Ueber das *Pfaff*sche Problem.

Zweite Abhandlung.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

In einer ersten Abhandlung (dieses Journal Bd. 60, p. 193) habe ich den Gleichungen des *Pfaff*schen Problems eine neue Form gegeben, welche dieses Problem unter einem ganz neuen und fundamentalen Gesichtspunkte darstellt, indem durch dieselben zum ersten Male die Lösungen des *Pfaff*schen Problems durch ein unmittelbar zu bildendes System simultaner Gleichungen definirt erscheinen. Der Weg, welchen ich dort zur Aufstellung dieser Gleichungen eingeschlagen habe, und welcher zugleich auf eine Methode geführt hat, das *Pfaff*sche Problem mit Hülfe von möglichst wenig Integrationen zu lösen, brachte die erwähnte Form nicht unmittelbar, und ist nicht vollständig geeignet, die Natur der betreffenden Gleichungen ins rechte Licht zu setzen.

Ich werde daher in dem gegenwärtigen Aufsatze unmittelbar diese das *Pfaff*sche Problem definirenden Gleichungen ableiten, wobei sich einige merkwürdige Eigenschaften derselben ergeben werden; sodann aber werde ich von diesem System ausgehend eine Integrationsmethode angeben, welche die in dem früheren Aufsatze niedergelegte als speciellen Fall in sich enthält, und welche vielleicht die allgemeinste ist, die sich aus dem hier einmal festgehaltenen Gesichtspunkte entwickeln lässt. Dieselbe fordert nicht mehr Integrationen als die früher behandelte; sie ist wesentlich auf die Relationen gestützt, welche ich am Ende der erwähnten Abhandlung entwickelt habe, und welche für die bei der *Pfaff*schen Lösung des Problems auftretenden Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen von so grosser Wichtigkeit sind *).

---

*) Es sei mir erlaubt, an dieser Stelle nochmals auf die Vergleichung der Resultate meiner ersten Abhandlung mit denen des Herrn *Natani* zurückzukommen. Bezüglich der letzteren findet sich dort (Bd. 60 dieses Journals, p. 196) die irrthümliche Bemerkung, dass Herr *Natani* den Weg zur Integration seiner Systeme nicht vollständig angegeben habe. Dies ist allerdings in der Abhandlung des Herrn *Natani* (Bd. 58 dieses Journals, p. 301) vollständig geschehen; und man wird selbst finden, dass die von Herrn *Natani* in §. 10 seiner Abhandlung angegebene Methode genau auf dieselbe Anzahl geforderter Integrale zurückkommt, welche ich im Anschluss an die späteren Methoden *Jacobis* angegeben habe.

§. 1.
Directe Ableitung der simultanen Differentialgleichungen, durch welche man die Lösungen des *Pfaff*schen Problems definiren kann.

Die Aufgabe, den Differentialausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

in einen nur n Differentiale enthaltenden Ausdruck

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n$$

zu transformiren, wird, wenn man beide Formen mit einander vergleicht und die Coefficienten der dx_i auf beiden Seiten einander gleichsetzt, durch das System von Gleichungen repräsentirt:

$$(1.)\quad \begin{cases} X_1 = F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \cdots + F_n \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \\ X_2 = F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + F_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + F_n \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ X_{2n} = F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_{2n}} + F_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_{2n}} + \cdots + F_n \frac{\partial f_n}{\partial x_{2n}}. \end{cases}$$

Die Aufgabe ist bekanntlich immer vollkommen bestimmt, sobald die aus den Ausdrücken

$$(2.)\quad a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

gebildete Determinante

$$(3.)\quad D = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{2n,2n}$$

nicht verschwindet; was hier immer vorausgesetzt werden soll.

Wendet man aber bei der Bildung der Ausdrücke (2.) die Gleichungen (1.) an, so erhält man auch

$$(4.)\quad a_{ik} = \Sigma_\lambda \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_k} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} - \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k} \right),$$

und indem man die Determinante dieser Ausdrücke bildet, erkennt man, dass dieselbe sich in die beiden Factoren

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \cdot - \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} \cdot - \frac{\partial f_2}{\partial x_{n+2}} \cdots - \frac{\partial f_n}{\partial x_{2n}},$$

und

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+2}} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_{2n}}$$

auflöst, welche ausserdem mit einander offenbar identisch sind. Setzt man also

$$(5.)\quad \varDelta = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1}.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}.\frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}}.\frac{\partial F_2}{\partial x_{n+2}}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial x_n},$$

so hat man

$$(6.)\quad D = \varDelta^2.$$

Aber nach einem bekannten Satze hat man auch noch, wenn D_{ik} die dem Elemente a_{ik} entsprechende Unterdeterminante von D ist:

$$(7.)\quad D_{ik} = \Sigma_\lambda \left(\frac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial F_\lambda}{dx_k}} \frac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}} - \frac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i}} \frac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k}} \right).$$

Wenn nun D, also auch $\varDelta$, nicht verschwindet, so kann man immer ebensowohl die f, F als Functionen der x, wie umgekehrt die x als Functionen der f, F betrachten; und diese beiden Darstellungsweisen sind verbunden durch die Gleichungen

$$\frac{\partial x_i}{\partial f_\lambda} = \frac{1}{\varDelta} \frac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}}, \qquad \frac{\partial x_i}{\partial F_\lambda} = \frac{1}{\varDelta} \frac{\partial \varDelta}{\partial \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i}}.$$

