $m-1$ Dimensionen und kann auch direct durch $n-m+1$ Zerlegungen des Raumes erhalten werden.“

„Die Grenzgebilde, zu denen man durch Theilung von Grenzgebilden gelangt, sind von denen nicht verschieden, welche durch Theilung des Raumes erhalten werden.“

Bei der Bewegung eines Körpers sind für ein Grenzgebilde, welches durch Theilung dieses Körpers erhalten wird, drei Fälle möglich: *a*) jeder beliebig abgegrenzte Körpertheil, welcher auf dem Grenzgebilde liegt, bleibt bei der Bewegung in theilweiser Deckung mit seiner Anfangslage; *b*) ein Körpertheil, welcher auf dem Gebilde liegt, verlässt seine Anfangslage, aber er liegt auch in jeder neuen Lage auf dem Gebilde (deckt nur solche Raumtheile, welche auch bei Beginn der Bewegung dem Gebilde angehören); *c*) ein Körpertheil, welcher bei Beginn der Bewegung dem Grenzgebilde angehört, nimmt bei der Bewegung auch solche Lagen an, welche nicht der Anfangslage des Gebildes angehören. Im ersten Falle sagen wir, das Gebilde bleibe in Ruhe; im zweiten, dasselbe werde in sich bewegt, und im dritten, es verlasse seine Anfangslage. Jetzt besteht der Satz:

Wenn jeder Theil eines m -fach ausgedehnten Gebildes bei der Bewegung seine Anfangslage verlässt, so beschreibt dasselbe ein $(m+1)$ -dimensionales Gebilde; d. h. sind zur Bestimmung eines Grenzgebildes in einem n -dimensionalen Raume $n-m$ Theilungen nothwendig, und wird ein solches Gebilde derartig bewegt, dass es seine Anfangslage verlässt, so kann man stets $n-m-1$ Theilungen des Raumes so ausführen, dass jeder Körpertheil, welcher bei Beginn der Bewegung dem durch die erste Theilung erhaltenen Gebilde angehört, während derselben stets auf dem letzteren liegt, und dass umgekehrt jeder Raumtheil, welcher auf dem letzteren liegt, wenigstens theilweise von einem solchen Theile des bewegten Körpers bedeckt wird, dass dieser Körpertheil in der Anfangslage dem gegebenen Gebilde angehört.

Betreffs des Beweises, dessen Durchführung recht weitläufig sein würde, möge es genügen, den Grundgedanken anzugeben. Man nehme alle Lagen, welche das Gebilde vor und nach einer bei der Bewegung erlangten ganz bestimmten Lage annimmt; dann wird hierdurch eine Theilung des erzeugten Gebildes angegeben, und die gegenseitige Grenze wird durch ein m -dimensionales Gebilde gebildet; bei einer Theilung

in zwei Theile hat aber das Grenzgebilde eine Dimension weniger als jeder Theil.

Hier würde der Ort sein, für die Raumgebilde den Grad des Zusammenhanges im *Riemannschen* Sinne zu erörtern; indessen können diese Beziehungen im Folgenden entbehrt werden und sollen deshalb hier nicht behandelt werden.

§ 6.

Die Mittellage zwischen zwei Lagen desselben festen Körpers. Die gleichförmige Bewegung.

Die drei vorangehenden Paragraphen benutzten hauptsächlich nur die sechs ersten Grundsätze, und derjenige Theil, nämlich ein Abschnitt in § 3, welcher sich bereits auf den Grundsatz VII stützte, konnte ohne Beeinträchtigung des Zusammenhanges ausgelassen werden und fand auch in den beiden folgenden Paragraphen keine Anwendung. Von jetzt an werden wir vor allem aus dem siebenten Grundsatz weitere Folgerungen ziehen müssen, und diese werden sich eng an den zweiten Theil des dritten Paragraphen anschliessen.

Es seien M und N zwei Lagen desselben festen Körpers in dem Sinne, welcher im Anschluss an Grundsatz VII angegeben ist; es soll also festgesetzt sein, welchen Raumtheil jeder Theil des bewegten Körpers sowohl in der ersten wie in der zweiten Lage einnimmt. Indem wir demnach die Raumtheile M und N einander als zwei Lagen desselben festen Körpers zuordnen, ordnen wir zugleich jedem Theile von M einen bestimmten Theil von N zu. Während der Körper I die Lage M einnimmt, deckt ein mit I fest verbundener Körper II die Lage N . Sobald jetzt I die Lage N erhält, muss II eine ganz bestimmte Lage P annehmen. Natürlich muss auch P von dem Körper I gedeckt werden können. Betrachten wir M als die Anfangs-, P als die Endlage desselben Körpers, so nennen wir N seine Mittellage. Wir definiren dieselbe in folgender Weise:

Werden zwei Lagen M und P desselben Körpers I als Anfangs- und Endlage unterschieden, so hat die Mittellage N die Eigenschaft, dass ein mit I fest verbundener Körper II, welcher in der Anfangslage von I mit N zusammenfällt, in die Endlage P gelangt, sobald der Körper I die Lage N annimmt.

Wir wollen das Wort congruent nicht bloss für einen einzelnen Körper oder Raumtheil benutzen, sondern im Sinne des § 3 auch für die

Zusammenstellung von Raumtheilen. Dann können wir kürzer sagen: N ist die Mittellage von M und P , wenn die Zusammenstellung MN zu NP congruent ist.

Während es selbstverständlich ist, dass nach beliebiger Wahl der congruenten Raumtheile M und N stets P den Bedingungen entsprechend gefunden werden kann, muss die Frage gestellt werden, ob auch nach beliebiger Wahl von M und P stets N der Forderung gemäss bestimmt werden kann. Dass diese Frage bejaht werden muss, zeigen die folgenden Betrachtungen.

Wir führen eine andere Bezeichnung ein, wobei wir nochmals hervorheben, dass den Worten „Lage“ und „congruent“ die dem Grundsatz VII entsprechende Bedeutung beigelegt werden soll. Es seien A_1 und B_1 irgend zwei Lagen desselben Körpers, A_1 die Anfangs-, B_1 die Endlage. A_i sei irgend ein mit A_1 congruenter Raumtheil. Wir denken uns einen festen Körper, von dem ein Theil den Raumtheil A_1 , ein zweiter B_1 und ein dritter A_i deckt. (Dieser eine Körper kann nach § 3 durch eine Folge von festen Körpern ersetzt werden, ohne dass die folgenden Entwicklungen sich ändern.) Sobald dann derjenige Theil k_1 , welcher zuerst mit A_1 in Deckung war, in die Lage A_i gelangt, wird ein gewisser anderer Theil k_2 dieses Körpers die Lage B_1 annehmen. Dieser Körper k_2 nimmt aber eine Lage B_i an, sobald man k_1 wieder in die Lage A_1 zurückbringt. Dann ist B_i durch A_1 , B_1 und A_i vollständig bestimmt. Indem wir den kurzen (wenn auch ungenauen) in § 3 eingeführten Ausdruck anwenden, können wir sagen: Sind die drei congruenten Raumtheile A_1 , B_1 , A_i beliebig gegeben, so giebt es einen bestimmten Raumtheil B_i , welcher nach B_1 gelangt, wenn A_1 nach A_i zu liegen kommt. Zugleich ist die feste Zusammenstellung $A_1 B_i$ zu $A_i B_1$ congruent. Hiernach wird jedem zu A_1 congruenten Raumtheil A_i ein Raumtheil B_i zugeordnet. Diese Zuordnung ist reciprok. Wenn nämlich der gegebene Körper Anfangs in B_1 vorausgesetzt und A_1 als zweite Lage gewählt wird, so wird A_i nach A_1 gelangen, wofern B_1 die Lage B_i annimmt. Wären wir von den beiden Lagen A_i und B_i ausgegangen und hätten nach den getroffenen Festsetzungen die zu A_1 zugeordnete Lage gesucht, so wären wir zu B_1 gelangt. Daraus folgt ferner, dass, wenn bei der ersten Zuordnung A_x und B_x einander zugeordnet sind, sie es auch bleiben, wenn man A_i und B_i als die zuerst einander zugeordneten Lagen betrachtet. Diese Ueberlegungen liefern den Satz:

Alle Lagen, welche derselbe feste Körper überhaupt annehmen kann, lassen sich reciprok einander in eindeutiger Weise zuordnen. Diese Zuordnung kann dadurch erhalten werden, dass man irgend zwei Lagen A_1 und B_1 einander zuordnet und die einer beliebigen Lage A_i zugeordnete Lage B_i durch die Forderung bestimmt, dass $A_1 B_i \cong A_i B_1$ sein soll. Nachdem einmal diese Zuordnung durchgeführt ist, ist dieselbe von dem gewählten Paare unabhängig; sind A_x und B_x ein Paar, zu dem man auf dem angegebenen Wege gelangt, so erhält man dieselbe Zuordnung, wenn man von diesem Paare ausgeht.

Um eine derartige Zuordnung zu bestimmen, ist es gleichgültig, von welcher Lage A_i man ausgeht, da jedenfalls jede Lage des Körpers als eine Lage A_i vorkommt. Demnach kann man eine ganz bestimmte Lage A festhalten und dieser jede Lage B desselben Körpers zugeordnet denken. Dann möge das Symbol $[AB]$ diejenige Zuordnung bedeuten, bei welcher dem Raumtheil A der B entspricht. Demnach kann ich jede zweite Zuordnung durch das Symbol $[AB']$ bezeichnen, und ich werde alle derartigen Zuordnungen erhalten, wenn ich mir denke, dass für B' alle verschiedenen Lagen des Körpers gewählt werden dürfen. Auch bezeichnen $[AB]$ und $[AC]$ nur dann dieselbe Zuordnung, wenn B und C identisch sind.

Jetzt sei $[AB]$ wieder irgend eine Zuordnung; ich nehme an, man lasse die beiden Räume A und B gleichzeitig durch denselben Körper k gedeckt sein, wobei A durch a , B durch b eingenommen wird. Jetzt bewege man den Körper k beliebig und in einer zweiten Lage decke a den Raum A' , b den Raum B' . Dann wird auch durch $[A'B']$ eine derartige Zuordnung angegeben. Diese Zuordnung wird nur in ganz speciellen Fällen mit $[AB]$ identisch sein, und jedenfalls kann man um A einen gewissen Raumtheil begrenzen, so dass jedesmal, wenn A' in demselben verbleibt, für $A'B' \cong AB$ die Zuordnung $[A'B']$ von $[AB]$ verschieden ist. Somit kann ich sagen: Nachdem ich zu A einen bestimmten Raumtheil B zugeordnet habe, ist durch jede andere mit A congruente Lage A' wieder eine Zuordnung bestimmt, wenn festgesetzt wird, dass dem A' das B' zugeordnet ist, für welches $AB \cong A'B'$ ist. Zugleich werden, solange A' in einem gewissen Raumtheil verbleibt, verschiedene Lagen von A und A' auch verschiedene Zuordnungen bestimmen.

Wir haben also zwei Methoden, um aus einer gegebenen Zuordnung $[AB]$ immer neue zu erhalten: die erste lässt A fest und ersetzt B durch alle damit congruenten Raumtheile; die andere Methode lässt $\overline{AB}$ congruent

und ersetzt A durch alle damit congruenten Raumtheile. Die erste Methode liefert alle möglichen Zuordnungen; es handelt sich darum, zu zeigen, dass auch der zweite Weg, der mit dem ersten von gleicher Mächtigkeit ist, alle möglichen Zuordnungen liefert.

Wir nehmen an, die Zuordnungen $[AB]$ und $[CD]$ seien identisch, d. h. bei der Zuordnung $[CD]$ entspräche B dem A . Bewegt man jetzt CD so, dass deren Figur ungeändert bleibt, so wird auch das dem festgewählten A entsprechende B sich ändern. Wie man aber leicht nachweist, gelten für diese Aenderungen des B dieselben Gesetze, wie für die starre Bewegung, und wir können diese verschiedenen B durch Bewegung eines starren Körpers erhalten. So entspricht jeder Bewegung des Systems CD eine ganz bestimmte Bewegung von B . Hierbei bleibt, solange C innerhalb eines gewissen Raumtheiles gehalten wird, auch B in einem ganz bestimmten Raumtheil. Verfolgt man die beiderseitige Aenderung weiter, jedoch so, dass man jede auf den angegebenen Raumtheil beschränkt, so erkennt man, dass auf dem angegebenen Wege wirklich jede Bewegung von B erhalten werden kann. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Wenn bei irgend einer der oben charakterisirten reciproken Zuordnungen aller Lagen, welche derselbe feste Körper annehmen kann, die Lagen A und B einander zugeordnet sind, so kann man alle anderen derartigen Zuordnungen dadurch erhalten, dass man einen Körper, welcher zugleich die Räume A und B deckt, bewegt, hierdurch eine Congruenz von $A'B'$ mit AB herleitet und nun A' und B' als zugeordnete Lagen auffasst.

Gebrauchen wir jetzt das Wort „starre Bewegung des Raumes“ in dem oben dargelegten Sinne, so können wir sagen:

Wenn irgend eine der oben charakterisirten Zuordnungen der sämtlichen Lagen desselben festen Körpers gegeben ist, so wird jede zweite derartige Zuordnung durch starre Bewegung des Raumes erhalten.

Alle derartigen Zuordnungen sind also im Wesentlichen identisch und unterscheiden sich bloss durch die Lage.

Die Zuordnung $[AB]$ ist auch dann vollständig bestimmt, wenn die Lage A mit B zusammenfällt, wenn also eine Lage A sich selbst entspricht. Nach dem vorstehenden Satze kann man demnach auch jede andere Zuordnung dadurch erhalten, dass man A sich selbst zuordnet und festsetzt, dass jedesmal die neue durch Bewegung erhaltene Lage sich selbst zugeordnet ist. Daraus folgt:

Bei jeder Zuordnung der bezeichneten Art ist eine Lage sich selbst zugeordnet.

Damit ist denn auch der Satz erwiesen:

Sind A und B irgend zwei Lagen desselben festen Körpers, so giebt es für dieselben stets eine Mittellage.

Schon im Beweise wurde darauf hingewiesen, dass man es durch passende Begrenzung eines A und B enthaltenden Raumtheiles (R) stets erreichen kann, dass nur eine einzige Mittellage innerhalb (R) vorkommt. Dann kann die Wahl von (R) aber auch so getroffen werden, dass auch die Mittellage von A und M , sowie die von M und B demselben Raumtheil angehört, und dass in demselben je nur eine einzige vorkommt. Hierdurch kann man erreichen, dass das Problem, die Mittellage zu suchen, nicht nur für die beiden gegebenen Lagen eine einzige Lösung zulässt, sondern diese Eigenschaft bestehen bleibt, wenn man sich für irgend zwei der allmählich gefundenen Lagen dasselbe Problem stellt.

Indem man den Begriff der Congruenz für Systeme von Raumtheilen anwendet, kann man dem Satz über die Mittellage folgenden Ausspruch geben:

Wenn A_0 und A_1 irgend zwei Lagen desselben Körpers sind, so giebt es stets eine dritte Lage $A_{\frac{1}{2}}$ desselben Körpers, so dass ist $A_0 A_{\frac{1}{2}} \subseteq A_{\frac{1}{2}} A_1$.

Dieser Satz kann in der folgenden Weise erweitert werden:

Wenn A_0 und A_1 irgend zwei Lagen desselben festen Körpers sind, so kann man stets $m-1$ Lagen $A_{\frac{1}{m}}, A_{\frac{2}{m}}, \dots, A_{\frac{m-1}{m}}$ so bestimmen, dass jedesmal für $0 < \iota < m$ ist:

$$A_{\frac{\iota-1}{m}} A_{\frac{\iota}{m}} \subseteq A_{\frac{\iota}{m}} A_{\frac{\iota+1}{m}}, \quad \text{wo} \quad \frac{m}{m} = 1$$

sein soll. Auch ist das Problem, $A_{\frac{1}{m}}$ zu finden, entweder von selbst eindeutig oder kann sehr leicht dazu gemacht werden.

Auf den Beweis dieses Satzes brauchen wir um so weniger einzugehen, da wir den Satz ganz gut entbehren können; es kommt dies darauf hinaus, dass wir uns im Folgenden bei den als Marken angehängten Brüchen auf solche beschränken, deren Nenner Potenzen von 2 sind.

Indem wir von zwei Lagen A_0 und A_1 ausgehen, definiren wir durch die Gleichung $A_0 A_1 \subseteq A_1 A_2$ die Lage A_2 und allgemein, nachdem wir für ein ganzzahliges i zu einer Lage A_i gekommen sind, durch $A_0 A_1 \subseteq A_i A_{i+1}$ auch A_{i+1} . Ebenso ordnen wir durch die Gleichung $A_{-1} A_0 \subseteq A_0 A_1$ und

$A_{-i-1}A_{-i} \subseteq A_0A_1$ jedem ganzzahligen positiven und negativen i eine bestimmte Lage A_i zu. (Dabei wird es gut sein, zunächst nur stets innerhalb des oben definirten Raumtheiles (R) zu bleiben, und auch sonst für die Grösse des Raumtheiles passende Beschränkungen einzuführen.) Die Forderungen $A_0A_{\frac{1}{2}} \subseteq A_{\frac{1}{2}}A_1$, $A_0A_{\frac{1}{4}} \subseteq A_{\frac{1}{4}}A_{\frac{1}{2}}$ u. s. w. machen es möglich, eine einzige bestimmte Lage für $A_{\frac{1}{m}}$ anzugeben, wenn m eine Potenz von zwei ist. Lässt man dann in $A_0A_{\frac{1}{m}} \subseteq A_{\frac{i}{m}}A_{\frac{i+1}{m}}$ zunächst das i der Reihe nach die Werthe 1, 2, 3, ... und dann $i+1$ der Reihe nach die Werthe 0, -1, -2, ... annehmen, so gelangt man zu einer ganz bestimmten Lage $A_{\frac{i}{m}}$. Will man sich für m von der bezeichneten Beschränkung frei machen, so hat man den oben ohne Beweis mitgetheilten Satz anzuwenden. Jedenfalls gilt folgender Satz:

Geht man von den beiden Lagen A_0 und A_1 aus und ordnet in der angegebenen Weise einer Zahl $\frac{a}{m}$ eine Lage $A_{\frac{a}{m}}$ zu, so wird die Lage $A_{\frac{a}{m}}$ mit der Lage $A_{\frac{b}{n}}$ identisch, wenn der Werth von $\frac{a}{m}$ gleich dem von $\frac{b}{n}$ ist.

