

Werk

Titel: Extrait d'une lettre de Mr. Ch. Hermite à Mr. Borchardt.

Autor: Hermite, Ch.

Jahr: 1873

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0076|log27

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Extrait d'une lettre de Mr. *Ch. Hermite* à Mr. *Borchardt*.

..... Je ne me hasarderai point à la recherche d'une démonstration de la transcendance du nombre π . Que d'autres tentent l'entreprise, nul ne sera plus heureux que moi de leur succès, mais croyez-m'en, mon cher ami, il ne laissera pas que de leur en coûter quelques efforts. Tout ce que je puis, c'est de refaire ce qu'a déjà fait *Lambert*, seulement d'une autre manière, au moyen de cette égalité:

$$A_n = U \sin x + V \cos x = \frac{x^{2n+1}}{2.4 \dots 2n} \int_0^1 (1-z^2)^n \cos xz \, dz,$$

où A_n , U et V désignent les mêmes quantités que dans ma lettre à Mr. *Gordan*. Vous savez que U est un polynôme entier et à coefficients entiers en x^2 du degré $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ selon que n est pair ou impair; il en résulte dans le premier cas par exemple, que pour $x = \frac{\pi}{2}$, en supposant que $\frac{\pi^2}{4}$ soit une fraction $\frac{b}{a}$, on aura

$$U = \frac{N}{a^{\frac{1}{2}n}},$$

où N est entier, et la relation proposée donne

$$\frac{N}{a^{\frac{1}{2}n}} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b}{a}\right)^n}{2.4 \dots 2n} \int_0^1 (1-z^2)^n \cos \frac{\pi z}{2} \, dz$$

ou bien

$$N = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^n}{2.4 \dots 2n} \int_0^1 (1-z^2)^n \cos \frac{\pi z}{2} \, dz.$$

Or on met immédiatement une impossibilité en évidence, puisque le second membre devient sans pouvoir jamais s'annuler, plus petit que toute quantité donnée quand n augmente, le premier étant un nombre entier.

Voici une autre conséquence de l'expression de A_n par une intégrale

définie; on en tire aisément sous forme d'intégrales doubles, les quantités:

$$B_n = \int_0^x A_n dx, \quad C_n = \int_0^x B_n dx, \quad \text{etc.}$$

en employant les formules élémentaires

$$\begin{aligned} \int_0^x dx \int_0^x f(x) dx &= \int_0^x (x-z) f(z) dz = x^2 \int_0^1 (1-\lambda) f(\lambda x) d\lambda, \\ \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x f(x) dx &= \int_0^x \frac{(x-z)^2}{1.2} f(z) dz = \frac{x^3}{1.2} \int_0^1 (1-\lambda)^2 f(\lambda x) d\lambda, \\ &\dots \end{aligned}$$

et il vient ainsi

$$P_n = \frac{x^{2n+p+1}}{1.2 \dots p-1.2.4 \dots 2n} \int_0^1 \int_0^1 (1-\lambda^2)^n (1-\lambda_1)^{p-1} \lambda_1^{2n+1} \cos \lambda \lambda_1 x d\lambda d\lambda_1.$$

Mais sous un point de vue plus général, supposons les i polynômes: $\Phi_m(x)$, $\Phi_n(x)$, ... $\Phi_r(x)$ des degrés m , n , ... r déterminés de manière que le développement suivant les puissances croissantes de la variable de la fonction

$$f(x) = e^{\alpha x} \Phi_m(x) + e^{\beta x} \Phi_n(x) + \dots + \Phi_r(x)$$

commence au terme du degré le plus élevé possible, en $x^{m+n+\dots+r+i-1}$. En multipliant par une nouvelle exponentielle, $e^{\omega x}$, et formant la suite des quantités

$$f_1(x) = \int_0^x e^{\omega x} f(x) dx, \quad f_2(x) = \int_0^x f_1(x) dx, \quad \dots \quad f_{s+1}(x) = \int_0^x f_s(x) dx$$

il est clair que la dernière sera de la forme suivante:

$$f_{s+1}(x) = e^{(\alpha+\omega)x} \Psi_m(x) + e^{(\beta+\omega)x} \Psi_n(x) + \dots + e^{\omega x} \Psi_r(x) + \Psi_s(x),$$

où $\Psi_m(x)$, $\Psi_n(x)$, ... $\Psi_s(x)$ seront des polynômes entiers des degrés m , n , ... s , et que son développement commencera par un terme de degré $m+n+\dots+s+i$. On en conclut aisément que si l'on pose

$$\begin{aligned} \Theta(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i) &= (1-\lambda_1)^n (1-\lambda_2)^p \dots (1-\lambda_i)^s \lambda_1^m \lambda_2^{m+n+1} \dots \lambda_i^{m+n+\dots+r+i-1}, \\ \mathcal{A} &= (\alpha-\beta) \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_i + (\beta-\gamma) \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_i + (\gamma-\delta) \lambda_3 \lambda_4 \dots \lambda_i + \dots + \omega \lambda_i \end{aligned}$$

on aura la relation

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \Theta(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i) e^{\mathcal{A}x} d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_i = \frac{e^{\alpha x} \Theta_m(x) + e^{\beta x} \Theta_n(x) + \dots + e^{\omega x} \Theta_r(x) + \Theta_s(x)}{x^{m+n+\dots+s+i}}$$

où $\Theta_m(x)$, $\Theta_n(x)$, ... $\Theta_s(x)$ sont des polynômes entiers des degrés m , n , ... s ; c'est donc au moyen d'une intégrale multiple la définition du système des

polynômes entiers de degrés donnés, qui donnent la plus grande approximation de la fonction linéaire composée avec les exponentielles e^{ax} , $e^{\beta x}$, ... $e^{\omega x}$.

Dans le courant de ces recherches voici une question arithmétique qui m'a beaucoup préoccupé. En considérant pour une valeur entière de x la fraction continue

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{x}{2 + \frac{x^2}{6 + \dots}}$$

ne doit-il pas exister quelque caractère spécial, à l'égard de la fraction continue ordinaire équivalente dans laquelle les numérateurs des fractions intégrantes sont l'unité? J'avais présumé qu'au moins de distance en distance, les quotients incomplets iraient en grandissant, et c'est ce qui se trouve jusqu'à un certain point confirmé, par le résultat suivant que je dois à l'obligeance de Mr. *Forestier*. Soit $x = 3$ et faisons

$$\frac{e^3 - 1}{e^3 + 1} = \frac{1}{q + \frac{1}{q' + \frac{1}{q'' + \dots}}}$$

la suite des nombres entiers q , q' , q'' , ... est

1, 8, 1, 16, 2, 1, 1, 2, 4, 1, 2, 11, 2, 1, 2, 36, 1, 8, 4, 17, 9, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 90, ...

Malheureusement les calculs sont si longs et si pénibles qu'on ne peut espérer trouver quelque loi par la voie de l'induction.

Rochefort sur mer 31. août 1873.