Dividirt man also (7.) durch $D = \varDelta^2$, so kann man für diese Gleichung auch schreiben:

$$(8.)\quad \frac{D_{ik}}{D} = \Sigma_\lambda \left(\frac{\partial x_k}{\partial F_\lambda} \frac{\partial x_i}{\partial f_\lambda} - \frac{\partial x_i}{\partial F_\lambda} \frac{\partial x_k}{\partial f_\lambda} \right).$$

Es ist bekannt, dass die Determinante D sich als das Quadrat eines aus den Grössen a_{ik} auf rationale Weise gebildeten Ausdrucks R darstellt. Bezeichnet man durch R_{ik} den Differentialquotienten von R nach a_{ik}, so erhält man durch Differentiation der Gleichung

$$R^2 = D$$

unmittelbar:

$$2R.R_{ik} = D_{ik} - D_{ki} = 2D_{ik},$$

oder nach Division mit $R^2 = D$:

$$\frac{R_{ik}}{R} = \frac{D_{ik}}{D},$$

woher denn die Gleichung (8.) auch in der Form dargestellt werden kann:

$$(9.)\quad \frac{R_{ik}}{R} = \Sigma_\lambda \left(\frac{\partial x_k}{\partial F_\lambda} \frac{\partial x_i}{\partial f_\lambda} - \frac{\partial x_i}{\partial F_\lambda} \frac{\partial x_k}{\partial f_\lambda} \right).$$

Bezeichnet man nun durch (φ) und $[\varphi, \psi]$ die beiden Ausdrücke:

$$(10.)\quad \begin{cases} (\varphi) = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \\ [\varphi, \psi] = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, \end{cases}$$

so ergiebt sich, indem man aus (9.) die Werthe der $\frac{R_{ik}}{R}$ und aus (1.) die Werthe der X einführt:

$$\begin{aligned}(\varphi) &= \Sigma_i \Sigma_k \Sigma_\mu \Sigma_\lambda F_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\left(\frac{\partial x_k}{\partial F_\lambda} \frac{\partial x_i}{\partial f_\lambda} - \frac{\partial x_i}{\partial F_\lambda} \frac{\partial x_k}{\partial f_\lambda}\right) \\ &= \Sigma_\mu F_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial F_\mu}, \\ [\varphi, \psi] &= \Sigma_i \Sigma_k \Sigma_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}\left(\frac{\partial x_k}{\partial F_\lambda} \frac{\partial x_i}{\partial f_\lambda} - \frac{\partial x_i}{\partial F_\lambda} \frac{\partial x_k}{\partial f_\lambda}\right) \\ &= \Sigma_\lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial F_\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial f_\lambda} - \frac{\partial \psi}{\partial F_\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial f_\lambda}\right).\end{aligned}$$

Den Inhalt dieser Gleichungen kann man durch folgendes Theorem darstellen:

Theorem 1.

Seien $X_1, X_2, \ldots X_{2n}$ beliebige Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$, welche der einzigen Bedingung genügen, dass die Determinante der aus ihnen gebildeten Ausdrücke

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

nicht verschwindet. Sei ferner R der rationale Ausdruck, dessen Quadrat der Determinante der a_{ik} gleich ist, und sei

$$R_{ik} = \frac{\partial R}{\partial a_{ik}};$$

bezeichnen wir endlich durch φ, ψ beliebige Functionen und durch (φ), $[\varphi, \psi]$ die Ausdrücke:

$$(\varphi) = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k},$$

$$[\varphi, \psi] = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}.$$

Hat man dann solche $2n$ Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n, F_1, F_2, \ldots F_n$ gefunden, dass identisch

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n,$$

und drückt φ und ψ, statt durch die x, durch diese Functionen aus, so ist immer:

$$(11.)\quad \begin{cases} (\varphi) = \Sigma_\mu F_\mu \dfrac{\partial\varphi}{\partial F_\mu}, \\ [\varphi, \psi] = \Sigma_\mu \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial F_\mu} \dfrac{\partial\psi}{\partial f_\mu} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial f_\mu} \dfrac{\partial\psi}{\partial F_\mu} \right). \end{cases}$$

Setzt man nun in diesen Gleichungen für φ und ψ irgend welche der Functionen f und F, so ergiebt sich aus der ersten Gleichung sofort:

$$(12.)\quad (f_i) = 0, \quad (F_i) = F_i;$$

aus der zweiten aber:

$$(13.)\quad [f_i, f_k] = 0, \quad [F_i, F_k] = 0, \quad [F_i, f_k] = 0,$$

und nur, wenn in der letzten Gleichung $i = k$ wird, hat man:

$$(14.)\quad [F_i, f_i] = 1.$$

Diese Gleichungen, denen sonach die Lösungen des *Pfaff*schen Problems zu genügen haben, führen auf folgendes Theorem:

Theorem 2.

Bei übrigens gleichen Bezeichnungen wie im ersten Theorem genügen die Functionen F, f, welche durch die identische Gleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n$$

bestimmt sind, folgenden $n(2n+1)$ Gleichungen:

$$[f_i, f_k] = 0, \quad [F_i, F_k] = 0, \quad [F_i, f_k] = 0, \quad [F_i, f_i] = 1,$$
$$(f_i) = 0, \quad (F_i) = F_i,$$

wo in den ersten drei Gleichungen i und k als ungleich vorausgesetzt werden.

Bezeichnet man also als Integrale des *Pfaff*schen Problems die n Gleichungen:

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad f_n = \alpha_n,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ willkürliche Constanten bedeuten, welche in den Functionen f nicht vorkommen, so hat man insbesondere das Theorem:

Theorem 3.

Diejenigen n Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$, welche, gleich willkürlichen Constanten gesetzt, die Integrale der Differentialgleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

bilden, sind durch folgende $\frac{n.n+1}{2}$ Gleichungen definirt:

$$(15.)\quad (f_i) = 0, \quad [f_i, f_k] = 0.$$

§. 2.