Es erübrigt jetzt noch, allen denjenigen Zahlen, bei deren Darstellung man unendlich vieler Brüche bedarf, wenn sie in der angegebenen Weise erfolgt, eine bestimmte Lage zuzuordnen. Hierauf glaube ich jedoch an dieser Stelle nicht eingehen zu sollen.

Nehmen wir jetzt irgend eine Menge von Zahlen und ordnen dieselben nach ihrer Grösse $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$. Zu denselben mögen die Lagen $A_{\alpha_0}, A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \dots, A_{\alpha_v}$ gehören. Dann kann ich den vermittelnden Körper k aus der Lage A_{α_0} nach A_{α_1} , von da nach A_{α_2} u. s. w. bewegen. Wenn dann A_{α_0} und A_{α_1} einen gewissen Theil gemeinschaftlich haben, so soll k diesen Theil auch während der ganzen von A_{α_0} nach A_{α_1} führenden Bewegung decken. Indem man in gleicher Weise unbegrenzt fortfährt, erhält man den Satz:

Man kann einen Körper so bewegen, dass, wenn A und B irgend zwei während der Bewegung erhaltene Lagen sind, auch die Mittellage von A und B bei der Bewegung einmal gedeckt wird.

Eine solche Bewegung nenne ich eine gleichförmige; dieselbe hat folgende Eigenschaften:

1) jede Linie, welche ein Punkt bei seiner Bewegung beschreibt, wird während derselben in sich verschoben;

2) sind A, B, C, D Punkte auf einer solchen Linie, und ist $AB \cong CD$, so ist auch $AC \cong BD$.

Demnach können wir das oben erhaltene Resultat in folgender Form aussprechen:

Sind für einen Körper zwei Lagen gegeben, so kann man ihn stets aus der ersten in die zweite Lage durch eine gleichförmige Bewegung bringen.

§ 7.

Aufstellung von Coordinaten.

Ich will jetzt zeigen, wie man ein Stück einer in sich verschiebbaren Linie durch ein beliebiges anderes Stück derselben Linie messen kann. Da die Messung vermittelt der gleichförmigen Bewegung, bei welcher die Linie in Deckung mit ihrer Anfangslage bleibt, ausgeführt wird, es aber denkbar ist, dass dieselbe Linie bei verschiedenen gleichförmigen Bewegungen in sich verschoben wird, so gilt die Messung nur in Bezug auf eine bestimmte gleichförmige Bewegung. (Die Zeit für die Messung zu benutzen, geht um so weniger an, da sich bei unserm Ausgangspunkt kein Mittel zu ihrer Messung bietet; es kommt hinzu, dass bei unserer Definition der gleichförmigen Bewegung die ungleiche Geschwindigkeit nicht ausgeschlossen ist.)

Es genügt offenbar, anzunehmen, dass die zu messenden Strecken von demselben Punkte ausgehen. Es seien α_0 und α_1 zwei Punkte auf der betrachteten Linie; man beachte zunächst diejenige Lage A_0 des festen Körpers k , bei welchem ein Punkt π desselben mit α_0 in Deckung ist, und dann als zweite Lage A_1 diejenige, bei welcher π den Punkt α_1 deckt. Die Linie $\alpha_0\alpha_1$ wähle man als Einheit. Wenn jetzt σ irgend eine Zahl ist, so ordne man ihr die Lage A_σ des Körpers k zu, welche am Schluss des vorigen Paragraphen als zu σ gehörig bestimmt worden ist. Denjenigen Punkt α_σ auf der Linie, welchen π in der Lage A_σ einnimmt, lasse man der Zahl σ entsprechen. Damit ist jeder Zahl σ ein ganz bestimmter Punkt α_σ und somit auch eine bestimmte Strecke $\alpha_0\alpha_\sigma$ zugeordnet. Dabei gelten die folgenden Sätze:

„Sind s und t zwei gleiche, wenn auch auf verschiedenem Wege erhaltene Zahlen, so fallen die zugeordneten Punkte α_s und α_t zusammen.“

„Sind s und t zwei ungleiche positive Zahlen und $s < t$, so liegt der Punkt α_s auf der Strecke $\alpha_0\alpha_t$.“

Umgekehrt, wenn nach beliebiger Wahl der Punkte α_0 und α_1 auf der Linie ein weiterer Punkt β auf ihr gegeben ist, so lässt sich diesem Punkte in der angegebenen Weise eine einzige Zahl zuordnen. Man kann nämlich nach Annahme eines jeden ganzzahligen m eine Zahl a_m finden, so dass der zu $\frac{a_m}{2^m}$ zugeordnete Punkt der Strecke $\alpha_0\beta$ angehört, während jedenfalls der zu $\frac{a_m+1}{2^m}$ zugeordnete Punkt nicht mehr auf dieser Strecke liegt. Zugleich genügen die a_m den Bedingungen:

$$a_{m+p} \geq a_m \cdot 2^p \quad \text{und} \quad a_{m+p} + 1 \leq (a_m + 1) 2^p.$$

Dies, sowie eine andere Grenzbetrachtung, die hierher gehört, kommt auf Erwägungen hinaus, welche wir bereits im vorigen Paragraphen anstellen mussten, aber, um nicht zu weitläufig zu werden, dort übergangen haben.

Die Aufstellung eines Coordinatensystems bietet keine Schwierigkeit. Einen beliebigen Punkt α_0 wähle man zum Anfangspunkt und setze fest, dass für ihn alle Coordinaten den Werth Null erhalten sollen. Wir lassen einen Körper, von dem ein Punkt in der Anfangslage den Punkt α_0 deckt, eine gleichförmige Bewegung machen. Alle Punkte der Linie, welche hierbei vom Nullpunkt beschrieben wird, sollen die Coordinaten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\dots$ $x_{n-1} = 0$ haben. Um die Coordinaten x_n eines beliebigen Punktes β auf dieser Linie zu bestimmen, wähle man einen weiteren Punkt α_1 auf dieser Linie willkürlich; dann soll x_n die positive oder negative Masszahl von $\alpha_0\beta$ durch $\alpha_0\alpha_1$ sein.

Nun wählt man irgend eine zweite gleichförmige Bewegung, durch welche die so eben benutzte Linie weder in Ruhe bleibt, noch in sich verschoben wird. Die Linie, welche jetzt der Nullpunkt beschreibt, habe für $x_1, \dots, x_{n-2}, x_n$ verschwindende Werthe, und die Werthe von x_{n-1} werden nach Festsetzung einer beliebigen Einheit in derselben Weise bestimmt, wie vorher die x_n . Bei dieser Bewegung beschreibt aber auch die Linie ($x_1 = 0, \dots, x_{n-1} = 0, x_n$) eine Fläche, und die jedesmalige Lage der Linie ist bestimmt, sobald die des Nullpunktes bekannt ist. Wenn also der Nullpunkt nach $(0, \dots, 0, a_{n-1}, 0)$ gelangt, d. h. nach dem Punkte:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-2} = x_n = 0, \quad x_{n-1} = a_{n-1},$$

so kommt der Punkt $(0, 0, \dots, 0, a_n)$ in einen ganz bestimmten Punkt, und dessen Coordinaten sollen sein $x_1 = \dots = x_{n-2} = 0$, $x_{n-1} = a_{n-1}$, $x_n = a_n$.

In derselben Weise fährt man fort, indem man eine dritte gleichförmige Bewegung hinzunimmt, durch welche der Nullpunkt ausserhalb des Gebildes $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-2} = 0$ gelangt. Für die Linie, welche der Nullpunkt alsdann beschreibt, sollen alle Coordinaten bis auf x_{n-2} verschwinden, und der Werth von x_{n-2} ähnlich wie vorher bestimmt werden. Die Lage, welche der Punkt $(0, 0, \dots, 0, a_{n-1}, a_n)$ annimmt, wenn der Anfangspunkt nach $(0, 0, \dots, 0, a_{n-2}, 0, 0)$ gelangt, soll mit $(0, \dots, 0, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ bezeichnet werden. Jetzt füge man der Reihe nach eine neue Bewegung hinzu, bis man durch n gleichförmige Bewegungen dazu gelangt, jedem System $(x_1, \dots, x_n)$ einen Punkt zuzuordnen.

Alsdann gilt der Satz:

„Bei der festgesetzten Anordnung entspricht jedem Werthsystem $(x_1, \dots, x_n)$ ein einziger Punkt des Raumes, und umgekehrt kann man um den Nullpunkt ein Gebiet abgrenzen und ebenso um das Werthsystem $(0, \dots, 0)$ ein n -fach ausgedehntes Continuum $(x_1, \dots, x_n)$ bestimmen, so dass jedem Punkte des Gebietes ein System des Continuuums entspricht, und zwar ein einziges.“

Der erste Theil des Satzes bedarf keiner näheren Begründung; der zweite Theil ergibt sich wie folgt. Lässt man bei verschwindendem Werthe von $x_1, \dots, x_{n-1}$ die x_n von Null aus wachsen, so gelangt man entweder wieder zum Anfangspunkte zurück oder nicht. Im letzten Falle (bei welchem die Linie keineswegs unendlich zu sein braucht), entsprechen ungleichen Werthen von x_n auch verschiedene Punkte. Im ersten Falle giebt es einen ersten positiven und einen ersten negativen Werth von x_n , welche denselben Punkt bezeichnen. Solange x_n zwischen diesen Werthen bleibt, wird jedem Punkte der Linie nur ein einziger Werth von x_n entsprechen. Diese Grenzen von x_n werden dadurch nicht beschränkt, dass x_{n-1} von Null verschiedene Werthe erhält, wofern die Linie $(0, \dots, 0, x_n)$ bei der zweiten Bewegung keinen ruhenden Punkt enthält. Wenn aber dabei ein Punkt dieser Linie in Ruhe verbleibt, so gilt die Eindeutigkeit bis zum ersten ruhenden Punkte, also noch immer bis zu einem endlichen Werthe von x_n . Ebenso kann das Gebiet für x_n infolge der späteren Bewegungen, sowie dadurch beschränkt werden, dass ein Punkt $(a_1, \dots, a_n)$ bei nicht verschwindenden Werthen von $a_1, \dots, a_n$ mit dem Nullpunkt zusammenfällt. Aehnliche Beschränkungen können für die anderen Coordinaten eintreten; aber immerhin behält jede Coordinate einen endlichen Spielraum. Die Gesamtheit der Punkte, welche durch alle hiernach gestatteten Werthsysteme dargestellt werden,

füllt aber einen gewissen, um den Nullpunkt gelegenen Raumtheil an, was in derselben Weise gezeigt wird, in welcher wir zu einer Definition von der Zahl der Dimensionen gelangt sind und bewiesen haben, dass diese Zahl für jede Raumform eine feste Bedeutung hat.

Hiernach ist die Bestimmung der Coordinaten auf n gleichförmige Bewegungen oder, wenn man will, auf $n+1$ Lagen desselben Körpers zurückgeführt. Diese Bewegungen müssen nur gewissen Beschränkungen unterliegen, können aber im Uebrigen ganz willkürlich gewählt werden. Diese Willkür kann häufig benutzt werden, um solche Coordinatensysteme zu erhalten, deren Anwendung zu den einfachsten Formeln führt. Man kann auch die Coordinaten $x_1, \dots x_n$ durch ganz beliebige Bewegungen bestimmen, und dann neue Coordinaten $y_1, \dots y_n$ als Functionen der x einführen. Diese Functionen müssen von einander unabhängig sein; wenn sie ferner für $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ die Werthe $b_1, \dots b_n$ annehmen, so muss um $(0, \dots 0)$ ein Gebiet der x und um $(b_1, \dots b_n)$ ein Gebiet der y so abgegrenzt werden können, dass für beide Gebiete stetige und eindeutige Beziehung stattfindet.

Indem wir die Möglichkeit dieser allgemeinen Coordinatenbestimmung im Auge behalten, liefert die obige Entwicklung den Satz:

In jeder Raumform von n Dimensionen lassen sich die Coordinaten und n gleichförmige Bewegungen so auswählen, dass zwischen denselben folgende Beziehung besteht: durch die erste Bewegung bleiben alle Coordinaten $x_2, \dots x_n$ ungeändert und alle x_1 wachsen gleichzeitig um dieselbe Grösse; durch die zweite Bewegung bleiben in dem Gebilde, für welches $x_1 = 0$ ist, die $x_3, \dots x_n$ ungeändert, und die x_2 ändern sich gleichmässig; Entsprechendes gilt bei der dritten Bewegung für das Gebilde $x_1 = x_2 = 0$, u. s. w., endlich wachsen bei der letzten Bewegung für das Gebilde $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$ die Coordinaten x_n um dieselbe Grösse.

§ 8.

Beweglichkeit einer Raumform; die zu einer Raumform gehörige Transformations-Gruppe.

Wenn ein beliebig gewählter Körper durch irgend eine Bewegung aus einer ersten in eine zweite Lage gebracht wird, so möge ein Punkt des Körpers, welcher in der ersten Lage die Coordinaten $x_1, \dots x_n$ hat, in seiner zweiten Lage den Punkt $x'_1, \dots x'_n$ decken. Dabei ist es keineswegs nothwendig, die Coordinaten $x_1, \dots x_n$ auf solche Punkte zu beschränken, welche dem Körper in seiner ersten Lage wirklich angehören;

vielmehr kann man den Körper unbegrenzt fortgesetzt denken, und dabei wird jedem Punkte x (soweit die angegebene Coordinatenbestimmung sich erstreckt) als der ersten Lage angehörig ein bestimmter Punkt x' zugeordnet. Die beiden Lagen vermitteln also eine Transformation:

$$(1.) \quad x'_i = f_i(x_1, \dots x_n) \quad (i = 1, \dots n).$$

Nun denken wir uns den Körper aus der zweiten Lage x' in eine dritte Lage x'' gebracht; das möge durch die Transformation vermittelt werden:

$$(2.) \quad x''_i = g_i(x'_1, \dots x'_n).$$

In die letzte Gleichung mögen die Werthe aus (1.) eingesetzt werden, wodurch wir erhalten:

$$(3.) \quad x''_i = g_i(f_1(x), \dots f_n(x)) = h_i(x_1, \dots x_n).$$

Nach den Grundbegriffen ist es aber möglich, die dritte Lage auch aus der ersten zu erhalten; folglich stellt auch die Transformation (3.) das Ergebniss einer Bewegung dar. Wir denken uns alle Transformationen, welche das Ergebniss der überhaupt möglichen Bewegungen des Raumes darstellen, zu einem System vereinigt, so erkennen wir, dass auch irgend zwei Transformationen, nach einander ausgeführt, wieder eine dem System angehörige Transformation ergeben. Jedesmal, wenn die Transformationen (1.) und (2.) dem System angehören, muss auch die Transformation (3.) dem System angehören. Ein solches System nennt Herr *Lie* eine Transformations-Gruppe.

Nun ist es an sich klar, dass die einzelnen Transformationen nicht discret, sondern stetig sein müssen. Die stetigen Transformations-Gruppen theilt Herr *Lie* ein in endliche und unendliche. Ob die letzteren überhaupt den Grundsätzen I bis VII gehorchen, möge unentschieden bleiben; jedenfalls kann auf ein derartiges System von Bewegungen der Grundsatz VIII nicht angewandt werden; wir schliessen diese Gruppen daher von unserer Betrachtung aus. Eine jede endliche Transformations-Gruppe kann aber dadurch erhalten werden, dass man einer endlichen Anzahl r von Parametern $a_1, \dots a_r$ alle möglichen Werthe beilegt, durch jedes Werthsystem $a_1, \dots a_r$ stets n Functionen $f_1(x_1, \dots x_n, a_1, \dots a_r), \dots f_n(x_1, \dots x_n, a_1, \dots a_r)$ bestimmt sein lässt und die dem System $(a_1, \dots a_r)$ zugeordnete Transformation durch die Gleichungen darstellt:

$$(4.) \quad x'_i = f_i(x_1, \dots x_n; a_1, \dots a_r) \quad (i = 1, \dots n).$$

Hierdurch ist eine Gruppe dargestellt, wenn aus den $2n$ Gleichungen

$$(5.) \quad x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r), \quad x''_i = f_i(x'_1, \dots, x'_n; b_1, \dots, b_r)$$

bei beliebiger Wahl von $a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_r$ folgt:

$$(6.) \quad x''_i = f_i(x_i, \dots, x_n; c_1, \dots, c_r),$$

wobei noch ist:

$$(7.) \quad c_k = \varphi_k(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_r).$$

Wird nun noch angenommen, dass, solange $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r$ in einer gewissen Umgebung eines bestimmt gewählten Parameter-Systems $a_1^{(0)}, \dots, a_r^{(0)}$ verbleiben, bei beliebigen Werthen von $x_1, \dots, x_n$ die n Gleichungen:

$$f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) = f_i(x_1, \dots, x_n; b_1, \dots, b_r)$$

nur für $a_1 = b_1, \dots, a_r = b_r$ erfüllt werden können, so sind die Parameter $a_1, \dots, a_r$ sämtlich wesentlich und können nicht durch eine geringere Zahl ersetzt werden. Wenn alle Bewegungen durch eine Transformations-Gruppe mit r wesentlichen Parametern dargestellt werden, so legen wir der Raumform r Grade von Beweglichkeit bei. Somit sind wir, ausgehend von unsern Grundsätzen I bis VII auf die Theorie der stetigen endlichen Transformations-Gruppen gelangt. Nur in einer Beziehung ist die letztere Theorie noch allgemeiner als die der unter diese Grundsätze fallenden Raumformen. Nach dem fünften Grundsätze kann jeder Körper zur theilweisen Deckung mit jedem beliebigen Raumtheile gelangen; folglich muss es möglich sein, durch die Transformationen der Gruppe jeden Punkt x in jeden Punkt x' überzuführen, oder die Gruppe muss transitiv sein. Demnach erhalten wir folgenden Satz:

Alle Bewegungen, welche ein Körper in einer Raumform machen kann, werden durch eine endliche transitive Transformations-Gruppe bestimmt; die Zahl der wesentlichen Parameter dieser Gruppe giebt den Grad der Beweglichkeit für die Raumform an; diese Zahl muss mindestens gleich der Zahl der Dimensionen der Raumform sein.