Andere Ableitung, nebst dem Beweise, dass die aufgestellten Gleichungen hinreichend sind.

Auf dem im Vorigen eingeschlagenen Wege gelangt man leicht zu $\frac{n.n+1}{2}$ Gleichungen, welchen die Functionen f *genügen* müssen. Hingegen scheint es sehr schwierig, in ähnlicher Weise den Nachweis zu führen, dass diese Gleichungen auch *hinreichen*, d. h. dass, sobald ein beliebiges System von Functionen gefunden ist, welches den Gleichungen (15.) genügt, sich immer die Functionen $F_1, F_2, \dots F_n$ so bestimmen lassen, dass die $2n$ Gleichungen (1.) gleichzeitig erfüllt werden. Man kann aber einen ganz anderen Weg einschlagen, um sowohl die Nothwendigkeit der Formeln (15.) als auch umgekehrt die Hinlänglichkeit dieser Gleichungen zu beweisen. Dieser Weg scheint mir um so merkwürdiger, als er die ganze Untersuchung von der Aufstellung einer einzigen identischen Gleichung abhängig macht, welche so gewissermassen den Kern für die hier gegebene Behandlungsweise des *Pfaff*schen Problems bildet. Dieser Weg ist folgender.

Die Gleichungen (1.), $2n$ an der Zahl, sind linear in Bezug auf die Functionen F. Man kann also aus je $n+1$ dieser Gleichungen jene Functionen eliminiren, und erhält, da dies auf

$$2n.2n-1.2n-2\dots n+2$$

Weisen geschehen kann, ebenso viel Gleichungen für die Functionen f, welche sämmtlich die Gestalt einer Determinante, gleich Null gesetzt, annehmen. Diese Gleichungen können jedenfalls als hinreichend zur Bestimmung der f angesehen werden, da man von ihnen in jedem Augenblick zu den Gleichungen (1.) zurückkehren kann. Alle diese Gleichungen aber lassen sich in eine einzige Determinante zusammenfassen, nämlich in die Gleichung:

$$(16.)\quad V=0=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{dx_1} & X_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1,n-1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & X_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_{2n}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{2n}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{2n}} & X_{2n} & \alpha_{2n,1} & \alpha_{2n,2} & \dots & \alpha_{2n,n-1} \end{vmatrix},$$

vorausgesetzt dass man annimmt, *der Ausdruck V solle verschwinden, welche Werthe man auch den Grössen α beilege.*

Die Gleichung (16.) kann also als hinreichend zur Bestimmung der Functionen f angesehen werden.

Ich multiplicire jetzt den Ausdruck V mit der Determinante der Grössen $\frac{D_{ik}}{D}$ oder $\frac{R_{ik}}{R}$, welche gleich $\frac{1}{D}$ oder gleich $\frac{1}{R^2}$ ist. Das entstehende Product kann man bekanntlich wieder als Determinante darstellen, und zwar, wenn man der Kürze wegen für den Augenblick die Bezeichnungen einführt:

$$(17.)\quad \begin{cases} \Sigma_i \frac{R_{ik}}{R}\frac{\partial f_h}{\partial x_i} = \varphi_{k,h}, \\ \Sigma_i \frac{R_{ik} X_i}{R} = Y_k, \\ \Sigma_i \frac{R_{ik}\alpha_{i,h}}{R} = \beta_{k,h}, \end{cases}$$

wird die resultirende Gleichung:

$$(18.)\quad 0 = \frac{V}{D} = \begin{vmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} & \dots & \varphi_{1,n} & Y_1 & \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{1,n-1} \\ \varphi_{2,1} & \varphi_{2,2} & \dots & \varphi_{2,n} & Y_2 & \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \dots & \beta_{2,n-1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \varphi_{2n,1} & \varphi_{2n,2} & \dots & \varphi_{2n,n} & Y_{2n} & \beta_{2n,1} & \beta_{2n,2} & \dots & \beta_{2n,n-1} \end{vmatrix}.$$

Ich werde dies jetzt mit V multipliciren und also den Ausdruck $\frac{V^2}{D}$ bilden. Das Product wird abermals eine Determinante, und zwar sind die Elemente derselben:

$$\Sigma_k \varphi_{k,h}\frac{\partial f_m}{\partial x_k} = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R}\frac{\partial f_h}{\partial x_i}\frac{\partial f_m}{\partial x_k} = [f_h, f_m] = -[f_m, f_h],$$

$$\Sigma_k \varphi_{k,h} X_k = -\Sigma_i \frac{\partial f_h}{\partial x_i} Y_i = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} X_k \frac{\partial f_h}{\partial x_i} = -(f_h),$$

$$\Sigma_k \varphi_{k,h}\alpha_{k,m} = -\Sigma_i \frac{\partial f_h}{\partial x_i}\beta_{i,m} = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R}\alpha_{k,m}\frac{\partial f_h}{\partial x_i} = -\gamma_{m,h},$$

$$\Sigma_k Y_k \alpha_{k,m} = -\Sigma_i X_i \beta_{i,m} = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} X_i \alpha_{k,m} = -\delta_m,$$

$$\Sigma_k \beta_{k,h}\alpha_{k,m} = \Sigma_k \Sigma_i \frac{R_{ik}}{R}\alpha_{i,h}\alpha_{k,m} = \varepsilon_{h,m} = -\varepsilon_{m,h};$$

man erhält also folgende identische Gleichung:

$$(19.)\ \frac{V^2}{D}=\begin{vmatrix}
0 & [f_2,f_1] & [f_3,f_1]\cdots & [f_n,f_1] & (f_1) & \gamma_{1,1} & \gamma_{2,1} & \cdots\gamma_{n-1,1}\\
-[f_2,f_1] & 0 & [f_3,f_2]\cdots & [f_n,f_2] & (f_2) & \gamma_{1,2} & \gamma_{2,2} & \cdots\gamma_{n-1,2}\\
-[f_3,f_1] & -[f_3,f_2] & 0\ \cdots & [f_n,f_3] & (f_3) & \gamma_{1,3} & \gamma_{2,3} & \cdots\gamma_{n-1,3}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
-[f_n,f_1] & -[f_n,f_2] & -[f_n,f_3]\cdots & 0 & (f_n) & \gamma_{1,n} & \gamma_{2,n} & \cdots\gamma_{n-1,n}\\
-(f_1) & -(f_2) & -(f_3)\ \cdots & -(f_n) & 0 & \delta_1 & \delta_2 & \cdots\delta_{n-1}\\
-\gamma_{1,1} & -\gamma_{1,2} & -\gamma_{1,3}\ \cdots & -\gamma_{1,n} & -\delta_1 & 0 & \varepsilon_{1,2} & \cdots\varepsilon_{1,n-1}\\
-\gamma_{2,1} & -\gamma_{2,2} & -\gamma_{2,3}\ \cdots & -\gamma_{2,n} & -\delta_2 & -\varepsilon_{1,2} & 0 & \cdots\varepsilon_{2,n-1}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
-\gamma_{n-1,1} & -\gamma_{n-1,2} & -\gamma_{n-1,3}\cdots & -\gamma_{n-1,n} & -\delta_{n-1} & -\varepsilon_{1,n-1} & -\varepsilon_{2,n-1} & \cdots\ 0
\end{vmatrix}.$$

In dieser Gleichung ist nun in der That der Beweis enthalten, sowohl dass die Gleichungen (15.) für die Functionen f bestehen müssen, als auch dass sie zur Definition derselben hinreichen. Das letztere namentlich sieht man sofort ein. Denn verschwinden sämmtliche Elemente $[f_i, f_k]$, (f_i), so werden $(n+1)^2$ Elemente der Determinante (19.) gleich Null, welche ein Quadrat bilden, und somit verschwindet die Determinante, welches auch die Werthe der Elemente γ, δ, ε oder der Grössen α sein mögen. Man hat somit immer $V=0$, und hierdurch ist das folgende Theorem nachgewiesen:

Theorem 4.

Wenn irgend n Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ so bestimmt werden, dass sie den Gleichungen

$$(f_i)=0,\qquad [f_i,f_k]=0$$

genügen, so kann man immer die n Functionen $F_1, F_2, \dots F_n$ so bestimmen, dass sie den $2n$ Gleichungen

$$X_1 = F_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+F_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\dots+F_n\frac{\partial f_n}{\partial x_1},$$

$$X_2 = F_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+F_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\dots+F_n\frac{\partial f_n}{\partial x_2},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$X_{2n} = F_1\frac{\partial f_1}{\partial x_{2n}}+F_2\frac{\partial f_2}{\partial x_{2n}}+\dots+F_n\frac{\partial f_n}{\partial x_{2n}}$$

gleichzeitig genügen, oder man kann die Gleichungen

$$f_1=\text{Const.},\quad f_2=\text{Const.},\quad \dots\quad f_n=\text{Const.}$$

als die Integrale der Differentialgleichung

$$X_1dx_1+X_2dx_2+\dots+X_{2n}dx_{2n} = 0$$

betrachten.

Aber auch die *Nothwendigkeit* der Gleichungen (15.) lässt sich unmittelbar aus der identischen Gleichung (19.) ableiten. Aus dieser Gleichung geht, indem man auf beiden Seiten, was immer auf rationale Weise geschehen kann, die Quadratwurzel zieht, die Gleichung hervor:

$$(20.)\qquad \frac{V}{R} = \Theta,$$

wo Θ den aus den Grössen $[f_i, f_k]$, (f_i), γ, δ, ε gebildeten rationalen Ausdruck bedeutet, dessen Quadrat die Determinante in (19.) ergiebt. Bestimmt man aber die $2n.n-1$ beliebigen Grössen α so, dass zuvörderst sämmtliche Grössen ε, deren Zahl $\frac{n.n-1}{2}$ ist, verschwinden, so wird jene Determinante eine homogene Function zweiter Ordnung der Grössen (f_i) und $[f_i, f_k]$, und Θ ist also eine lineare Function dieser Grössen. Wenn man daher Θ in die Form setzt:

$$\Theta = \eta_1(f_1)+\eta_2(f_2)+\cdots+\eta_n(f_n)+\zeta_{12}[f_1, f_2]+\zeta_{13}[f_1, f_3]+\cdots+\zeta_{n-1,n}[f_{n-1}, f_n],$$

so wird man vermöge der Willkürlichkeit der α auch noch den $\frac{n.n+1}{2}$ Grössen ζ, η alle möglichen Werthe beilegen dürfen, und die Gleichung $V=0$, welche die Gleichung $\Theta=0$ mit sich führt, bedingt also, da sie für alle Werthe der α bestehen soll, die Existenz der $\frac{n.n+1}{2}$ einzelnen Gleichungen

$$(f_i)=0,\qquad [f_i, f_k]=0.$$

Die Gleichung (20.) setzt uns also in Stand, aus einer linearen Combination der aus (1.) direct fliessenden Bedingungsgleichungen zu der Form (15.) und umgekehrt von dieser zu der ersteren zurückzukehren.