Die Ergebnisse der beiden letzten Paragraphen gestatten es uns noch, auf einem zweiten Wege zu diesem Resultate zu gelangen. Durch irgend zwei Lagen desselben Körpers ist eine gleichförmige Bewegung bestimmt, welche den Körper aus der ersten in die zweite Lage bringt. Mit der gleichförmigen ist aber zugleich auch die unendlich kleine Bewegung gegeben. Dieser Begriff soll hier nicht näher entwickelt werden; es genüge, folgenden Satz auszusprechen:

„Die unendlich kleinen Aenderungen $dx_1, \dots dx_n$, welche die Coordinaten $x_1, \dots x_n$ durch eine unendlich kleine Bewegung erleiden, lassen sich als Producte von n Functionen $\xi_1(x_1, \dots x_n), \dots \xi_n(x_1, \dots x_n)$ mit einer unendlich kleinen Grösse dt darstellen.“

Gelangt also der Punkt $(x_1, \dots x_n)$ in die Lage $x_1 + dx_1, \dots x_n + dx_n$, so kann gesetzt werden:

$$(8.) \quad dx_1 = \xi_1 dt, \quad dx_2 = \xi_2 dt, \quad \dots \quad dx_n = \xi_n dt.$$

Wenn eine Raumform die unendlich kleinen Bewegungen zulässt:

$$(9.) \quad \begin{cases} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n}, \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} & \dots & \xi_{rn}, \end{cases}$$

wo durch die k te Horizontalreihe bezeichnet wird, dass die Componenten der unendlich kleinen Verschiebung proportional sind $\xi_{k1} : \xi_{k2} : \dots : \xi_{kn}$, so ist auch die unendlich kleine Verschiebung möglich:

$$(10.) \quad \sum_k a_k \xi_{k1}, \quad \sum_k a_k \xi_{k2}, \quad \dots \quad \sum_k a_k \xi_{kn},$$

wo die $a_1, \dots a_r$ von den $x_1, \dots x_n$ unabhängig, aber im Uebrigen ganz willkürlich sind. Unendlich kleine Bewegungen sind (solange nicht ein Unendlichkleines höherer Ordnung mit in Betracht gezogen wird), mit einander vertauschbar. Die Bewegung (10.) ist aus den Bewegungen (9.) zusammengesetzt, und die Bewegungen (9.) sind dann, und nur dann, von einander unabhängig, wenn keine von ihnen aus den übrigen zusammengesetzt ist, wenn also die n Ausdrücke (10.) für constante Werthe von a nur dadurch zum Verschwinden gebracht werden können, dass man alle Coefficienten a gleich Null setzt. Jetzt sind zwei Fälle möglich: entweder lassen sich alle unendlich kleinen Bewegungen, welche eine Raumform gestattet, aus einer endlichen oder aus einer unendlich grossen Zahl von infinitesimalen Bewegungen zusammensetzen. Die letztere Möglichkeit lassen wir ganz ausser Acht und setzen die Zahl der von einander unabhängigen infinitesimalen Bewegungen als endlich voraus. Hiernach stellen wir die Definition auf:

Eine Raumform hat r Grade von Beweglichkeit, wenn sich alle in ihr möglichen unendlich kleinen Bewegungen aus r solchen, aber nicht aus weniger zusammensetzen lassen.

Wir wollen jetzt nachweisen, dass diese Definition mit der oben gegebenen übereinstimmt, und dass die in der Gleichung (4.) gegebene Darstellung der Gruppe aus den infinitesimalen Transformationen hergeleitet werden kann.

Da die allgemeinste unendlich kleine Bewegung durch (10.) bestimmt wird, integrieren wir das System der n Differentialgleichungen:

$$(11.) \quad dx'_\alpha = \sum_{\kappa=1}^n a_\kappa \xi_{\kappa\alpha}(x') dt \quad (\alpha = 1, \dots, n)$$

und bestimmen deren Constanten so, dass für $t = 0$ jedesmal $x'_i = x_i$ wird. Dann erhalten wir Gleichungen von der Form:

$$(12.) \quad x'_\kappa = f_\kappa(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r, t).$$

Nun ändern sich die Gleichungen (11.) nicht, wenn man alle $a_1, \dots, a_n$ mit denselben Constanten multiplicirt, wofern man nur gleichzeitig t durch dieselbe Constante dividirt. Somit müssen auch die Gleichungen (12.) bei derselben Operation ungeändert bleiben, oder dieselben sind ausser von $x_1, \dots, x_n$ nur noch von $a_1 t, a_2 t, \dots, a_r t$ abhängig. Man erhält also hier die in (4.) vorausgesetzte Form.

Auch die unendlich kleinen Bewegungen gestatten zu erkennen, ob eine Gruppe transitiv ist oder nicht. Damit das erstere stattfindet, ist nothwendig und hinreichend, dass durch dieselben der Punkt x in jede unendlich nahe Lage gebracht wird. Es kommt dies darauf hinaus, dass nicht alle Determinanten identisch verschwinden, welche aus je n unter den r Reihen (9.) gebildet werden können.

Da wir bei den vorangehenden Untersuchungen nur die Voraussetzungen I bis VII benutzt haben, so können wir sagen:

Alle Bewegungen, welche durch die ersten sieben Grundsätze bestimmt werden, führen auf eine stetige Transformations-Gruppe; umgekehrt kann man jeder stetigen endlichen transitiven Gruppe von Transformationen ein System zuordnen, welches den genannten Voraussetzungen genügt.

Wir drücken diesen Satz noch in einer anderen Form aus:

Nimmt man den Begriff der Raumformen im allgemeinsten Sinne, so dass für denselben nur die Grundsätze I bis VII gelten, so fällt deren Theorie ganz zusammen mit der der stetigen endlichen transitiven Transformationsgruppen.

Eine Beschränkung kann dieser Satz nur erhalten bei einer unendlich grossen Zahl von Dimensionen und bei einem unendlich grossen Grade der Beweglichkeit.

Abgesehen von der Transitivität scheinen die hier verlangten Gruppen auch noch in einer zweiten Beziehung specieller zu sein als die *Lieschen*, indem jede hier auftretende Gruppe die identische Transformation enthält, während Herr *Lie* dies nicht ausdrücklich voraussetzt. Indessen ist von verschiedenen Seiten bereits nachgewiesen, dass hierin keine Beschränkung liegt.

§ 9.

Ueberblick über die Theorie der Transformationsgruppen.

Es ist nothwendig, an dieser Stelle einige der wichtigsten Sätze über Transformations-Gruppen anzugeben, schon aus dem Grunde, weil jeder solche Satz zugleich für die Raumformen gilt, wenn man diesem Worte seine allgemeinste Bedeutung beilegt. Dazu kommt, dass wir uns bei der Herleitung der speciellen (der „eigentlichen“) Raumformen auf die hier mitzutheilenden Sätze stützen müssen.

Wenn durch eine unendlich kleine Transformation die einzelnen Coordinaten x_i die Veränderung $\xi_{\varrho i} \delta t$ erleiden, so wird eine ganz allgemeine Function $f(x_1, \dots x_n)$ um $\delta t \cdot \sum_i \xi_{\varrho i} \frac{\partial f}{\partial x_i}$ verändert werden. Demnach bezeichnet Herr *Lie* eine infinitesimale Transformation symbolisch durch

$$(1.) \quad X_{\varrho} f = \sum_i \xi_{\varrho i} \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Hier mögen $\varrho, \sigma, \tau, \dots$ die Marken 1, 2, $\dots r$ angeben und die r so erhaltenen Transformationen sollen von einander unabhängig sein. Wir führen die Bezeichnung ein:

$$(2.) \quad (X_{\varrho} X_{\sigma}) = (X_{\varrho}(X_{\sigma} f)) - (X_{\sigma}(X_{\varrho} f)) = \sum_{\alpha\beta} \left(\xi_{\varrho\alpha} \frac{\partial \xi_{\sigma\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \xi_{\sigma\alpha} \frac{\partial \xi_{\varrho\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right) \frac{\partial f}{\partial x_{\beta}},$$

und nennen die so dargestellte infinitesimale Transformation aus $X_{\varrho} f$ und $X_{\sigma} f$ combinirt. Dann muss auch sie der Gruppe angehören, und wir erhalten:

$$(3.) \quad (X_{\varrho} X_{\sigma}) = \sum_{\mu} c_{\varrho\sigma\mu} X_{\mu} f,$$

wo die c constant sind und der Bedingung $c_{\varrho\sigma\mu} + c_{\sigma\varrho\mu} = 0$ genügen.

Führt man an Stelle von $x_1, \dots x_n$ andere Coordinaten ein, so hat man im Symbol $X_{\varrho} f$ nur die entsprechende Aenderung zu machen, um das Symbol derselben Transformation für die neuen Variablen zu erhalten. Ebenso geht $(X_{\varrho} X_{\sigma})$ in die Combination der entsprechenden Ausdrücke über, und die Constanten $c_{\varrho\sigma\mu}$ bleiben ungeändert.

Sind die $\frac{r(r-1)}{2}$ Gleichungen (3.) befriedigt, so führen die r infinitesimalen Transformationen $X_1f, \dots, X_rf$ zu einer Gruppe. Die Integrabilitäts-Bedingungen erfordern aber:

$$(4.) \quad \sum_{\mu} \{c_{\sigma\tau\mu}(X_{\sigma}X_{\mu}) + c_{\tau\varrho\mu}(X_{\sigma}X_{\mu}) + c_{\varrho\sigma\mu}(X_{\tau}X_{\mu})\} = 0$$

oder

$$(5.) \quad \sum_{\mu} \{c_{\sigma\tau\mu}c_{\mu\varrho\alpha} + c_{\tau\varrho\mu}c_{\mu\sigma\alpha} + c_{\varrho\sigma\mu}c_{\mu\tau\alpha}\} = 0,$$

wo ϱ, σ, τ drei verschiedene Marken sind und α irgend eine. Diese Gleichungen stellen aber wieder die vollständigen Bedingungen dar; sind die $\binom{r}{1}\binom{r}{2}$ Constanten c so gewählt, dass sie den angegebenen Bedingungen genügen, so kann man immer entsprechende Gruppen bilden.

Wenn eine Gruppe durch die r infinitesimalen Transformationen $X_1f, \dots, X_rf$ bestimmt ist, so kann man auf die verschiedenste Weise r von einander unabhängige lineare Ausdrücke $Y_1f, \dots, Y_rf$ bilden, wo

$$Y_{\pi}f = \sum_{\varrho} m_{\pi\varrho} X_{\varrho}f$$

ist. Dann ist dieselbe Gruppe auch durch $Y_1f, \dots, Y_rf$ bestimmt. Jetzt ändern sich die Coefficienten c , jedoch so, dass auch für die neuen Constanten die Gleichungen (5.) bestehen. Zwei Gruppen, für welche die Coefficienten c entweder gleich sind oder durch passende Wahl der bestimmten Transformationen gleich gemacht werden können, heissen gleich zusammengesetzt oder holodrisch isomorph oder auch etwa gleich gestaltet. Ganz entsprechend heisst die r -gliedrige Gruppe $X_1f, \dots, X_rf$, für welche die Gleichungen (3.) bestehen, meroedrisch isomorph mit der $(r-q)$ -gliedrigen $Y_1f, \dots, Y_{r-q}f$, wenn sich aus letzteren r infinitesimale Transformationen $\mathfrak{Y}_1f, \dots, \mathfrak{Y}_rf$, von denen wieder $r-q$ von einander unabhängig sind, linear so bestimmen lassen, dass auch jedesmal

$$(\mathfrak{Y}_{\varrho}\mathfrak{Y}_{\sigma}) = \sum_{\pi=1}^r c_{\varrho\sigma\pi} X_{\pi}f$$

ist.

Aus jeder infinitesimalen lässt sich eine einfach unendliche Reihe von endlichen Transformationen herleiten, und wir wollen sagen, jede solche endliche Transformation gehöre zu der gegebenen infinitesimalen. Besteht zwischen zwei unendlich kleinen Transformationen $X_{\varrho}f$ und $X_{\sigma}f$ die Beziehung $(X_{\varrho}X_{\sigma}) = 0$, so lassen sich alle zu $X_{\varrho}f$ gehörigen endlichen Trans-

formationen mit den zu $X_0 f$ gehörigen vertauschen; d. h. wenn zwei derartige endliche Transformationen nach einander ausgeführt werden, so ist das Resultat unabhängig von der Reihenfolge, in der dies geschieht.

Hiernach kann man aus dem am Schlusse von § 7 mitgetheilten Satze die beiden folgenden herleiten:

„Giebt es in einer Raumform von n Dimensionen n von einander unabhängige und mit einander vertauschbare gleichförmige Bewegungen, und lässt deren Vereinigung einen Punkt nicht in einem Gebilde von weniger als n Dimensionen, so kann man durch passende Wahl der Coordinaten bewirken, dass die zugehörigen n unendlich kleinen Transformationen symbolisch in der Form $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ dargestellt werden.“

„Wenn es in einem n -fach ausgedehnten Raume mehr als n von einander unabhängige und mit einander vertauschbare gleichförmige Bewegungen giebt, so muss jede aus den Componenten der entsprechenden infinitesimalen Transformationen gebildete Determinante n ten Grades identisch verschwinden; alle diese Bewegungen dürfen vereint mit den aus ihnen zusammengesetzten jeden Punkt höchstens in ein $(n-1)$ -dimensionales Gebilde überführen.“

Daraus folgt, dass für $n = 1$ nur solche Transformationen mit einander vertauschbar sind, welche aus derselben infinitesimalen Transformation hervorgehen. Dieser Bedingung genügen aber nach der Zusammensetzung nur drei Arten von Gruppen: 1) die eingliedrigen, 2) diejenigen zweigliedrigen, für welche bei passender Wahl von $X_1 f$ und $X_2 f$ die Bedingung $(X_1 X_2) = X_1 f$ befriedigt ist, und (3.) diejenigen dreigliedrigen, in denen drei infinitesimale Transformationen X_1, X_2, X_3 so ausgewählt werden können, dass $(X_1 X_2) = X_2, (X_1 X_3) = -X_3, (X_2 X_3) = X_1$ ist. Somit giebt es nur drei Gruppen mit einer Veränderlichen, und man kann im ersten Falle die allgemeine Transformation in der Form $x' = x + a$, im zweiten durch die Gleichung $x' = ax + b$ und im dritten durch $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ für $ad \neq bc$ darstellen.

Dagegen zeigt sich für mehrere Variablen eine weit grössere Mannigfaltigkeit; namentlich giebt es hier stets Gruppen, welche sich bei keiner Wahl der Veränderlichen auf projective zurückführen lassen. Für zwei Variablen hat Herr Lie alle möglichen Gruppen bereits vor längerer Zeit (Math. Annalen Bd. XVI) aufgestellt.

Wenn man wieder $Y_x f$ linear durch $X_1 f, \dots, X_r f$ darstellt, jetzt aber nur $m < r$ derartige Transformationen in Betracht zieht und die

Voraussetzung macht, dass sich alle $\frac{m(m-1)}{2}(Y_i Y_\kappa)$ durch $Y_1, \dots, Y_m$ darstellen lassen, so bestimmen die $Y_1 f, \dots, Y_m f$ eine Untergruppe der gegebenen Gruppe. Eine solche nennt Herr Lie invariant, wenn auch jedes $(Y_i X_\varrho)$ für $i = 1, \dots, m$, $\varrho = 1, \dots, r$ durch $Y_1 f, \dots, Y_m f$ dargestellt werden kann. Wenn unter den $\frac{r(r-1)}{2}$ Transformationen $\sum_{\mu} c_{\varrho\sigma\mu} X_\mu f$ nur $p (< r)$ von einander unabhängige vorkommen, so bestimmen dieselben eine besonders wichtige invariante Untergruppe, welche als Haupt-Untergruppe bezeichnet werden soll.

Jede infinitesimale Transformation bestimmt für sich eine eingliedrige Untergruppe und ist selbst in einer oder mehreren zweigliedrigen Untergruppen enthalten. Ueberhaupt gilt der Satz, dass jede beliebige Transformation einer m -gliedrigen Untergruppe angehört, wenn m eine der Zahlen $1, \dots, 6$ und kleiner als r ist. Dabei ist man jedoch genöthigt, imaginäre Transformationen zuzulassen.

Unter denjenigen Gruppen, welche nicht ihre eigenen Haupt-Untergruppen sind, für welche also weniger als r der Transformationen $(X_\varrho X_\sigma)$ von einander unabhängig sind, nehmen diejenigen eine hervorragende Stellung ein, welche ich aus einem hier nicht zu erörternden Grunde als solche vom Range Null bezeichne. Für dieselben ist die Eigenschaft charakteristisch, dass in jeder ihrer zweigliedrigen Untergruppen die Transformationen mit einander vertauschbar sind. In solchen Gruppen giebt es invariante Untergruppen von jeder Gliederzahl, die kleiner als r ist, speciell also auch mindestens eine eingliedrige Untergruppe, welche mit allen Transformationen der Gruppe vertauschbar ist.

Diejenigen Gruppen, welche keine invarianten Untergruppen besitzen, heissen einfach. Ihnen am nächsten stehen diejenigen, welche durch blosse Zusammenstellung mehrerer einfacher Gruppen gebildet sind. Wenn nämlich von den Gruppen $G_1, \dots, G_h$ keine zwei eine Transformation (ausser der identischen) gemeinschaftlich haben, aber die Transformationen einer jeden G_α mit denen einer jeden G_β für ungleiche Werthe α, β ($= 1, \dots, h$) vertauschbar sind, eine neue Gruppe H aber alle diese und nicht mehr umfasst, so möge es gestattet sein, zu sagen, H sei durch Zusammenstellung der $G_1, \dots, G_h$ gebildet. Sind speciell die $G_1, \dots, G_h$ sämmtlich einfach, so möge H , solange ein besserer Name fehlt, als halbeinfach bezeichnet werden. Jede Gruppe, welche ihre eigene Haupt-Untergruppe ist, wird gebildet aus

einer einfachen oder halbeinfachen Gruppe und einer invarianten Untergruppe vom Range Null.

Zwei Gruppen, welche durch Transformation der Variabeln in einander übergeführt werden können, werden als ähnlich bezeichnet. Dazu ist die Gleichheit der Zusammensetzung nothwendig. In den meisten Fällen muss aber eine weitere Bedingung hinzutreten. Eine solche ist z. B. bei transitiven Gruppen die Gleichheit der Zusammensetzung für diejenige Untergruppe, bei welcher ein Punkt allgemeiner Lage in Ruhe gehalten wird. Während diese oder eine ähnliche Bedingung vom analytischen Standpunkt aus genügt, tritt für die Geometrie die Forderung hinzu, dass die Variabeln zugleich reell sind.

Während bei Untersuchung der Gruppe alle Werthsysteme $x_1, \dots x_n$ in Betracht zu ziehen sind, hat man als eigentliche Punkte der entsprechenden Raumform nur die Punkte allgemeiner Lage anzusehen; d. h. da hier nur transitive Gruppen betrachtet werden, nur diejenigen Punkte, für welche nicht alle aus n der Reihen (9.) § 8 gebildeten Determinanten verschwinden. Nun liefert das Verschwinden dieser Determinanten gewisse Invarianten der Gruppe, Gebilde, welche bei jeder Transformation der Gruppe in sich verbleiben. Diese Invarianten können als Repräsentanten des Unendlichfernen betrachtet werden.

Durch eine Untergruppe wird entweder ein Punkt allgemeiner Lage wenigstens bis zu einer gewissen Grenze hin in jeden andern Punkt gebracht, oder er verbleibt auf einem gewissen Grenzgebilde. Im zweiten Falle hat das betreffende Gebilde wieder die Eigenschaften einer allgemeinen Raumform. Jede Bewegung des Raumes lässt entweder das Gebilde in sich, oder bringt es zur Deckung mit einem congruenten Gebilde. Wenn die gegebene Gruppe r -gliedrig, diejenige Untergruppe, bei welcher das Gebilde in sich bewegt wird, m -gliedrig ist, so bildet die Gesamtheit der congruenten Gebilde eine $(r-m)$ -fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Man kann das einzelne Gebilde als Element dieser Mannigfaltigkeit auffassen, und dann gelten für dieselbe die Gesetze einer Raumform im allgemeinen Sinne. Die für diese Raumform geltenden Bewegungsgesetze sind im Allgemeinen wesentlich dieselben, wie für die gegebene Raumform; die entsprechenden Gruppen sind meistens holoedrisch, zum mindesten meroedrisch isomorph. Dadurch gelangt man von jeder Raumform aus zu einer Reihe weiterer, welche mit ihr in sehr engem Zusammenhange stehen.

Jede intransitive Gruppe hat Invarianten, d. h. Functionen von $x_1, \dots x_n$, welche durch keine Transformation der Gruppe verändert werden. Aber auch bei transitiven Gruppen kann man von Invarianten sprechen, wenn man die Coordinaten mehrerer Punkte in Betracht zieht. Wird nämlich eine beliebige Transformation der Gruppe dargestellt durch

$$y_i = f_i(x_1, \dots x_n, a_1, \dots a_r)$$

für $i = 1, \dots n$ oder kürzer durch $y_i = f_i(x, a)$, so stellen bei beliebiger Wahl der $\varrho+1$ Punkte $x, x', \dots x^{(\varrho)}$ die Gleichungen

$$y_i = f_i(x, a), \quad y'_i = f_i(x', a), \quad \dots \quad y^{(\varrho)}_i = f_i(x^{(\varrho)}, a)$$

zusammen eine mit der gegebenen Gruppe gleich gestaltete Gruppe von r Parametern und $(\varrho+1) \cdot n$ Variablen dar. Diese Gruppe wird zum mindesten dann intransitiv, wenn $(\varrho+1)n > r$ ist. Folglich giebt es, wie bereits Herr *Lie* hervorgehoben hat, stets eine kleinste Zahl, so dass für diese und jede grössere Zahl von Punkten Invarianten vorkommen. Wenn hiernach die Zahl der Invarianten scheinbar unendlich gross ist, so ist doch die Zahl der von einander unabhängigen endlich und zwar höchstens gleich n . So lassen sich in vielen Fällen alle Invarianten aus einer einzigen herleiten; dazu ist nothwendig, aber keineswegs hinreichend, dass alle n Variablen in der Invariante wesentlich sind und nicht durch Transformation auf eine geringere Zahl zurückgeführt werden können. Kommen alle derartigen Invarianten auf eine einzige zwischen den Coordinaten zweier Punkte hinaus, so besitzt die Gruppe $\frac{n(n+1)}{2}$ Parameter; treten aber zu einer Invariante, in welcher alle Coordinaten zweier Punkte wesentlich sind, noch davon unabhängige Invarianten hinzu, so wird dadurch die Zahl der Parameter verringert.

§ 10.

Folgerungen aus dem achten Grundsätze.

Bis jetzt haben wir nur die sieben ersten Grundsätze benutzt: indem wir den letzten hinzunehmen, sprechen wir im Gegensatz zu den bis jetzt betrachteten „Raumformen im allgemeinsten Sinne“ von den „eigentlichen“ oder auch den „speciellen Raumformen“. Zunächst wollen wir jetzt diesen Grundsatz in anderer Form aussprechen:

Bei der Ruhe eines Punktes in einem n -dimensionalen Raume wird kein zweiter so bewegt werden können, dass er ein n -dimensionales Gebiet ausfüllt;

zugleich geht durch den ruhenden Punkt kein Gebilde hindurch, welches nothwendig zugleich in Ruhe gehalten oder in sich verschoben wird.

Die eindimensionalen Raumformen können ganz ausgeschlossen werden. Für mehrdimensionale sagt der erste Theil des Grundsatzes aus, dass bei der Ruhe eines Punktes sich jeder zweite höchstens auf einem $(n-1)$ -dimensionalen Gebilde bewegt. Der zweite Theil sagt nun zunächst, dass der bewegte Punkt in der That jede Lage auf einem $(n-1)$ -dimensionalen Gebilde erlangen kann. Angenommen nämlich, der bewegte Punkt könne höchstens ein $(n-\varrho)$ -dimensionales Gebilde beschreiben, wo $\varrho > 1$ ist. Dann ziehe man vom ruhenden Punkte aus eine beliebige Linie und bestimme für jeden Punkt derselben dasjenige Gebilde, auf welchem er noch bewegt werden kann; die Gesammtheit derselben bildet höchstens ein Gebilde von $n-\varrho+1 \leq n-1$ Dimensionen, und dies wird bei der Bewegung in sich verschoben.

Ferner sind durch unsern Grundsatz diejenigen Gruppen ausgeschlossen, welche Herr *Lie* systatisch nennt, und bei denen jedesmal eine Linie oder Fläche oder ein mehrdimensionales Gebilde in Ruhe bleibt, wofern ein Punkt in Ruhe gehalten wird; wenigstens darf ein solches Gebilde nicht reell sein. Endlich geht durch den ruhenden Punkt überhaupt kein reelles Gebilde hindurch, welches bei jeder alsdann noch möglichen Bewegung in sich verschoben würde.

Da die Gruppe transitiv ist, darf zwischen den Coordinaten $x_1, \dots x_n$ desselben Punktes keine Invariante bestehen. Dagegen muss es zwischen den $2n$ Coordinaten $x_1, \dots x_n$ und $x'_1, \dots x'_n$ eine Beziehung geben, welche bei allen Transformationen der Gruppe ungeändert bleibt, da im andern Falle bei der Ruhe eines Punktes ein zweiter noch jede beliebige Lage erhalten könnte. Das Vorhandensein einer zweiten Invariante zwischen den Coordinaten zweier Punkte würde die bei der Ruhe eines Punktes noch mögliche Bewegung eines jeden zweiten auf ein $(n-2)$ -dimensionales Gebiet beschränken. Zwischen zwei Punkten besteht daher eine einzige Invariante; ob davon unabhängig noch eine weitere Invariante für mehr Punkte vorkommt, muss vorläufig unentschieden bleiben.

Diese Invariante zwischen den x und den x' sei:

$$(1.) \quad J(x_1, \dots x_n; x'_1, \dots x'_n).$$

Vertauscht man hierin x und x' , so erhält man eine blosse Function von J . Setzt man aber $x_1 = x'_1, \dots x_n = x'_n$, so muss J von $x_1, \dots x_n$ ganz unab-

hängig werden, weil zwischen den Coordinaten eines Punktes keine Invariante bestehen darf. Somit wird $J(x_1, \dots x_n; x_1, \dots x_n)$ entweder gleich einer Constante oder ganz unabhängig von dem Punkte x unentschieden. Im letzteren Falle haben wir zu unterscheiden, ob sich für dem x unendlich nahe Punkte x' derselbe Grenzwert ergibt oder nicht. Im Allgemeinen muss nämlich die Function eindeutig und stetig sein. So möge man vom Punkte x eine beliebige Linie ziehen; auf dieser Linie möge x' dem x unendlich nahe kommen. Wenn dann $J(x, x')$ stetig verläuft, so nähert sich J für $x = x'$ einem gewissen Grenzwert. Für eine zweite derartige Linie gelte dasselbe. Sollte aber jetzt J einen andern Grenzwert erhalten, so beachte man auf den beiden Linien solche Punkte, welche dem Punkte x unendlich nahe sind, und verbinde diese durch eine Linie. Dann wird auf der letzteren eine Unterbrechung der Stetigkeit stattfinden. Somit giebt es vom Punkte x aus ein Gebilde, längs dessen die Stetigkeit unterbrochen wird. Dies Gebilde muss aber auch bei der Ruhe von x in sich verbleiben. Da dies nach unserer Voraussetzung ausgeschlossen ist, muss sich die Function (1.) für alle Werthe von x' , welche unendlich nahe an x liegen, demselben Grenzwert nähern, und dann können wir durch eine kleine Umänderung immer bewirken, dass

$$J(x_1, \dots x_n; x_1, \dots x_n) = 0$$

ist, in dem Sinne, dass die Function für alle reellen, unendlich nahe an x gelegenen Werthe von x' unendlich klein wird.

Wenn jetzt der Punkt x in Ruhe gehalten wird und $J(x, x')$ für einen zweiten Punkt x' den Werth a erhält, so wird x' bei der Ruhe von x jeden Punkt einnehmen können, für den die Gleichung $J(x, x') = a$ besteht; wenigstens muss man um den Punkt x' auf diesem Gebilde ein $(n-1)$ -dimensionales Gebiet so abgrenzen können, dass jeder Punkt dieses Gebietes von x' wirklich erreicht werden kann.

Wir nehmen den Punkt x' unendlich nahe bei x an und setzen $x'_i - x_i = dx_i$. Dadurch geht $J(x_1, \dots x_n; x'_1, \dots x'_n)$ über in eine Function $K(dx_1, \dots dx_n)$, in welcher $x_1, \dots x_n$ als Constanten betrachtet werden sollen, da wir nur solche Bewegungen untersuchen, bei denen dieser Punkt in Ruhe gehalten wird. Zugleich ersetzen wir die Differentiale $dx_1, \dots dx_n$ durch $z_1, \dots z_n$ und schreiben, um die Aenderungen, welche die z_i bei einer unendlich kleinen Bewegung erleiden, in der *Lieschen* symbolischen Bezeich-

nung angeben zu können, r_i statt $\frac{\partial f}{\partial z_i}$. Dann ist das Symbol einer derartigen infinitesimalen Transformation

$$(2.) \quad \sum m_{ix} z_i r_x,$$

wo die Coefficienten m_{ix} blosse Constanten sind. Da die Multiplication sämtlicher dx' mit derselben Constante keine Veränderung hervorruft, so ist unter den Transformationen (2.) die $\sum m_{ix} z_i r_x$ auszuschliessen, und wir können voraussetzen, dass in (2.) die Summe $\sum m_{ix} = 0$ ist. Betrachten wir also bei den Transformationen der Gruppe nur diejenigen Aenderungen, welche bei der Ruhe eines Punktes die unendlich nahen Punkte erleiden, so lässt sich deren Gesamtheit als Untergruppe der $(n^2 - 1)$ -gliedrigen Gruppe betrachten:

$$z_i r_i - z_x r_x, \quad z_i r_x \quad \text{für} \quad i \neq x.$$

Diese Untergruppe muss offenbar intransitiv sein; sie soll eben die Function $K(z_1, \dots, z_n)$ unverändert lassen. Andererseits sieht man aber sehr leicht ein, dass, wenn durch die Gruppe eine lineare Form $\sum c_i z_i$ unverändert bleibt, bei jeder Bewegung, die den Punkt x in Ruhe lässt, auch ein um den Punkt liegendes unendlich kleines Gebiet in sich verschoben wird. Wenn aber mehrere solche linearen Formen vorhanden sind, so müssen mehrere derartige Gebilde, und damit auch ihr Durchschnitt, in sich bewegt werden. Wenn aber für die betrachtete Untergruppe eine lineare reelle Function der z eine Invariante ist, so muss bei der Ruhe des Punktes x ein $(n-1)$ -dimensionales unendlich kleines Gebiet in sich bewegt werden; dies setzt sich weiter fort, und ein $(n-1)$ -dimensionales Gebilde wird in sich bewegt. Wenn aber eine imaginäre lineare Function invariant bleibt, so muss damit ihre conjugirt complexe Form verbunden sein; deren Schnitt ist für $n > 2$ reell, und wir sehen, dass ein $(n-2)$ -dimensionales Gebilde in sich verschoben wird. Wenn endlich die Function $K(z_1, \dots, z_n)$ nur die Variablen $z_1, \dots, z_m$ enthält, aber $z_{m+1}, \dots, z_n$ für $m < n$ nicht vorkommen, so wird das Gebilde $z_1 = z_2 = \dots = z_m = 0$ in sich verschoben.

Demnach können wir für $n > 2$ folgende Bedingungen aufstellen:

Die Gruppe, durch welche die unendlich kleinen Grössen $dx_1, \dots, dx_n$ transformirt werden, muss eine und zwar eine einzige Invariante zwischen den Coordinaten eines jeden Punktes besitzen; in dieser Invariante darf für $n > 2$ kein linearer Factor vorkommen; zugleich müssen in derselben alle n Variablen wesentlich sein.

Den zweidimensionalen Raum wollen wir erst später behandeln; für einen mehrdimensionalen mögen die unendlich nahen Punkte durch folgende infinitesimale Transformationen verändert werden:

$$(3.) \quad \Sigma m_{ix} z_i r_x, \quad \Sigma m'_{ix} z_i r_x, \quad \dots$$

Dann muss die Invariante K den Gleichungen genügen:

$$(4.) \quad \Sigma m_{ix} z_i \frac{\partial K}{\partial z_x} = 0, \quad \Sigma m'_{ix} z_i \frac{\partial K}{\partial z_x} = 0, \quad \dots$$

Diese Ausdrücke müssen so beschaffen sein, dass sich alle ihre Ableitungen durch eine einzige ausdrücken lassen, weil wir im andern Falle mehrere Invarianten erhalten würden. Da zudem keine dieser Ableitungen verschwindet, muss es möglich sein, alle durch $\frac{\partial K}{\partial z_1}$ auszudrücken, und es bestehen die Gleichungen:

$$(5.) \quad \frac{\partial K}{\partial z_2} = P_2 \cdot \frac{\partial K}{\partial z_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial K}{\partial z_n} = P_n \cdot \frac{\partial K}{\partial z_1},$$

wo die $P_2, \dots, P_n$ nicht blosse Constanten sein können.