§. 3.

Directer Beweis der zwischen den Operationen (φ) und $[\varphi, \psi]$ bestehenden Beziehungen.

Wenn man ein System simultaner partieller Differentialgleichungen nach Art des Systems (15.) zu integriren hat, so wird man zunächst immer untersuchen, ob sich durch Differentiation aus dem gegebenen System neue Gleichungen ableiten lassen, welche ebenfalls nur *erste* Differentialquotienten enthalten; wodurch denn die Anzahl der Gleichungen des Systems vermehrt und die Integration derselben wesentlich erleichtert wird. Aber wenn man bei dem System (15.) dergleichen Operationen ausführt, welche neue Differentialgleichungen zu liefern geeignet sind, so findet man, dass das Resultat immer identisch verschwindet, und man gelangt zugleich zu dem directen Beweise der zwischen den Operationen (φ) und $[\varphi, \psi]$ eintretenden Beziehungen, welche ich zuerst in der ersten dieser Abhandlungen gegeben habe, und auf denen die Integration des Systems (15.) wesentlich beruht.

Man erhält nämlich sofort, wenn φ, ψ, χ ganz beliebige Functionen bedeuten:

$$\begin{aligned}
[[\varphi, \psi], \chi] &= \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial \chi}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\mu\nu}}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu}\right) \\
&= \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\mu\nu}}{R}\right) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \\
&+ \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{ik} R_{\mu\nu}}{R^2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_\nu} \\
&+ \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{ik} R_{\mu\nu}}{R^2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_\mu},
\end{aligned}$$

wo die Summe sich auf die vier Indices i, k, μ, ν bezieht. Vertauscht man nun cyclisch die Functionen φ, ψ, χ, und zugleich ebenso die Indices k, μ, ν, so erhält man folgende Gleichung:

$$[[\varphi, \psi], \chi] + [[\psi, \chi], \varphi] + [[\chi, \varphi], \psi]$$

$$(21.)\quad \left\{\begin{aligned}
&= \overset{(4)}{\Sigma} \frac{\partial \chi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \left\{ \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\mu\nu}}{R}\right) + \frac{R_{i\mu}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\nu k}}{R}\right) + \frac{R_{i\nu}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{k\mu}}{R}\right) \right\} \\
&+ \overset{(4)}{\Sigma} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_\mu} \cdot \frac{R_{ik} R_{\mu\nu} + R_{i\nu} R_{k\mu}}{R^2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \\
&+ \overset{(4)}{\Sigma} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_\nu} \cdot \frac{R_{i\mu} R_{\nu k} + R_{ik} R_{\mu\nu}}{R^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \chi}{\partial x_k} \\
&+ \overset{(4)}{\Sigma} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{R_{i\nu} R_{k\mu} + R_{i\mu} R_{\nu k}}{R^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}.
\end{aligned}\right.$$

Die drei letzten Summen verschwinden, da sie durch blosse Vertauschung der Indices ihr Vorzeichen ändern; die zweite Summe durch Vertauschung von i und μ, die dritte durch Vertauschung von i und ν, die vierte durch Vertauschung von i und k. Ferner werde ich weiter unten beweisen, dass die Grössen R, wie sie oben definirt wurden, immer den Gleichungen genügen:

$$(22.)\quad \Sigma_i \left\{ \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\mu\nu}}{R}\right) + \frac{R_{i\mu}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\nu k}}{R}\right) + \frac{R_{i\nu}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{k\mu}}{R}\right) \right\} = 0,$$

welches auch die Indices k, μ, ν sein mögen. Und dies vorausgesetzt ergiebt sich aus (21.) ohne Weiteres:

$$(23.)\qquad [[\varphi,\psi],\chi]+[[\psi,\chi],\varphi]+[[\chi,\varphi],\psi] = 0,$$

welches die eine der zu beweisenden Gleichungen ist.

Aber ich werde weiter unten auch beweisen, dass die Gleichungen (22.) nur erfüllt sein können, wenn die Grössen R die ihnen im Vorigen beigelegte Bedeutung haben, sobald man nur annimmt, dass $R_{ik} = -R_{ki}$, und dass die Determinante der Grössen $\frac{R_{ik}}{R}$ nicht verschwinden dürfe. Lässt man daher in den durch $[\varphi,\psi]$ bezeichneten Ausdrücken die Bedeutung der Coefficienten R vorläufig unbestimmt, nur so, dass ihre Determinante nicht verschwinde, und sucht umgekehrt die Bedingungen auf, unter welchen solche Ausdrücke $[\varphi,\psi]$ der Gleichung (23.) genügen können, oder die Bedingungen, unter welchen die rechte Seite der Gleichung (21.) allgemein verschwindet, so treten dabei zunächst die Bedingungen (22.) auf, welche die erste Summe (21.) verschwinden machen. Die Bedingung aber, dass auch die anderen Summen verschwinden, ist:

$$0 = R_{ik}.R_{\mu\nu}+R_{i\nu}.R_{k\mu}+R_{\mu k}.R_{i\nu}+R_{\mu\nu}.R_{ki},$$

oder

$$(R_{ik}+R_{ki})R_{\mu\nu}+(R_{k\mu}+R_{\mu k})R_{i\nu} = 0.$$

Setzt man hier $\mu = i$, so kommt:

$$(R_{ik}+R_{ki}).R_{i\nu} = 0;$$

und da nicht alle $R_{i\nu}$ mit einem beliebigen Index i verschwinden können, ohne dass die Determinante der R verschwindet (welcher Fall ausgenommen ist), so hat man allgemein:

$$R_{ik}+R_{ki} = 0.$$

Da nun nach dem unten zu erweisenden Theorem in Folge dieser Gleichung die Gleichung (22.) genügt, um den Grössen R die im Früheren festgestellte Bedeutung zu vindiciren, so erhält man folgendes Theorem:

Theorem 5.