Das System (5.) von Gleichungen ist wesentlich identisch mit dem System (4.) und aus letzterem durch blosse Elimination erhalten. Somit kommen auch unter den Gleichungen (4.) $n-1$ von einander unabhängige vor, und die Zahl der von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen (3.) ist mindestens gleich $n-1$. Wendet man dieselbe Elimination, welche von (4.) zu (5.) führt, auf die Symbole (3.) an, so muss man auf Symbole $r_x - P_x r_1$ für $x = 2, \dots, n$ gelangen, und die Symbole $Q_x r_x - P_x Q_x r_1$ müssen nach passender Bestimmung der Q_x wiederum unendlich kleine Bewegungen darstellen, welche sich aus (3.) zusammensetzen lassen. Diese schreiben wir in der Form

$$(6.) \quad \varphi_{21} r_2 - \varphi_{12} r_1, \quad \varphi_{31} r_3 - \varphi_{13} r_1, \quad \dots, \quad \varphi_{n1} r_n - \varphi_{1n} r_1,$$

wo die φ_{ix} lineare Functionen sind. Je zwei Functionen φ_{ix} und φ_{x1} dürfen nicht durch Multiplication mit einem constanten Factor in einander übergeführt werden können.

Nach der in § 9 Gleichung (2.) gegebenen Vorschrift combiniren wir jetzt die Transformationen $\varphi_{21} r_2 - \varphi_{12} r_1$ und $\varphi_{31} r_3 - \varphi_{13} r_1$. Die neue unendlich kleine Transformation muss sich linear durch die Transformationen (3.) und somit durch die Transformationen (6.) und die etwa weiter vorhandenen darstellen lassen. Da bei der Combination ($\varphi_{21} r_2 - \varphi_{12} r_1, \varphi_{31} r_3 - \varphi_{13} r_1$) die $r_4, \dots, r_n$ nicht vorkommen, so muss dieselbe sich entweder linear durch

einen constanten Factor unterscheiden. Genügten aber nur ein einziges Mal zwei Functionen zur Darstellung der übrigen, so würde mit dem Punkte zugleich ein weiteres Gebilde in Ruhe bleiben, was ausgeschlossen ist. Demnach ergeben sich schon für die unendlich nahen Punkte $\frac{n(n-1)}{2}$ verschiedene infinitesimale Bewegungen $r_i L_i - r_j L_j$. Da der ruhende Punkt wegen der Transitivität gerade n von den $\frac{n(n-1)}{2}$ gegebenen und von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen unterworfen werden kann, so enthält die Gruppe des hier betrachteten Raumes $\frac{n(n+1)}{2}$ Glieder. Erinnern wir uns aber, dass, wenn eine Gruppe eine Invariante zwischen den $2n$ Grössen $x_1, \dots, x_n$ und $x'_1, \dots, x'_n$ besitzt und alle Variabeln hierin wesentlich sind, die Zahl der Parameter gerade $\frac{n(n+1)}{2}$ beträgt, und dass das Hinzukommen weiterer (davon unabhängiger) Invarianten die Zahl der Glieder erniedrigt, so ergeben sich folgende Sätze:

Wenn bei der Ruhe eines Punktes jedes durch den ruhenden Punkt gehende Gebilde aus seiner Anfangslage heraus bewegt werden kann, so besitzt die Raumform $\frac{n(n+1)}{2}$ Grade von Beweglichkeit. Alle Invarianten, welche zwischen einer beliebigen Anzahl von Punkten bestehen, lassen sich auf eine einzige zurückführen, in der nur die Coordinaten zweier Punkte vorkommen. Es ist nicht möglich, einen Körper so zu bewegen, dass ein Punkt in Ruhe bleibt und die sämtlichen von demselben ausgehenden Richtungen in sich verschoben werden.

Sollte nämlich letzteres möglich sein, so stelle man die Componenten einer derartigen unendlich kleinen Bewegung durch Potenzreihen nach $(x'_1 - x_1), \dots, (x'_n - x_n)$ dar, wo $x_1, \dots, x_n$ den ruhenden Punkt bezeichnet; dann müssten bei allen Componenten die Glieder nullter und erster Potenz nicht vorkommen, oder es müsste mehr als $\frac{n(n+1)}{2}$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen geben.

Aus dem vorigen Satze ziehen wir noch eine einfache und wichtige Folgerung. Wählen wir n Punkte $x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}$, so bestehen u. a. folgende Invarianten:

$$J(x, x'), \quad J(x, x''), \quad J(x, x'''), \quad \dots \quad J(x, x^{(n-1)}).$$

Halten wir den Punkt x' in Ruhe, so verbleibt x auf einem $(n-1)$ -dimen-

sionalen Gebilde; bei der Ruhe von x' und x'' muss x auf den beiden Gebilden $J(x, x') = a$, $J(x, x'') = a'$ bleiben. Da diese aber bei beliebiger Lage von x und x' kein $(n-1)$ -dimensionales Gebilde gemeinschaftlich haben, so ist die Bewegung auf ein Gebilde von $n-2$ Dimensionen beschränkt. Indem wir dieselbe Betrachtung auf mehr Punkte übertragen, erhalten wir den Satz:

In den eigentlichen Raumformen von n Dimensionen verbleibt bei der Ruhe eines Punktes jeder andere auf einem $(n-1)$ -dimensionalen Gebilde, bei der Ruhe zweier Punkte auf einem Gebilde von $n-2$, bei der Ruhe dreier Punkte von $n-3$ Dimensionen u. s. w., und ist bei der Ruhe von n Punkten keine Bewegung möglich, wofern die gegenseitige Lage der Punkte nicht besonderen Bedingungen genügt.

Gehen wir wieder zu den infinitesimalen Transformationen (3.) resp. (5.) zurück. Wir haben gesehen, dass wir denselben die symbolische Form $L_i r_x - L_x r_i$ geben konnten, wo die $L_1, \dots, L_n$ lineare homogene Functionen von $z_1, \dots, z_n$ sind. Aus der Gleichung:

$$(r_i L_x - r_x L_i, r_\lambda L_\lambda - r_\lambda L_\lambda) = k(r_x L_\lambda - r_\lambda L_x) + k'(r_\lambda L_i - r_i L_\lambda) + k''(r_i L_x - r_x L_i)$$

folgt: $\frac{\partial L_x}{\partial z_\lambda} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial z_x}$, oder die $L_1, \dots, L_n$ sind die Differentialquotienten einer quadratischen Form nach $z_1, \dots, z_n$, und da $L_i \frac{\partial K}{\partial z_x} - L_x \frac{\partial K}{\partial z_i} = 0$ ist, so muss K eine Function dieser Form sein und kann ihr geradezu gleichgesetzt werden. Daraus folgt der Satz:

Wenn eine homogene lineare Gruppe von n Veränderlichen kein ebenes Gebilde in Ruhe lässt oder in sich verschiebt, so ist sie entweder transitiv, oder der Raum zerlegt sich in quadratische Gebilde, von denen jedes in sich bewegt wird.

Stellt man die quadratische Form $K(z_1, \dots, z_n)$ in der Form von n Quadraten dar, so müssen im vorliegenden Falle alle Quadrate dasselbe Zeichen haben; demnach ergibt sich:

Die Invariante $J(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n)$, welche unter den gestellten Bedingungen für die Coordinaten zweier Punkte besteht, geht für $x'_i = x_i + dx_i$ über in eine beständig positive Form von $dx_1, \dots, dx_n$, in welcher alle n Differentiale wesentlich sind, und deren Coefficienten noch die $x_1, \dots, x_n$ enthalten können.

Die $\frac{n(n-1)}{2}$ infinitesimalen Transformationen, durch welche diejenige Gruppe bestimmt wird, welche die Bewegung bei der Ruhe des Punktes x

angiebt, lassen sich so wählen, dass man für $\iota, \kappa = 1, \dots, n$ setzen kann:

$$X_{\iota\kappa}f = (x'_\iota - x_\iota)p_\kappa - (x'_\kappa - x_\kappa)p_\iota + \dots,$$

wo noch höhere Potenzen von $x'_1 - x_1, \dots, x'_n - x_n$ hinzukommen. Bildet man deren Combination, so muss sich die dadurch dargestellte Transformation homogen linear durch die vorhandenen ausdrücken lassen. Da sich aber diese Ausdrücke bereits aus den linearen Gliedern ergeben, so folgt:

In allen n -dimensionalen eigentlichen Raumformen haben die Untergruppen, durch welche alle bei der Ruhe eines Punktes möglichen Bewegungen dargestellt werden, stets dieselbe Zusammensetzung. Man kann zu ihrer Bestimmung $\frac{n(n-1)}{2}$ infinitesimale Transformationen $X_{\iota\kappa}f$ für $X_{\iota\kappa} + X_{\kappa\iota} = 0$ so wählen, dass für ungleiche Marken $\iota, \kappa, \lambda, \mu$ die Relationen bestehen:

$$(X_{\iota\kappa}X_{\kappa\lambda}) = X_{\iota\lambda}, \quad (X_{\iota\kappa}X_{\lambda\mu}) = 0.$$

§ 11.

Der Differentialausdruck zweiten Grades.

Wenn der Punkt x in Ruhe gehalten und um denselben eine Bewegung ausgeführt wird, so bleibt eine quadratische Form $\Sigma a_{\iota\kappa} dx_\iota dx_\kappa$ ungeändert, wo die $a_{\iota\kappa}$ Functionen von $x_1, \dots, x_n$ sind. Gelangt aber durch irgend eine starre Bewegung des Raumes der Punkt x in einen Punkt x' , so muss die Form $\Sigma a_{\iota\kappa} dx_\iota dx_\kappa$ in die entsprechende Form $\Sigma a'_{\iota\kappa} dx'_\iota dx'_\kappa$ übergehen. Diese Eigenschaft soll uns dazu führen, den Differentialausdruck genauer kennen zu lernen. Wir benutzen wieder eine unendlich kleine Bewegung und wählen als ihr Symbol

$$Xf = \Sigma \xi_\varrho \frac{\partial f}{\partial x_\varrho}.$$

Damit hierdurch die quadratische Form nicht geändert wird, müssen die $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen befriedigt sein:

$$(1.) \quad \sum_\varrho \left(\frac{\partial a_{\iota\kappa}}{\partial x_\varrho} \xi_\varrho + a_{\iota\varrho} \frac{\partial \xi_\kappa}{\partial x_\varrho} + a_{\kappa\varrho} \frac{\partial \xi_\iota}{\partial x_\varrho} \right) = 0,$$

wo, wie stets im Folgenden, die zu benutzenden Marken die Zahlen $1, \dots, n$ bezeichnen und eine Summation auch stets auf diese Zahlen ausgedehnt werden soll.

Die weitere Untersuchung bietet grosse Aehnlichkeit mit denen der Herren *Christoffel* und *Lipschitz* über Differentialausdrücke zweiten Grades;

namentlich ergeben sich die von diesen Herren benutzten Abkürzungen hier mit hervortretender Nothwendigkeit; für dieselben benutzen wir die Bezeichnung des Herrn *Christoffel*.

Die Gleichung (1.) wird nach x_λ differentiirt und liefert dann:

$$\sum_q \left(\frac{\partial^2 a_{ix}}{\partial x_\lambda \partial x_q} \xi_q + \frac{\partial a_{ix}}{\partial x_q} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial a_{iq}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_x} + \frac{\partial a_{xq}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_i} + a_{iq} \frac{\partial^2 \xi_q}{\partial x_x \partial x_\lambda} + a_{xq} \frac{\partial^2 \xi_q}{\partial x_i \partial x_\lambda} \right) = 0.$$

Da hier die partiellen Differentialquotienten von ξ_q sowohl nach x_x und x_λ , wie nach x_i und x_λ vorkommen, so bilde man einmal die Gleichung (1.) für i und λ und differentiire nach x_x , und dann für die Marken x und λ und differentiire nach x_i . Indem wir die beiden letzten dieser Gleichungen addiren und die erste subtrahiren, erhalten wir eine Gleichung, in welcher nur die zweite Ableitung von ξ_q nach x_i und x_x vorkommt. Um dieselbe bequem schreiben zu können, benutzen wir die Abkürzungen:

$$(2.) \quad 2 \left[\begin{smallmatrix} ix \\ \lambda \end{smallmatrix} \right] = \frac{\partial a_{x\lambda}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{i\lambda}}{\partial x_x} - \frac{\partial a_{ix}}{\partial x_\lambda},$$

woraus weiter folgt:

$$(3.) \quad \frac{\partial a_{ix}}{\partial x_\lambda} = \left[\begin{smallmatrix} \lambda i \\ x \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} \lambda x \\ i \end{smallmatrix} \right], \quad \left[\begin{smallmatrix} ix \\ \lambda \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} x i \\ \lambda \end{smallmatrix} \right].$$

Jetzt erhalten wir folgende Gleichung:

$$(4.) \quad \sum_q \left(\xi_q \frac{\partial \left[\begin{smallmatrix} ix \\ \lambda \end{smallmatrix} \right]}{\partial x_q} + \frac{\partial \xi_q}{\partial x_i} \left[\begin{smallmatrix} qx \\ \lambda \end{smallmatrix} \right] + \frac{\partial \xi_q}{\partial x_x} \left[\begin{smallmatrix} q i \\ \lambda \end{smallmatrix} \right] + \frac{\partial \xi_q}{\partial x_\lambda} \left[\begin{smallmatrix} ix \\ q \end{smallmatrix} \right] + a_{iq} \frac{\partial^2 \xi_q}{\partial x_i \partial x_x} \right) = 0.$$

Wir erinnern daran, dass in der quadratischen Form $\sum a_{ix} dx_i dx_x$ alle n Differentiale wesentlich sind, dass also die Determinante $|a_{ix}| = A$ nicht identisch verschwindet. In dieser Determinante bezeichnen wir den Coefficienten von a_{ix} mit A_{ix} , so dass die Gleichungen bestehen:

$$\sum_q a_{iq} A_{iq} = A, \quad \sum_q a_{iq} A_{xq} = 0 \quad \text{für } i \neq x.$$

Hiernach können wir aus (4.) den Werth jedes zweiten Differentialquotienten von ξ_q mittelst der ξ_q und ihrer ersten Differentialquotienten ausdrücken. Mit Herrn *Christoffel* führen wir noch die Bezeichnung ein:

$$(5.) \quad \sum_q \left[\begin{smallmatrix} ix \\ q \end{smallmatrix} \right] \frac{A_{q\lambda}}{A} = \left\{ \begin{smallmatrix} ix \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\},$$

ersetzen in (4.) den Buchstaben λ durch σ , multipliciren mit $\frac{A_{\sigma\sigma}}{A}$ und

summieren auch nach σ ; dann folgt:

$$(6.) \quad \frac{\partial^2 \xi_\alpha}{\partial x_i \partial x_\alpha} = - \sum_{\sigma} \left(\xi_\sigma \frac{A_{\sigma\alpha}}{A} \frac{\partial [\iota\kappa]}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x_i} \left\{ \begin{matrix} \rho\kappa \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x_\alpha} \left\{ \begin{matrix} \rho\iota \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x_\sigma} \left[\begin{matrix} \iota\kappa \\ \rho \end{matrix} \right] \frac{A_{\sigma\alpha}}{A} \right).$$

Ich differentiire (4.) nach x_μ und erhalte eine Gleichung, in welcher ausser den ξ_ρ , ihren ersten und zweiten Ableitungen noch

$$(7.) \quad \sum_{\rho} a_{\lambda\rho} \frac{\partial^3 \xi_\rho}{\partial x_i \partial x_\alpha \partial x_\mu}$$

vorkommt. Nun vertausche ich in (4.) die Marken α und μ und differentiire dann nach x_α . In der neuen Gleichung kommen die dritten Differentialquotienten nur in der Verbindung (7.) vor. Wenn die so gebildeten Gleichungen von einander subtrahirt werden, nimmt das Resultat unter Anwendung der Gleichungen (3.) die Gestalt an:

$$\begin{aligned} & \sum_{\rho} \xi_\rho \frac{\partial}{\partial x_\rho} \left(\frac{\partial [\iota\kappa]}{\partial x_\mu} - \frac{\partial [\iota\mu]}{\partial x_\kappa} \right) + \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_i} \left(\frac{\partial [\rho\kappa]}{\partial x_\mu} - \frac{\partial [\rho\mu]}{\partial x_\kappa} \right) \\ & + \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_\lambda} \left(\frac{\partial [\iota\kappa]}{\partial x_\mu} - \frac{\partial [\iota\mu]}{\partial x_\kappa} \right) + \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial [\iota\rho]}{\partial x_\mu} - \frac{\partial [\iota\mu]}{\partial x_\rho} \right) + \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial [\iota\kappa]}{\partial x_\rho} - \frac{\partial [\iota\rho]}{\partial x_\kappa} \right) \\ & + \sum_{\tau} \left(\frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial x_i \partial x_\alpha} \left[\begin{matrix} \lambda\mu \\ \tau \end{matrix} \right] - \frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial x_i \partial x_\mu} \left[\begin{matrix} \kappa\lambda \\ \tau \end{matrix} \right] - \frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial x_\alpha \partial x_\lambda} \left[\begin{matrix} \iota\mu \\ \tau \end{matrix} \right] + \frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} \left[\begin{matrix} \iota\kappa \\ \tau \end{matrix} \right] \right) = 0, \end{aligned}$$

wo in den vier letzten Summen der Summations-Buchstabe ρ durch τ ersetzt worden ist. Diese Vertauschung ist angebracht, um einfacher die aus (6.) folgenden Werthe für die zweiten Differentialquotienten einsetzen zu können. Geschieht das, so erhalten wir als Coefficienten von $\frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_i}$, $\frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_\lambda}$, $\frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_\alpha}$, $\frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_\mu}$ Ausdrücke, welche ganz gleichmässig gebildet sind. Wir werden dadurch zu der bekannten Abkürzung geführt:

$$(8.) \quad (\iota\lambda\kappa\mu) = \frac{\partial [\iota\kappa]}{\partial x_\mu} - \frac{\partial [\iota\mu]}{\partial x_\kappa} + \sum_{\sigma\tau} \frac{A_{\sigma\tau}}{A} \left(\left[\begin{matrix} \iota\mu \\ \sigma \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \kappa\lambda \\ \tau \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} \iota\kappa \\ \sigma \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \lambda\mu \\ \tau \end{matrix} \right] \right).$$