Der Ausdruck

$$[\varphi,\psi] = \Sigma_i\Sigma_k \frac{R_{ik}}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}$$

genügt der identischen Gleichung

$$[[\varphi,\psi],\chi]+[[\psi,\chi],\varphi]+[[\chi,\varphi],\psi] = 0,$$

in welcher φ, χ, ψ ganz beliebige Functionen bedeuten, immer dann, *wenn die Grössen R sich aus n Functionen X so zusammensetzen, dass R die Quadratwurzel der aus den Grössen*

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

gebildeten Determinante, und R_{ik} den Differentialquotienten derselben nach a_{ik} bedeutet. Vorausgesetzt aber, dass die Determinante der R_{ik} nicht verschwinden soll, giebt es keine andere Bestimmungsweise dieser Coefficienten, bei welcher ebenfalls die obige Gleichung identisch erfüllt wäre.

Man sieht aus diesem Theorem, dass die identische Gleichung (22.) durch das *Pfaff*sche Problem gewissermassen erschöpft wird, indem dieselbe nur für solche Coefficienten R bestehen kann, welche mit demselben in unmittelbarer Beziehung stehen.

Betrachten wir ferner den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
[(\varphi), \psi] &= \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{R_{\mu\nu}}{R} X_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \right) \\
&= \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{R_{\mu\nu}}{R} \right) \cdot X_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \\
&\quad + \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{ik} R_{\mu\nu}}{R^2} \cdot \frac{\partial X_\mu}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \\
&\quad + \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{ik} R_{\mu\nu} X_\mu}{R^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_\nu}.
\end{aligned}$$

Indem man in der zweiten Summe i mit μ, in der dritten i mit ν vertauscht, geht dies über in:

$$\begin{aligned}
[(\varphi), \psi] &= \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{R_{\mu\nu}}{R} \right) \cdot X_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} \overset{(4)}{\Sigma} \left\{ \frac{R_{ik} R_{\mu\nu}}{R^2} \cdot \frac{\partial X_\mu}{\partial x_i} + \frac{R_{\mu k} R_{i\nu}}{R^2} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial x_\mu} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \\
&\quad + \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{\nu k} R_{\mu i} X_\mu}{R^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_\nu}.
\end{aligned}$$

Zieht man nun hiervon denjenigen Ausdruck ab, welchen man durch Vertauschung von φ mit ψ und von k mit ν aus dem vorliegenden erhält, so kommt:

$$\begin{aligned}
[(\varphi), \psi] - [(\psi), \varphi] &= \overset{(4)}{\Sigma} \left\{ \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{R_{\mu\nu}}{R} \right) - \frac{R_{i\nu}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{R_{\mu k}}{R} \right) \right\} X_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{ik} R_{\mu\nu} - R_{\mu k} R_{i\nu}}{R^2} \left(\frac{\partial X_\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_\mu} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \\
&\quad + \overset{(4)}{\Sigma} \frac{R_{\nu k} R_{\mu i} X_\mu}{R^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \right).
\end{aligned}$$

Die letzte Summe lässt sich auch unter der Form darstellen:

$$\overset{(4)}{\Sigma}\frac{R_{\mu i}X_\mu}{R}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\nu k}}{R}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\right)-\overset{(4)}{\Sigma}\frac{R_{\mu i}X_\mu}{R}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\nu k}}{R}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu},$$

deren erster Theil nichts Anderes ist als $([\varphi,\psi])$; und führt man dies ein, so nimmt die vorliegende Gleichung die Gestalt an:

$$(24.)\quad\left\{\begin{aligned}&[(\varphi),\psi]-[(\psi),\varphi]-([\varphi,\psi])\\ &=\overset{(4)}{\Sigma}\left\{\frac{R_{ik}}{R}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\mu\nu}}{R}\right)+\frac{R_{i\nu}}{R}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{k\mu}}{R}\right)+\frac{R_{i\mu}}{R}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\nu k}}{R}\right)\right\}X_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\\ &+\tfrac{1}{2}\overset{(4)}{\Sigma}\frac{R_{ik}R_{\mu\nu}-R_{\mu k}R_{i\nu}}{R^2}\left(\frac{\partial X_\mu}{\partial x_i}-\frac{\partial X_i}{\partial x_\mu}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}.\end{aligned}\right.$$

Hier ist aber der eingeklammerte Coefficient der ersten Summe der nach (22.) verschwindende Ausdruck; somit verschwindet die erste Summe vollständig. Ferner ist

$$\frac{\partial X_\mu}{\partial x_i}-\frac{\partial X_i}{\partial x_\mu}=a_{\mu i},$$

und daher

$$\Sigma_\mu\Sigma_i(R_{ik}R_{\mu\nu}-R_{\mu k}R_{i\nu})a_{\mu i}=R.R_{\nu k}-R.R_{k\nu}=2R.R_{\nu k},$$

also die zweite Summe in (24.) gleich

$$\Sigma_\nu\Sigma_k\frac{R_{\nu k}}{R}.\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}=[\varphi,\psi].$$