Ausserdem setzen wir für den Augenblick:

$$P_\rho = \frac{\partial}{\partial x_\rho} \left(\frac{\partial [\iota\kappa]}{\partial x_\mu} - \frac{\partial [\iota\mu]}{\partial x_\kappa} \right) + \sum_{\sigma\tau} \frac{A_{\sigma\tau}}{A} \frac{\partial}{\partial x_\rho} \left(\left[\begin{matrix} \iota\mu \\ \sigma \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \kappa\lambda \\ \tau \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} \iota\kappa \\ \sigma \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \lambda\mu \\ \tau \end{matrix} \right] \right)$$

und erhalten:

$$(9.) \left\{ \sum_{\varrho} \left(\xi_{\varrho} P_{\varrho} + \frac{\partial \xi_{\varrho}}{\partial x_{\iota}} (\varrho \lambda \kappa \mu) + \frac{\partial \xi_{\varrho}}{\partial x_{\lambda}} (\iota \varrho \kappa \mu) + \frac{\partial \xi_{\varrho}}{\partial x_{\kappa}} (\iota \lambda \varrho \mu) + \frac{\partial \xi_{\varrho}}{\partial x_{\mu}} (\iota \lambda \kappa \varrho) \right) \right. \\ \left. - \sum_{\varrho \sigma \tau} \frac{\partial \xi_{\varrho}}{\partial x_{\sigma}} \frac{A_{\sigma \tau}}{A} \left(\begin{bmatrix} \iota \kappa \\ \varrho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \mu \\ \tau \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \iota \mu \\ \varrho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \lambda \\ \tau \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \kappa \lambda \\ \varrho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \iota \mu \\ \tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \mu \\ \varrho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \iota \kappa \\ \tau \end{bmatrix} \right) \right\} = 0.$$

Diese Gleichung ist einer bedeutenden Vereinfachung fähig, zu der wir auf folgendem Wege gelangen:

Da $\sum_{\tau} a_{\iota \tau} \frac{A_{\sigma \tau}}{A} = 1$ oder 0 ist, wird der Differentialquotient nach jedem x_{ϱ} gleich Null; also besteht die Gleichung:

$$\sum_{\tau \varrho} \left(a_{\iota \tau} \frac{\partial \frac{A_{\sigma \tau}}{A}}{\partial x_{\varrho}} \xi_{\varrho} + \frac{A_{\sigma \tau}}{A} \frac{\partial a_{\iota \tau}}{\partial x_{\varrho}} \xi_{\varrho} \right) = 0.$$

Indem ich in der zweiten Summe deren Werth aus (1.) einsetze, folgt:

$$\sum_{\tau \varrho} \left(a_{\iota \tau} \frac{\partial \frac{A_{\sigma \tau}}{A}}{\partial x_{\varrho}} \xi_{\varrho} - \frac{A_{\sigma \tau}}{A} a_{\iota \varrho} \frac{\partial \xi_{\varrho}}{\partial x_{\tau}} - \frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial x_{\iota}} \right) = 0.$$

Hier ersetze ich die Marke ι durch σ , multiplicire mit $\frac{A_{\sigma \lambda}}{A}$ und summire nach σ ; wenn ich dann noch in der zweiten Summe den Summationsbuchstaben τ und in der dritten σ durch ϱ ersetze, erhalte ich folgende Gleichung:

$$(10.) \sum_{\varrho} \left(\xi_{\varrho} \frac{\partial \frac{A_{\sigma \lambda}}{A}}{\partial x_{\varrho}} - \frac{A_{\sigma \varrho}}{A} \frac{\partial \xi_{\lambda}}{\partial x_{\varrho}} - \frac{A_{\lambda \varrho}}{A} \frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial x_{\varrho}} \right) = 0,$$

welche auch an sich durch ihre Aehnlichkeit mit (1.) einiges Interesse beanspruchen dürfte.

Hier möge in den beiden letzten Summen der Buchstabe ϱ durch σ ersetzt, dann an Stelle von κ und λ neue Summationsbuchstaben eingeführt und mit

$$\begin{bmatrix} \iota \mu \\ \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \lambda \\ \tau \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \iota \kappa \\ \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \mu \\ \tau \end{bmatrix}$$

multiplicirt werden; dadurch erhält in (9.) die nach ϱ , σ , τ gebildete Summe die Form:

$$- \sum_{\varrho \sigma \tau} \xi_{\varrho} \frac{\partial \frac{A_{\sigma \tau}}{A}}{\partial x_{\varrho}} \left(\begin{bmatrix} \iota \mu \\ \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \lambda \\ \tau \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \iota \kappa \\ \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \mu \\ \tau \end{bmatrix} \right),$$

und die Gleichung (9.) nimmt folgende einfache Gestalt an:

$$(11.) \quad \left\{ \sum_{\varrho} \left[\xi_{\varrho} \frac{\partial(\iota\lambda\kappa\mu)}{\partial x_{\varrho}} + \frac{\partial \xi_{\varrho}}{\partial x_{\iota}} (\varrho\lambda\kappa\mu) + \frac{\partial \xi_{\varrho}}{\partial x_{\lambda}} (\iota\varrho\kappa\mu) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \xi_{\varrho}}{\partial x_{\kappa}} (\iota\lambda\varrho\mu) + \frac{\partial \xi_{\varrho}}{\partial x_{\mu}} (\iota\lambda\kappa\varrho) \right] \right\} = 0.$$

Diese Gleichung, welche aus (1.) durch Entwicklung der Integrabilitätsbedingungen erhalten ist, zeigt in ihrer äusseren Form grosse Aehnlichkeit mit einer Gleichung, welche aus mehreren Gleichungen (1.) durch blosse Addition und Multiplication erhalten wird. Multipliciren wir nämlich die Gleichung (1.) mit $a_{\lambda\mu}$, bilden dann die Gleichung (1.) für die Marken λ und μ , und multipliciren mit $a_{\iota\kappa}$, addiren diese Gleichungen und subtrahiren zwei ähnlich gebildete, so gelangen wir zu einer Gleichung, deren Aehnlichkeit mit (11.) dann besonders deutlich hervortritt, wenn wir die Abkürzung einführen:

$$(12.) \quad [\iota\lambda\kappa\mu] = a_{\iota\kappa} a_{\lambda\mu} - a_{\iota\mu} a_{\lambda\kappa}.$$

Dann wird die neue Gleichung:

$$(13.) \quad \left\{ \sum_{\varrho} \left[\xi_{\varrho} \frac{\partial[\iota\lambda\kappa\mu]}{\partial x_{\varrho}} + \frac{\partial \xi_{\varrho}}{\partial x_{\iota}} [\varrho\lambda\kappa\mu] + \frac{\partial \xi_{\varrho}}{\partial x_{\lambda}} [\iota\varrho\kappa\mu] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \xi_{\varrho}}{\partial x_{\kappa}} [\iota\lambda\varrho\mu] + \frac{\partial \xi_{\varrho}}{\partial x_{\mu}} [\iota\lambda\kappa\varrho] \right] \right\} = 0.$$

Die Vergleichung der Gleichungen (11.) und (13.) legt die Vermuthung nahe, dass für je vier Marken die Gleichung besteht:

$$(14.) \quad (\iota\lambda\kappa\mu) = M. [\iota\lambda\kappa\mu],$$

wo M eine Constante bezeichnet. Ehe wir dazu übergehen, die Berechtigung dieser Vermuthung zu prüfen, erinnern wir an die Beziehungen, welche die Herren *Christoffel* und *Lipschitz* für die Ausdrücke $(\iota\lambda\kappa\mu)$ aufgestellt haben. Diese werden durch die vier Gleichungen gegeben:

$$(15.) \quad \begin{cases} (\iota\lambda\kappa\mu) = -(\lambda\iota\kappa\mu), \\ (\iota\lambda\kappa\mu) = -(\iota\lambda\mu\kappa), \\ (\iota\lambda\kappa\mu) = (\kappa\mu\iota\lambda), \\ (\iota\lambda\kappa\mu) + (\iota\kappa\mu\lambda) + (\iota\mu\lambda\kappa) = 0. \end{cases}$$

Dieselben Beziehungen bestehen zwischen den durch (12.) definirten Grössen $[\iota\lambda\kappa\mu]$.

Wir beweisen zunächst die Richtigkeit der Gleichung (14.), indem wir die Ausdrücke $(\iota\lambda\kappa\mu)$ und $[\iota\lambda\kappa\mu]$ für denselben festgewählten Punkt allgemeiner Lage bilden und zeigen, dass M sich nicht ändert, wenn man die

Marken ι , λ , κ , μ durch irgend vier andere Marken ersetzt. Zu dem Ende gehen wir auf die Gleichung (11.) zurück und berücksichtigen, dass wir im vorigen Paragraphen für $\frac{n(n-1)}{2}$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen die Anfangsglieder der einzelnen Componenten kennen gelernt haben. Lassen wir den Punkt x^0 in Ruhe, bezeichnen die Werthe, welche die a_{ix} für diesen Punkt annehmen, mit a_{ix}^0 , so entwickeln wir die Componenten $\xi_1, \dots, \xi_n$ nach Potenzen von $x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0$. Eine Transformation $X_{\alpha\beta}f$ hat dann nur in den Componenten ξ_α und ξ_β Glieder ersten Grades, und in allen andern nur solche zweiter und höherer Grade; wir erhalten:

$$\xi_\alpha = \sum_{\sigma} a_{\beta\sigma}^0 (x_\sigma - x_\sigma^0) + \dots, \quad \xi_\beta = \sum_{\sigma} a_{\alpha\sigma}^0 (x_\sigma - x_\sigma^0) + \dots,$$

während bei einem von α und β verschiedenen γ jedes ξ_γ mit Gliedern zweiter Ordnung beginnt. Diese Werthe von $\xi_1, \dots, \xi_n$ setzen wir in die Gleichung (11.) und lassen dann $x_\sigma = x_\sigma^0$ werden. Dadurch verschwindet jedes ξ_σ ; $\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i}$ wird $a_{\beta i}^0$ u. s. w. Zugleich haben wir auch in die Ausdrücke für $(\rho\lambda\kappa\mu)$ u. s. w. den Werth $x_\sigma^0 = x_\sigma$ einzusetzen. Der erhaltene Werth gilt dann aber für jedes x^0 , und wir können somit die obere Marke weglassen. Dadurch gelangen wir zu der Gleichung:

$$(16.) \quad \begin{cases} a_{\beta\iota}(\alpha\lambda\kappa\mu) - a_{\alpha\iota}(\beta\lambda\kappa\mu) + a_{\beta\lambda}(\iota\alpha\kappa\mu) - a_{\alpha\lambda}(\iota\beta\kappa\mu) \\ + a_{\beta\kappa}(\iota\lambda\alpha\mu) - a_{\alpha\kappa}(\iota\lambda\alpha\mu) + a_{\beta\mu}(\iota\lambda\kappa\alpha) - a_{\alpha\mu}(\iota\lambda\kappa\beta) = 0. \end{cases}$$

Die vorstehende Gleichung wird keine Beziehung der $(\iota\lambda\kappa\mu)$ und $a_{ix} \dots$ angeben, wenn $\alpha = \beta$, oder wenn $\iota = \lambda$, oder wenn $\kappa = \mu$ ist. Für $\iota = \kappa$, $\lambda = \mu$ erhalten wir aus (6.):

$$(16^a.) \quad a_{\beta\iota}(\alpha\lambda\iota\lambda) - a_{\alpha\iota}(\beta\lambda\iota\lambda) + a_{\beta\lambda}(\iota\alpha\iota\lambda) - a_{\alpha\lambda}(\iota\beta\iota\lambda) = 0,$$

und für $\iota = \kappa$:

$$(16^b.) \quad \begin{cases} a_{\beta\iota}[(\alpha\lambda\iota\mu) + (\iota\lambda\alpha\mu)] - a_{\alpha\iota}[(\beta\lambda\iota\mu) + (\iota\lambda\beta\mu)] \\ + a_{\beta\lambda}(\iota\alpha\iota\mu) - a_{\alpha\lambda}(\iota\beta\iota\mu) + a_{\beta\mu}(\iota\lambda\iota\alpha) - a_{\alpha\mu}(\iota\lambda\iota\beta) = 0. \end{cases}$$

In der Gleichung (16.) beschränke ich mich zunächst auf drei verschiedene Marken, als welche ich 1, 2, 3 wähle. In (16^a.) setze ich $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\iota = 2$, $\lambda = 1$ und erhalte:

$$(\alpha.) \quad a_{32}(1212) - a_{22}(1213) - a_{12}(2321) = 0.$$

Indem ich diese Gleichung mit a_{33} und die aus ihr durch Vertauschung von

2 und 3 sich ergebende mit a_{22} multiplicire, erhalte ich:

$$(\beta.) \quad a_{23}[a_{33}(1212) - a_{22}(1313)] - a_{12}a_{33}(2321) - a_{13}a_{22}(2331) = 0.$$

In (16^b.) setze ich $\iota = 1$, $\lambda = 2$, $\mu = 3$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$; dann erhalte ich eine Gleichung, aus der in Verbindung mit den durch Erhöhung der Marken erhaltenen unmittelbar folgt:

$$a_{11}(2323) + a_{23}(1213) = a_{22}(3131) + a_{31}(2321) = \dots$$

Hiernach kann ich aus (β .) die eckige Klammer wegschaffen und erhalte:

$$(2321) = M[2321], \quad (3132) = M[3132],$$

und demnach auch $(1213) = M[1213]$. Diese Werthe in (α .) eingesetzt, folgen die entsprechenden Formeln für (1212), (2323), (3131).

Hier ist aber nur bewiesen, dass M sich unter Beibehaltung der drei Marken 1, 2, 3 nicht ändert. Wendet man aber die obigen Gleichungen auf die Marken 1, 2, 4 an, so folgt unter anderm:

$$(1212) = M'[1212], \quad (1414) = M'[1414],$$

also wenn nicht (1212) und [1212] beide verschwinden, $M = M'$. Dasselbe Resultat erhält man aber auch, wenn man die vier Marken α , β , ι , λ in (16^a.) in beliebiger Reihenfolge gleich 1, 2, 3, 4 setzt. Wollte man aber in (16.) die ι , λ , μ , $\mu = 1, 2, 3, 4$ setzen, so gelangt man nicht zu neuen Resultaten. Wählt man aber etwa in (16^b.) $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\iota = 3$, $\lambda = 2$, $\mu = 4$, so folgt:

$$(1234) + (1432) = M\{[1234] + [1432]\}.$$

Somit ist

$$(\gamma.) \quad (1234) = M[1234] + Q, \quad (1432) = M[1432] - Q.$$

Nun ist nach (15.)

$$(1234) - (1432) = (1234) + (1423) = -(1342);$$

demnach

$$(1342) = M[1342] - 2Q,$$

woraus entsprechend den Gleichungen (γ .) folgt:

$$(1243) = M[1243] + 2Q,$$

während die erste Gleichung (γ .) liefert:

$$(1243) = M[1243] - Q,$$

sodass $Q = 0$ sein muss.

Wir haben jetzt nur noch zu zeigen, dass sich M auch bei Hinzunahme weiterer Marken nicht ändert. Diesen Nachweis übersieht man sehr leicht, und man erhält ganz allgemein:

$$(\iota\lambda\mu) = M(x) \cdot [\iota\lambda\mu].$$

Multiplicirt man die Gleichung (13.) mit $M(x)$ und subtrahirt sie von (11.), so folgt:

$$\sum \xi_\rho \frac{\partial M(x)}{\partial x_\rho} = 0.$$

Hier darf man für $\xi_1, \dots, \xi_n$ die Componenten irgend einer in der Raumform möglichen unendlich kleinen Bewegung setzen. Bestände also die vorstehende Gleichung für ein veränderliches $M(x)$, so bliebe dies bei allen Transformationen der Gruppe invariant, und die Gruppe wäre intransitiv. Da das unmöglich ist, muss M eine blosse Constante sein.

Da die Grössen $a_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta} - a_{\alpha\delta}a_{\gamma\beta}$, welche wir der Kürze wegen mit $[\alpha\gamma\beta\delta]$ bezeichnet haben, nicht sämmtlich verschwinden können, so muss die Constante M endlich sein. Wir haben die drei Fälle zu unterscheiden, dass M gleich Null, positiv und negativ ist. Im Falle $M = 0$ verschwinden alle Ausdrücke $(\iota\lambda\mu)$ identisch. Dann hat Herr *Lipschitz* nachgewiesen, dass sich die Form $\sum a_{ix} dx_i dx_x$ in eine solche mit constanten Coefficienten verwandeln lässt. Wir können also die Coordinaten so wählen, dass die Form wird $\sum dx_i^2$. Soll diese Form bei der Transformation $\partial x_x = \delta t \cdot F_x(x)$ ungeändert bleiben, so muss sein:

$$\sum dx_i \cdot dF_x = \sum_{ix} dx_i \cdot \frac{\partial F_i}{\partial x_x} dx_x = 0,$$

also

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_x} + \frac{\partial F_x}{\partial x_i} = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x_x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_x}{\partial x_i \partial x_\lambda} + \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x_i \partial x_x} = 0.$$

Aus der letzteren Gleichung bilde man neue durch Vertauschung der Marken ι, z, λ , und dann folgt $\frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial x_i \partial x_x} = 0$, so dass F_λ eine lineare Function $\sum m_{\lambda\rho} x_\rho + q_\lambda$ ist mit der Bedingung $m_{\lambda\rho} + m_{\rho\lambda} = 0$.

Dies führt zu den $\frac{n(n+1)}{2}$ infinitesimalen Transformationen:

$$p_\iota, \quad x_i p_x - x_x p_i \quad \text{für} \quad \iota, x = 1, \dots, n.$$

Dass hierdurch die Euklidische Raumform bestimmt wird, ist bekannt.

Wenn M positiv $= \frac{1}{k^2}$ ist, so kann man nach den Untersuchungen des Herrn *Lipschitz* den quadratischen Ausdruck auf die Form bringen:

$$\frac{\sum dx_i^2}{1 + \frac{1}{4k^2} \sum x_i^2}.$$

Schon aus dieser Form ergeben sich sehr einfache Bewegungsgleichungen. Zu noch einfacheren gelangt man aber, wenn man

$$x_x = \frac{2u_x}{1+u_0}, \quad k^2 u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2 = k^2$$

oder umgekehrt

$$u_0 = \frac{4k^2 - \sum x_x^2}{4k^2 + \sum x_x^2}, \quad u_a = \frac{4k^2 x_a}{4k^2 + \sum x_x^2}$$

setzt. Hierdurch geht der Differentialausdruck über in $k^2 du_0^2 + du_1^2 + \dots + du_n^2$. Demnach können die unendlich kleinen Bewegungen, wenn man $\frac{\partial f}{\partial u_a} = q_a$ setzt, symbolisch durch $u_i q_x - u_x q_i$ und $k^2 u_0 q_x - u_x q_0$ dargestellt werden. Es sind dies die Raumformen constanter positiver Krümmung, welche ich (dieses Journal Bd. 86 S. 72 ff.) als die *Riemannsche* Raumform und deren Polarform unterscheide.

Ist M negativ, so lasse man k^2 negativ sein; dann bleiben die Formeln ungeändert, und man gelangt zu der *Lobatschewskyschen* Raumform.

§ 12.

Directe Bestimmung der zugehörigen Gruppe.

Zu den im vorigen Paragraphen vermittelt der Integrabilitäts-Bedingungen gewonnenen Resultaten wollen wir jetzt versuchen, auf anderen Wegen zu gelangen. Um auf ein Beweisverfahren, welches hier angewandt werden könnte, wenigstens aufmerksam zu machen, fassen wir das hauptsächlichste Ergebniss des § 10 in die Worte:

Jede eigentliche Raumform kann für jedes unendlich kleine Gebiet als eine Euklidische betrachtet werden.

Von diesem Resultate ausgehend, kann man die ebenen und die Kugelgebilde rein geometrisch herleiten. Dadurch gelangt man für einen dreidimensionalen Raum zu allen jenen Sätzen, welche *Euklid* implicite oder explicite voraussetzt, mit Ausnahme des sogenannten elften Grundsatzes; und für einen mehrdimensionalen Raum wird das Er-

gebniß ganz ähnlich. Hiervon ausgehend kommt man zu den verschiedenen Arten des Raumes.

Wir ziehen es jedoch vor, entsprechend dem in § 10 verfolgten Wege auch ferner die Theorie der Transformationsgruppen anzuwenden. Dabei berücksichtigen wir vor allem das Resultat, dass die Gruppe derjenigen Bewegungen, welche bei der Ruhe eines Punktes möglich sind, durch $\frac{n(n-1)}{2}$ infinitesimale Transformationen $X_{ix}f$ bestimmt wird, und dass zwischen diesen die Beziehungen bestehen:

$$(1.) \quad (X_{ix}X_{x\lambda}) = X_{i\lambda}f, \quad (X_{ix}X_{\lambda\mu}) = 0$$

für ungleiche Werthe von i, x, λ, μ . Diese Gruppe ist für $n = 3, 5, 6, \dots$ einfach; nur für $n = 4$ kann sie durch blosse Zusammenstellung zweier einfachen Gruppen gebildet werden. Es fragt sich jetzt, wie die weiteren n Transformationen $X_1f, \dots, X_nf$, welche zur Bestimmung der Gruppe noch nothwendig sind, hinzugefügt werden müssen. Um diese Frage beantworten zu können, berücksichtigen wir, dass bei der Ruhe eines Punktes kein Gebilde in Ruhe verbleiben muss, dass also die Gruppe zu denjenigen gehört, welche Herr *Lie* als asystatisch bezeichnet. Darüber beweist er den Satz (Transformations-Gruppen I. S. 520):

Eine transitive Gruppe ist dann und nur dann asystatisch, wenn die einem Punkte von allgemeiner Lage zugeordnete Untergruppe in keiner grösseren Untergruppe (und ebensowenig in der Gruppe selbst) invariant ist.

In unserem Falle darf also die Gruppe der X_{ix} weder in der Gruppe aller Bewegungen des Raumes noch in einer Untergruppe von mehr als $\frac{n(n-1)}{2}$ Gliedern eine invariante Untergruppe darstellen. Wie also auch die X_af gewählt werden, wofern sie nur unter einander und von den X_{ix} unabhängig sind, darf es nicht möglich sein, dass die Combination aller X_{ix} mit einigen der X_a durch die X_{ix} allein ausgedrückt werden könne.

Hiermit stellen wir folgenden Satz zusammen:

Wenn eine Gruppe nicht ihre eigene Haupt-Untergruppe ist und eine einfache oder halbeinfache Untergruppe G_e besitzt, so enthält sie auch stets eine Untergruppe, deren Transformationen mit allen denen von G_e vertauschbar sind.

Wenn aber in unserem Falle die Haupt-Untergruppe weniger als $\frac{n(n+1)}{2}$ Parameter enthielte, so gäbe es in der Gruppe mindestens eine

Transformation, welche mit allen Transformationen der Gruppe X_{ix} vertauschbar wäre. Nimmt man diese zu den X_{ix} hinzu, so erhält man eine Untergruppe, in welcher die der X_{ix} invariant ist, was nach dem oben Gesagten ausgeschlossen ist. Daraus ergibt sich, dass die Gruppe ihre eigene Haupt-Untergruppe sein muss. Da zudem keine Untergruppe vorkommen kann, welche mit allen Transformationen X_{ix} vertauschbar wäre, so bleiben nach den Untersuchungen über die Zusammensetzung der Gruppen nur drei Fälle: entweder ist die Gruppe selbst einfach (resp. für $n = 3$ halbeinfach), oder sie ist zusammengesetzt aus der Gruppe der X_{ix} und einer invarianten Untergruppe vom Range Null, oder die in ihr enthaltene einfache Untergruppe enthält mehr als $\frac{n(n-1)}{2}$ Glieder. Von diesen drei Fällen ist der letzte auszuschliessen. Soll nämlich die nach der Vorschrift (1.) gebildete Untergruppe in einer einfachen Gruppe vorkommen, so muss die Zahl der hinzutretenden von einander unabhängigen Transformationen mindestens n betragen. (Wollte man aber sich mit einer halbeinfachen Gruppe begnügen, jedoch, wie hier nothwendig ist, verlangen, dass die Gruppe (1.) keine invariante Untergruppe ist, so müsste dieselbe Zahl erforderlich sein.) In den beiden ersten Fällen können die infinitesimalen Transformationen $X_i f$ so gewählt werden, dass $(X_i X_{ix}) = X_x$ ist, und für die einfache (resp. für $n = 3$ die halbeinfache) Gruppe erhalten wir dann folgende Beziehungen:

$$(2.) \quad (X_i X_{ix}) = X_x f, \quad (X_i X_{x\lambda}) = 0, \quad (X_i X_x) = -\frac{1}{k^2} X_{ix} f,$$

wo k^2 eine positive oder negative Constante ist. Diese Gruppe kann offenbar in folgender Weise in einem n -dimensionalen Raume dargestellt werden: man wähle $n+1$ Variablen $x_0, x_1, \dots, x_n$ und setze zwischen ihnen die Beziehung fest:

$$(3.) \quad k^2 x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = k^2,$$

wo man annehmen darf, $x_1, \dots, x_n$ nehmen von $(0, 0, \dots, 0)$ an alle Werthsysteme bis zu einer gewissen Grenze an und x_0 ändere sich stetig mit, wie es die Gleichung (3.) vorschreibt; zugleich setze man:

$$(4.) \quad X_{ix} = x_i p_x - x_x p_i, \quad X_i = x_0 p_i - \frac{x_i p_0}{k^2}.$$

Dann ist offenbar der Punkt $(x_0 = 1, x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0)$ ein Punkt allgemeiner Lage; die zugehörige Untergruppe hat die angegebene Zusammensetzung; also ist jede Gruppe, welche den angegebenen Bedingungen

genügt, mit der vorstehenden ähnlich. Wir erhalten also nur zwei wesentlich verschiedene Gruppen, jenachdem k^2 positiv oder negativ ist, und gelangen wieder zu den Raumformen constanter positiver oder negativer Krümmung.

Wenden wir ebenso die allgemeinen Sätze über die Gestaltung der Gruppen auf diejenigen an, welche aus der Gruppe (1.) und einer invarianten Untergruppe vom Range Null zusammengesetzt sind, so finden wir, dass die Transformationen der invarianten Untergruppe sämtlich mit einander vertauschbar sind. Wählt man n beliebige unter ihnen zur Aufstellung des Coordinatensystems, so ergeben sich die infinitesimalen Transformationen in der Form:

$$X_1 f = p_1, \quad X_2 f = p_2, \quad \dots \quad X_n f = p_n.$$

Weil diese aber eine invariante Untergruppe bestimmen, muss

$$(X_a X_{ix}) = \frac{\partial X_{ix}}{\partial x_a} \quad \text{aus} \quad p_1, \quad \dots \quad p_n$$

durch Multiplication mit constanten Grössen und Addition erhalten werden; also kommen in den $X_{ix} f$ die $x_1, \dots, x_n$ nur linear vor. Soll jetzt die lineare Form $K(dx_1, \dots, dx_n)$ lauter Quadrate enthalten, so sind die infinitesimalen Transformationen

$$(5.) \quad p_i, \quad x_i p_x - x_x p_i \quad \text{für} \quad i, x = 1, \dots, n.$$

Daraus folgen unmittelbar alle Eigenschaften der Euklidischen Geometrie. Somit erhalten wir den Satz:

Es giebt nur drei verschiedene Gruppen, welche zu den eigentlichen Raumformen gehören. Dieselben müssen sämtlich ihre eigenen Haupt-Untergruppen sein. Zu ihrer Bestimmung benutze man $\frac{n(n+1)}{2}$ infinitesimale Transformationen, und wähle dieselben so, dass immer ist:

$$(X_{ix} X_{xj}) = X_{ij}, \quad (X_{ix} X_{j\mu}) = 0, \quad (X_i X_{ix}) = X_x f;$$

dazu kommen entweder

$$(X_i X_x) = -\frac{1}{k^2} X_{ix} f,$$

wo k^2 eine positive oder negative Constante ist, oder

$$(X_i X_x) = 0.$$

Den Satz, dass die invariante Untergruppe vom Range Null, welche in einer zu einer eigentlichen Raumform gehörigen Gruppe vorkommen kann, lauter vertauschbare Transformationen enthält, kann man auf einen

Satz stützen, dem man unter Anwendung einer von mir eingeführten Bezeichnung den Ausspruch geben kann:

Wenn alle Nebenwurzeln durch eine einzige mitgefordert sind, so sind die Transformationen der invarianten Untergruppe mit einander vertauschbar.

Aus diesem Satze folgt nämlich:

Wenn die $Y_i f$ eine einfache Untergruppe, die $Z_a f$ die invariante Untergruppe vom Range Null bestimmen, und wenn man, ausgehend von einem $Z_a f$, durch Combination mit allen $Y_i f$ jedesmal (wenigstens allmählich) zu allen $Z_a f$ gelangt, so sind alle Transformationen der invarianten Untergruppe mit einander vertauschbar.

In unserem Falle lasse man die $X_{ix} f$ derartig gewählt sein, dass der Nullpunkt in Ruhe bleibt. Indem wir von demselben aus n Richtungen passend wählen, können wir für die $X_{ix} f$ die Form voraussetzen:

$$X_{ix} f = x_i p_x - x_x p_i + \dots,$$

wo in den weiteren Gliedern die $p_1, \dots p_n$ mit Functionen zweiten und höheren Grades von $x_1, \dots x_n$ multiplicirt werden. Ebenso können wir annehmen, dass in jedem $X_i f$ als einziges Glied ohne $x_1, \dots x_n$ das p_i vorkommt. Daraus folgt:

$$(X_i X_{ix}) = X_x f + [X_{ix} f],$$

wo der Klammerausdruck eine lineare homogene Function der $X_{ix} f$ bezeichnen soll. Dieser muss verschwinden, wenn die $X_i f, \dots X_x f$ als der invarianten Untergruppe angehörig vorausgesetzt werden. Somit gelangt man in der That, von einem beliebigen $X_i f$ ausgehend, durch die Operation $(X_i X_{ix})$ zu allen $X_x f$.

So überaus einfach die vorstehenden Beweise auch sind, haben sie doch den Nachtheil, dass sie manche Sätze voraussetzen, und noch dazu solche, welche erst durch ein tieferes Studium der Theorie der Transformations-Gruppen gewonnen werden können. Es erscheint daher angemessen, einen Beweis beizufügen, welcher nur die einfachsten Principien dieser Theorie, nämlich die Formeln (1.)—(4.) in § 9 voraussetzt.

Zu dem Ende gehen wir wieder von derjenigen Darstellung der $\frac{n(n+1)}{2}$ infinitesimalen Transformationen aus, welche wir oben als möglich angegeben haben; es ist das die Form:

$$(6.) \quad \begin{cases} X_i f = p_i + \sum_{\varrho, \sigma} h_{\varrho\sigma}^i x_\varrho p_\sigma + \dots, \\ X_{ix} f = x_i p_x - x_x p_i + \sum_{\varrho, \sigma, \tau} k_{\varrho\sigma, \tau}^i x_\varrho x_\sigma p_\tau + \dots. \end{cases}$$

Daraus ergeben sich für die Zusammensetzung die Formeln:

$$(7.) \quad \begin{cases} (X_i X_{ix}) = X_x + \sum_{(\varrho\sigma)} c_{ix, \varrho\sigma}^i X_{\varrho\sigma}, \\ (X_i X_{x\lambda}) = \sum_{(\varrho\sigma)} c_{x\lambda, \varrho\sigma}^i X_{\varrho\sigma}, \end{cases}$$

nebst den oben hergeleiteten $(X_{ix} X_{x\lambda}) = X_{i\lambda}$. In (7.), wie auch stets im Folgenden, erstreckt sich die Summation nach ϱ, σ nur auf die verschiedenen Combinationen aus je zwei ungleichen Marken der Reihe 1, ... n .

Jetzt fügen wir zu jedem $X_i f$ einen linearen Ausdruck der $X_{\varrho\sigma}$ hinzu, nämlich:

$$\sum_{(\varrho\sigma)} m_{\varrho\sigma}^i X_{\varrho\sigma},$$

und wir wollen zeigen, dass die $\binom{n}{1}\binom{n}{2}$ Coefficienten $m_{\varrho\sigma}^i$ so gewählt werden können, dass die Gleichungen bestehen:

$$(8.) \quad \begin{cases} (X_i + \sum_{(\varrho\sigma)} m_{\varrho\sigma}^i X_{\varrho\sigma}, X_{ix}) = X_x + \sum_{(\varrho\sigma)} m_{\varrho\sigma}^x X_{\varrho\sigma}, \\ (X_i + \sum_{(\varrho\sigma)} m_{\varrho\sigma}^i X_{\varrho\sigma}, X_{x\lambda}) = 0. \end{cases}$$

Nun ist

$$(X_i + \sum_{\varrho\sigma} m_{\varrho\sigma}^i X_{\varrho\sigma}, X_{ix}) = X_x + \sum_{(\varrho\sigma)} c_{ix, \varrho\sigma}^i X_{\varrho\sigma} + \sum_{\tau} (m_{i\tau}^i X_{x\tau} - m_{x\tau}^i X_{i\tau}),$$

wo die Summation nach τ nur über die von i und x verschiedenen Marken auszuführen ist. Ebenso ist:

$$(X_i + \sum_{\varrho\sigma} m_{\varrho\sigma}^i X_{\varrho\sigma}, X_{x\lambda}) = \sum_{(\varrho\sigma)} c_{x\lambda, \varrho\sigma}^i X_{\varrho\sigma} + \sum_{\tau} (m_{x\tau}^i X_{\lambda\tau} - m_{\lambda\tau}^i X_{x\tau}),$$

wo jetzt τ von x und λ verschieden sein muss.