Und so reducirt sich (24.) auf die zweite der in der angeführten Abhandlung aufgestellten Identitäten:

$$[(\varphi),\psi]-[(\psi),\varphi]=([\varphi,\psi])+[\varphi,\psi].$$

Diese Gleichung beschränkt sich zwar, wenn die Ausdrücke (φ), $[\varphi,\psi]$ als beliebig vorausgesetzt werden, keineswegs auf die vorliegenden Formen. Aber wenn man annimmt, dass zugleich die Gleichung (23.) bestehen soll, so ist dies in der That nur für die vorliegenden Formen möglich. Nehmen wir (φ) vorläufig in der willkürlichen Form

$$(\varphi)=C_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+C_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+C_{2n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2n}}$$

an, so kann man, da die Determinante der R nicht verschwinden soll, immer solche n Functionen Y bestimmen, dass

$$C_k=\Sigma_i\frac{R_{ik}}{R}Y_i.$$

Alsdann unterscheidet sich die betrachtete Form φ von der früheren nur noch dadurch, dass an Stelle der zur Bildung der R (nach Theorem 5.) zu benutzenden Functionen X vorläufig in der Form (φ) neben den R_{ik} andere Functionen Y auftreten. Bildet man nun den Ausdruck

$$[(\varphi), \psi] - [(\psi), \varphi] - ([\varphi, \psi]),$$

so nimmt er genau den in (24.) gegebenen Ausdruck an, nur dass für

$$X_\mu \quad \text{und} \quad \frac{\partial X_\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_\mu}$$

zu setzen ist:

$$Y_\mu \quad \text{und} \quad \frac{\partial Y_\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial Y_i}{\partial x_\mu}.$$

So verschwindet also die erste Summe in (24.) noch immer; und damit die zweite, wie die vorgelegte identische Gleichung verlangt, sich auf $[\varphi, \psi]$ reducire, hat man die Bedingung:

$$\Sigma_\mu \Sigma_i (R_{ik} R_{\mu\nu} - R_{\mu k} R_{i\nu}) \left(\frac{\partial Y_\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial Y_i}{\partial x_\mu} \right) = 2R.R_{\nu k}.$$

Multiplicirt man dies mit a_{hk} und summirt nach k, so erhält man links

$$R.\Sigma_\mu R_{\mu\nu} \left(\frac{\partial Y_\mu}{\partial x_h} - \frac{\partial Y_h}{\partial x_\mu} \right) - R.\Sigma_i R_{i\nu} \left(\frac{\partial Y_h}{\partial x_i} - \frac{\partial Y_i}{\partial x_h} \right) = 2R.\Sigma_\mu R_{\mu\nu} \left(\frac{\partial Y_\mu}{\partial x_h} - \frac{\partial Y_h}{\partial x_\mu} \right),$$

und rechts $2R^2$ oder 0, jenachdem ν und h gleich oder verschieden sind. Man hat also

$$\Sigma_\mu R_{\mu h} \left(\frac{\partial Y_\mu}{\partial x_h} - \frac{\partial Y_h}{\partial x_\mu} \right) = R,$$

$$\Sigma_\mu R_{\mu\nu} \left(\frac{\partial Y_\mu}{\partial x_h} - \frac{\partial Y_h}{\partial x_\mu} \right) = 0,$$

wo in der letzten Gleichung h und ν verschieden sind. Aus diesen Gleichungen aber ergiebt sich durch Auflösung sofort:

$$\frac{\partial Y_\mu}{\partial x_h} - \frac{\partial Y_h}{\partial x_\mu} = a_{\mu h} = \frac{\partial X_\mu}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_\mu}.$$

Diese Gleichung stellt nichts Anderes vor, als die Bedingungen dafür, dass der Ausdruck

$$(Y_1 - X_1)\, dx_1 + (Y_2 - X_2)\, dx_2 + \cdots + (Y_{2n} - X_{2n})\, dx_{2n}$$

ein vollständiges Differential ist. Man kann also setzen:

$$Y_1 = X_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1},$$

$$Y_2 = X_2 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_2},$$

$$\cdots\cdots$$

wo Ω eine unbestimmte Function ist. Setzen wir diese Werthe in (φ) ein, so zerfällt der entstehende Ausdruck in die Summe zweier Terme, deren einer genau das früher durch (φ) bezeichnete Aggregat wird, während der andere nach den angewandten Bezeichnungen $[\Omega, \varphi]$ ist. Verstehen wir also jetzt wieder unter (φ) den aus den X gebildeten Ausdruck, so geht die mit Benutzung der Y durch

$$[(\varphi), \psi]-[(\psi), \varphi] = ([\varphi, \psi])+[\varphi, \psi]$$

dargestellte Beziehung über in

$$[(\varphi)+[\Omega, \varphi], \psi]-[(\psi)+[\Omega, \psi], \varphi] = ([\varphi, \psi])+[\Omega, [\varphi, \psi]].$$

Aber hier verschwinden die mit Ω behafteten Terme zusammen wegen der ersten der behandelten Identitäten; und man sieht daraus, dass die Function Ω, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, gleich Null gesetzt werden darf, so dass die Y mit den X zusammenfallen. Dies giebt sonach folgendes Theorem:

Theorem 6.

Die beiden Ausdrücke

$$(\varphi) = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k},$$

$$[\varphi, \psi] = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$$

genügen ausser der identischen Gleichung

$$[[\varphi, \psi], \chi]+[[\psi, \chi], \varphi]+[[\chi, \varphi], \psi] = 0$$

auch noch der zweiten:

$$[(\varphi), \psi]-[(\psi), \varphi] = ([\varphi, \psi])+[\varphi, \psi],$$

sobald R die Quadratwurzel der aus den Grössen

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

gebildeten Determinante, und R_{ik} den Differentialquotienten von R nach a_{ik} bedeutet; und es giebt keine andere den Coefficienten der Ausdrücke (φ), $[\varphi, \psi]$ beizulegende Bedeutung, für welche jene identischen Gleichungen ebenfalls beständen, vorausgesetzt, dass die Determinante der R_{ik} nicht verschwinden darf.