Daraus ergeben sich für die c folgende Bedingungen:

$$(9.) \quad c_{x\lambda, x\lambda}^i = 0, \quad c_{x\lambda, \mu\mu}^i = 0, \quad c_{x\lambda, i\mu}^i = 0$$

und zur Bestimmung der m die Gleichungen:

$$\begin{aligned} m_{ix}^i &= c_{x\lambda, \lambda i}^i, & m_{x\mu}^i &= -c_{x\lambda, \lambda\mu}^i, & c_{x\lambda}^x &= c_{ix, ix}^x, & m_{i\mu}^x &= c_{ix, \lambda\mu}^x, \\ m_{x\lambda}^i + m_{i\lambda}^x &= c_{ix, i\lambda}^i, & m_{i\lambda}^i - m_{x\lambda}^x &= -c_{ix, x\lambda}^i. \end{aligned}$$

Indem wir zunächst die Ausdrücke für ein m_{ix}^i mit einander vergleichen, ergeben sich für die c die weiteren Bedingungen:

$$(10.) \quad c_{x\lambda, \lambda i}^i = c_{x\mu, \mu i}^i = c_{ix, \lambda x}^x, \quad c_{ix, x\lambda}^i - c_{x\lambda, x\lambda}^x + c_{i\lambda, i\lambda}^x = 0.$$

Dazu kommen infolge der Ausdrücke für ein m_{ix}^i die Beziehungen:

$$(11.) \begin{cases} c_{ix, \iota\lambda}^{\iota} = c_{x\iota, x\lambda}^x, & c_{ix, \iota\lambda}^{\iota} + c_{x\lambda, x\iota}^x + c_{\lambda\iota, \lambda x}^{\lambda} = 0, & c_{x\mu, \mu\lambda}^{\iota} + c_{\iota\mu, \mu\lambda}^x + c_{ix, \iota\lambda}^{\iota} = 0, \\ & c_{x\mu, \lambda\mu}^{\iota} = c_{x\nu, \lambda\nu}^{\iota} = c_{\mu\iota, x\lambda}^{\mu} = c_{\nu\iota, x\lambda}^{\nu}. \end{cases}$$

Dass diese Beziehungen sämmtlich bestehen, kann man sehr leicht aus der Gleichung (4.) § 9 (der *Jacobischen* Identität) folgern. Wir bilden dieselbe zunächst für X_{ι} , X_{ix} , $X_{x\lambda}$, wodurch wir die Gleichung erhalten:

$$((X_{\iota}X_{ix})X_{x\lambda}) - (X_{\iota}X_{x\lambda}) - ((X_{\iota}X_{x\lambda})X_{ix}) = 0.$$

Indem wir hierin die Werthe (7.) einsetzen, erhalten wir:

$$(X_{\iota}X_{x\lambda}) - (X_{\iota}X_{x\lambda}) = c_{ix, \iota\lambda}^{\iota} X_{ix} - c_{ix, ix}^{\iota} X_{\iota\lambda} - c_{x\lambda, x\iota}^{\iota} X_{\iota\lambda} + c_{ix, \iota\lambda}^{\iota} X_{x\lambda} \\ + \sum_{\tau} (c_{x\lambda, \iota\tau}^{\iota} X_{x\tau} + c_{ix, \lambda\tau}^{\iota} X_{x\tau} - c_{x\lambda, x\tau}^{\iota} X_{\iota\tau} - c_{ix, x\tau}^{\iota} X_{\lambda\tau}),$$

wo die Summation nach τ sich nur über die von ι , x , λ , verschiedenen Marken erstreckt. Daraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$(12.) \begin{cases} c_{ix, \iota\lambda}^{\iota} + c_{\iota\lambda, ix}^{\iota} - c_{x\lambda, ix}^x = 0, & c_{\iota\lambda, x\lambda}^{\iota} + c_{x\lambda, \iota\lambda}^x + c_{x\lambda, x\lambda}^x = 0, \\ c_{ix, ix}^{\iota} - c_{\iota\lambda, \iota\lambda}^{\iota} + c_{x\lambda, ix}^x + c_{x\lambda, x\lambda}^x = 0, & c_{\iota\lambda, \mu\nu}^{\iota} = c_{x\lambda, \mu\nu}^x, \\ c_{\iota\lambda, \iota\mu}^{\iota} - c_{x\lambda, \lambda\mu}^x - c_{x\lambda, x\mu}^x = 0, & c_{ix, \lambda\mu}^{\iota} + c_{x\lambda, \iota\mu}^{\iota} + c_{\iota\lambda, x\mu}^x - c_{x\lambda, x\mu}^x = 0. \end{cases}$$

Ebenso bilde man die Gleichung (4.) § 9 für X_{ι} , X_{ix} , $X_{\lambda\mu}$ und erhält daraus:

$$c_{\lambda\mu, ix}^x = 0, \quad c_{\iota\mu, \lambda\mu}^x = 0, \quad c_{\lambda\mu, \lambda\nu}^x = c_{ix, \mu\nu}^x, \quad c_{ix, \lambda\nu}^x + c_{\lambda\mu, \mu\nu}^x = 0.$$

Will man nicht aus den gebildeten Relationen die Beziehungen:

$$c_{x\mu, \nu\varrho}^{\iota} = 0, \quad c_{x\mu, ix}^{\iota} = c_{\lambda\mu, \iota\lambda}^{\iota}$$

herleiten, so kann man sie aus der für X_{ι} , $X_{x\lambda}$, $X_{\lambda\mu}$ gebildeten Identität unmittelbar hinschreiben.

Hiermit sind die meisten der durch die Gleichungen (9.), (10.), (11.) geforderten Beziehungen direct bewiesen. Nur einige wenige bedürfen noch einer kurzen Herleitung. Vergleicht man mit der ersten Gleichung (12.) diejenige, welche aus ihr durch Vertauschung der Marken ι und x hervorgeht, so folgt $c_{ix, \iota\lambda}^{\iota} = c_{x\iota, x\lambda}^x$, und ersetzt man das zweite Glied in dieser selben Gleichung durch $c_{\lambda\iota, \lambda x}^{\lambda}$, so erhält man die zweite Gleichung (11.). Die letzte Gleichung (10.) wird durch blosse Aenderung der Marken aus der dritten Gleichung (12.) erhalten. (Auf kleine Aenderungen, welche die Herleitung für $n = 3$ erleidet, soll nur hingedeutet werden.) Damit ist der Nachweis erbracht, dass die $m_{\varrho\sigma}^{\iota}$ immer in der vorgeschriebenen Weise bestimmt werden können (für $n = 3$ noch so, dass eine Grösse unbestimmt

bleibt). Wir dürfen also voraussetzen, dass die Beziehungen bestehen:

$$(X_i X_{ix}) = X_x f, \quad (X_i X_{x\lambda}) = 0.$$

Jetzt bilde man die oft benutzte Gleichung (4.) § 9 für X_i, X_x, X_{ix} , so folgt, dass $(X_i X_x)$ mit X_{ix} vertauschbar ist, also ausser X_{ix} nur solche $X_\lambda, X_{\lambda\mu}$ enthalten kann, wo λ, μ von i und x verschieden sind. Ebenso liefert $(X_i X_x X_{\lambda\mu})$ den Satz, dass $(X_i X_x)$ auch mit $X_{\lambda\mu}$ vertauschbar ist. Für $n > 4$ folgt daraus $(X_i X_x) = e_{ix} X_{ix}$; für $n = 3$ ergibt sich:

$$(X_i X_x) = e_{ix} X_{ix} + g_\lambda X_\lambda,$$

aber dann dient die sogleich im Folgenden zu benutzende Relation unter Anwendung der für die X_1, X_2, X_3 gebliebenen Unbestimmtheit dazu, die g_λ zum Verschwinden zu bringen. Für $n = 4$ folgt zunächst:

$$(X_i X_x) = e_{ix} X_{ix} + g_{ix} X_{\lambda\mu};$$

aber die folgende Untersuchung lässt g_{ix} verschwinden. Endlich lehrt die *Jacobische* Identität für $(X_i X_x X_{x\lambda})$ oder die Gleichung:

$$((X_i X_x) X_{x\lambda}) = (X_i X_\lambda),$$

dass in $(X_i X_x) = c X_{ix}$ der Coefficient c von den Marken i, x unabhängig ist. Wir können also wieder c entweder gleich Null oder gleich $-\frac{1}{k^2}$ setzen, und haben wiederum gefunden, dass betreffs der Zusammensetzung nur die angegebenen Fälle möglich sind. Dass wir aber für $c = 0$ überhaupt nur eine einzige Raumform erhalten, ist bereits oben in sehr einfacher Weise gezeigt. Wir haben also nur noch zu beweisen, dass auch für ein nicht verschwindendes $c = -\frac{1}{k^2}$ der Zusammensetzung, nach passender Wahl des Coordinatensystems, eine einzige Darstellung entspricht, welche für unendlich kleine Werthe von $x_1, \dots, x_n$ auf die Form (6.) hinauskommt. Da aber die Darstellung (6.) nur die unendlich kleinen Werthe von $x_1, \dots, x_n$ als bestimmt voraussetzt, kommt es jetzt darauf an, die Fortsetzung so zu bestimmen, dass möglichst einfache Formeln entstehen. Hierzu eignet sich der in § 7 angegebene Weg weniger; eine kleine Umgestaltung desselben würde uns allerdings auch zum Ziele führen. Indessen möchte ich auf einen anderen Weg aufmerksam machen, der mit entsprechenden Veränderungen auch sonst recht brauchbar ist.

Die Darstellung (6.) zeigt, dass für unendlich kleine Werthe der Variablen das Gebilde $x_i = 0$ für diejenige Untergruppe in sich verbleibt, welche dadurch erhalten wird, dass man in $X_\alpha f$, $X_{\alpha\beta} f$ die Marken α , β auf die $n-1$ Marken $1, 2, \dots, \iota-1, \iota+1, \dots, n$ mit Ausnahme von ι beschränkt. Somit wird auch allgemein durch diese Untergruppe ein Gebilde in sich bewegt, und wir setzen allgemein für die Punkte desselben $x_i = 0$ an. Mit diesem Gebilde wird aber eine Schaar weiterer in sich bewegt, und es erscheint angemessen, für jedes einzelne unter ihnen den Werth x_i constant sein zu lassen. Die $n-1$ derartig bestimmten Gebilde $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots, x_{n-1} = 0$, und somit auch ihre Schnittlinie werden durch die eingliedrige Untergruppe $X_n f$ in sich verschoben. Man benutze diese Bewegung, um nach den in § 7 getroffenen Festsetzungen jedem Punkte dieser Linie eine Zahl y_n zuzuordnen. Dann setze man $x_n = k \sin \frac{y_n}{k}$, und da derselbe Werth x_n für alle Punkte des eben genannten Gebildes gilt, so kann man für alle Punkte in einer endlichen Umgebung des Nullpunktes n Coordinaten festsetzen. Jetzt gilt für unendlich kleine Werthe die Darstellung (6.). Man übersieht aber auch sehr leicht, dass allgemein die Darstellung besteht:

$$X_i f = p_i \sqrt{\frac{k^2 - x_1^2 - x_2^2 \dots - x_n^2}{k^2}}, \quad X_{ix} f = x_i p_x - x_x p_i,$$

und es wird nicht nothwendig sein, auf den Beweis näher einzugehen.

§ 13.

Die Raumformen von zwei Dimensionen.

Bereits vor längerer Zeit hat Herr *Lie* sämtliche Transformations-Gruppen für zwei Veränderliche angegeben (Mathem. Annalen Bd. XVI). Hierin hat man nur noch die Realität zu berücksichtigen, um leicht entscheiden zu können, welche Gruppen unserer letzten Voraussetzung genügen. Später habe ich unabhängig davon (Programm 1884) die sämtlichen dreigliedrigen Gruppen aufgestellt, und da unsere Voraussetzung bei zwei Dimensionen offenbar drei Grade von Beweglichkeit liefert, würde es auch genügen, aus den verschiedenen so gefundenen Systemen die passenden auszuwählen. Indessen ziehe ich eine directe Entwicklung vor.

Die Bedingung, dass bei der Ruhe eines Punktes ein bewegter Punkt auf einer Linie verbleibt, genügt keineswegs, um auch nur eine eng be-

grenzte Klasse von Raumformen zu erhalten. Es kommt dies darauf hinaus, eine Invariante zwischen zwei Punkten vorauszusetzen; wenn hierin aber nur eine Variable wesentlich ist, so bedarf es noch einer zweiten Invariante, und diese kann zwischen beliebig vielen Punkten angenommen werden. Nur wenn man die Linie als geschlossen voraussetzt, kommt man, wie Herr *von Helmholtz* bereits 1868 bewiesen hat, auf sehr wenige Raumformen. Da wir aber für eine grössere Zahl von Dimensionen einen anderen Weg eingeschlagen haben, müssen wir denselben auch hier verfolgen.

Lassen wir einen Punkt in Ruhe, so wird die alsdann noch mögliche Bewegung durch eine eingliedrige Gruppe bestimmt. Dasselbe gilt dann auch für die unendlich nahen Punkte, und wir können für deren Aenderung unter Benutzung der in § 10 angewandten Bezeichnung die infinitesimale Transformation voraussetzen $\sum m_{ix} z_i r_x$ für $i, x = 1, 2$. Hierbei bleiben zwei (reelle oder imaginäre) oder eine einzige Linie in Deckung mit der Anfangslage. Da der letztere Fall nicht eintreten kann, so ist die Invariante:

$$(M_1 dx_1 + M_2 dx_2)^\alpha (N_1 dx_1 + N_2 dx_2)^\beta,$$

wo die beiden linearen Ausdrücke conjugirt complex sein müssen. Hier sind M_1, M_2, N_1, N_2 Functionen von x_1 und x_2 ; wir können also entsprechend den Untersuchungen des § 11 fragen, wann die vorliegende Form sich bei Transformationen nicht ändert. Diese Frage erledigt sich besonders einfach, wenn in α und β der imaginäre Theil nicht verschwindet, worauf wir jedoch nicht näher eingehen. Dagegen ändert sich § 11 nicht für $\alpha = \beta$, wo man erhält $a_{11} dx_1^2 + 2a_{12} dx_1 dx_2 + a_{22} dx_2^2$. Dann erleidet die Gl. (11.) § 11 keine Aenderung; und da die Gleichung $(1212) = M(x) \cdot [1212]$ selbstverständlich ist, so folgt die Constanz von $M(x)$ unmittelbar.

Wenden wir jetzt die in § 12 entwickelte Methode auf unseren Fall an, so können wir voraussetzen:

$$(1.) \quad X_1 f = p_1 + \dots, \quad X_2 f = p_2 + \dots, \quad X_3 f = (\alpha x_1 + x_2) p_1 + (-x_1 + \alpha x_2) p_2 + \dots,$$

woraus für die Zusammensetzung folgt:

$$\begin{aligned} (X_1 X_3) &= \alpha X_1 - X_2 + \beta X_3, & (X_2 X_3) &= X_1 + \alpha X_2 + \gamma X_3, \\ (X_1 X_2) &= c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3. \end{aligned}$$

Nun folgt aus der Gleichung (4.) § 9:

$$(2.) \quad (c_1 - \gamma)(X_1 X_3) + (c_2 + \beta)(X_2 X_3) - 2\alpha(X_1 X_2) = 0.$$

Da aber:

$$(X_1 + \alpha X_3, X_2 + \lambda X_3) = (X_1 X_2) + \lambda (X_1 X_3) - \alpha (X_2 X_3),$$

so kann man bei nicht verschwindendem α diesen Ausdruck gleich Null machen, wenn man $\alpha = \frac{c_2 + \beta}{2\alpha}$, $\lambda = -\frac{c_1 - \gamma}{2\alpha}$ setzt. Aber auch für $\alpha = 0$ kann man im letzten Ausdruck die Coefficienten von X_1 und X_2 zum Verschwinden bringen. Ersetzt man dann $X_1 + \alpha X_3$ durch X_1 , $X_2 + \lambda X_3$ durch X_2 , so müssen wegen der Unabhängigkeit von $(X_1 X_3)$ und $(X_2 X_3)$ auch β und γ verschwinden. Somit erhalten wir die folgenden Möglichkeiten:

$$(a.) \quad (X_1 X_3) = -X_2, \quad (X_2 X_3) = X_1, \quad (X_1 X_2) = c X_3,$$

wo c positiv oder negativ oder gleich Null ist;

$$(b.) \quad (X_1 X_3) = \alpha X_1 - X_2, \quad (X_2 X_3) = \alpha X_2 + X_1, \quad (X_1 X_2) = 0,$$

wo α von Null verschieden sein soll.

Zur Darstellung der Gruppe (a.) geht man wieder von der Form (1.) aus und gelangt zu solchen Raumformen, welche ganz den im vorigen Paragraphen gefundenen entsprechen. Dagegen zeigt die Raumform (b.) wesentlich andere Eigenschaften. Die unendlich kleinen Transformationen können wir darstellen durch

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = (\alpha x_1 + x_2)p_1 + (-x_1 + \alpha x_2)p_2.$$

Die allgemeinste endliche Bewegung ergibt sich unter Anwendung dreier willkürlichen Grössen a , b , t aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} x' - a &= e^{at}[(x - a)\cos t - (y - b)\sin t], \\ y' - b &= e^{at}[(x - a)\sin t + (y - b)\cos t]. \end{aligned}$$

Bei der Drehung um einen Punkt bewegt sich jeder zweite in einer gewissen Spirale; dabei kehrt jede Richtung in die Anfangslage zurück, aber die einzelnen Punkte nehmen ihre Anfangslage nicht wieder an. Lassen wir einen einfach begrenzten Theil dieses Raumes sich drehen um einen Punkt in seinem Innern und zwar eine volle Umdrehung ($t = 2\pi$) ausführen, so wird der Raumtheil, welcher jetzt gedeckt wird, entweder den früheren als Theil in sich schliessen oder von dem früheren eingeschlossen. Durch unbegrenzte Fortsetzung dieser Bewegung kann ein beliebig gewählter Körper (wo dies Wort im Sinne unserer Grundsätze benutzt wird) dazu gebracht werden, einmal jeden beliebig gewählten (endlichen) Raum-

theil einzuschliessen und bei anderer Drehungsrichtung in einen beliebig kleinen, um den ruhenden Punkt gewählten Raumtheil ganz hineinzugelangen. Somit kann man dem Grundsatz VIII leicht einen Ausspruch geben, welcher diese Raumform ganz ausschliesst. Zu ihrer Darstellung kann man die sämtlichen Geraden wählen, welche in einer dreifach ausgedehnten *Lo-batschewskyschen* Raumform einer festen Richtung parallel sind, wofern festgesetzt wird, dass jede Drehung um eine Gerade der Schaar mit einer durch α charakterisirten Verschiebung längs derselben Geraden verbunden ist.