§. 4.

Beweis des im Vorigen benutzten Satzes über die Grössen R_{ik}.

Es ist noch übrig, den Beweis des Satzes nachzutragen, auf welchem die Betrachtungen des vorigen §. wesentlich beruhen, und welcher sich folgendermassen aussprechen lässt:

Theorem 7.

Bedeuten $X_1, X_2, \ldots X_{2n}$ beliebige Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$, welche der einzigen Bedingung genügen, dass die aus den Grössen

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

gebildete Determinante nicht verschwindet; ist ferner R die Quadratwurzel dieser Determinante, und R_{ik} der Differentialquotient von R nach a_{ik}, so ist für jeden Werth der Indices k, λ, μ immer

$$0 = \Sigma_i \left\{ \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\lambda\mu}}{R}\right) + \frac{R_{i\lambda}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\mu k}}{R}\right) + \frac{R_{i\mu}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{k\lambda}}{R}\right) \right\}.$$

Und umgekehrt, wenn man die Grössen $a_{ik} = -a_{ki}$, aus welchen die Grössen R_{ik} sich auf die angegebene Weise zusammensetzen, übrigens beliebig lässt und sie nur zwingt der Bedingung

$$0 = \Sigma_i \left\{ \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\lambda\mu}}{R}\right) + \frac{R_{i\lambda}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{\mu k}}{R}\right) + \frac{R_{i\mu}}{R} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R_{k\lambda}}{R}\right) \right\}$$

für alle Werthe von k, λ, μ zu genügen, so kann dies nicht anders geschehen, als indem man $2n$ Functionen X annimmt, mit Hülfe deren sich die a_{ik} durch die Gleichung

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

bestimmen.

Um den ersten Theil dieses Theorems zu beweisen, ist es nur nöthig, die zu beweisende Gleichung zu entwickeln. Dieselbe nimmt eine einfachere Gestalt an, wenn man den bekannten Satz

$$D \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial a_{k\lambda} \partial a_{\varrho\sigma}} = \frac{\partial D}{\partial a_{k\lambda}} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_{\varrho\sigma}} - \frac{\partial D}{\partial a_{k\sigma}} \cdot \frac{\partial D}{\partial a_{\varrho\lambda}}$$

benutzt, in welchem D die Determinante bedeuten soll, deren Quadratwurzel R ist. Aus derselben folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial D}{D \partial a_{k\lambda}} = \Sigma_\varrho \Sigma_\sigma \frac{\frac{\partial D}{\partial a_{k\sigma}} \frac{\partial D}{\partial a_{\varrho\lambda}}}{D^2} \cdot \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_i},$$

oder, da

$$\frac{\frac{\partial D}{\partial a_{k\lambda}}}{D} = \frac{R_{k\lambda}}{R},$$

auch:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{R_{k\lambda}}{R} = \Sigma_\varrho \Sigma_\sigma \frac{R_{k\sigma} R_{\varrho\lambda}}{R^2} \cdot \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_i}.$$

Führt man dies in die zu beweisende Gleichung ein, so nimmt dieselbe die Form an:

$$0 = \Sigma_i \Sigma_\varrho \Sigma_\sigma \frac{R_{k\sigma}R_{\varrho\lambda}R_{i\mu}+R_{\lambda\sigma}R_{\varrho\mu}R_{ik}+R_{\mu\sigma}R_{\varrho k}R_{i\lambda}}{R^3}\cdot\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_i}.$$

Vertauschen wir in der dreifachen Summe nun die Indices i, ϱ, σ cyclisch, so bleibt der Zähler des ersten Factors ungeändert, indem nur immer jedes Glied desselben in das folgende übergeht. An Stelle der obigen Gleichung kann man daher auch die folgende setzen:

$$(25.)\qquad 0 = \Sigma_i \Sigma_\varrho \Sigma_\sigma \frac{R_{k\sigma}R_{\lambda\varrho}R_{\mu i}}{R^3}\left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial x_i}+\frac{\partial a_{\sigma i}}{\partial x_\varrho}+\frac{\partial a_{i\varrho}}{\partial x_\sigma}\right).$$

Da nun die eingeklammerte Grösse identisch verschwindet, wenn man den a_{ik} die Bedeutung

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

beilegt, so ist (25.) durch diese Annahme identisch erfüllt, und also der erste Theil des Theorems bewiesen.

Um auch den zweiten zu erweisen, bemerke man nur, dass bei Ableitung der Gleichung (25.) keine andere Eigenschaft der a_{ik} benutzt ist, als dass $a_{ik}+a_{ki}=0$. Man kann also ganz allgemein statt der vorgelegten Gleichung die Gleichung (25.) zum Ausgangspunkt nehmen, um die a_{ik} in geeigneter Weise zu bestimmen. Multiplicirt man aber diese Gleichung mit

$$a_{\alpha\sigma}\,.\,a_{\beta\varrho}\,.\,a_{\gamma i}$$

und summirt nach σ, ϱ, i, so erhält man sogleich:

$$(26.)\qquad \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial a_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} = 0,$$

und zwar muss diese Gleichung für alle Werthe von α, β, γ erfüllt sein.

Nun kann man offenbar immer $2n$ Functionen Y so bestimmen, dass

$$(27.)\qquad a_{1\gamma} = \frac{\partial Y_1}{\partial x_\gamma}-\frac{\partial Y_\gamma}{\partial x_1}.$$

Setzt man in (26.) sodann $\alpha=1$, $\beta=2$, und den Werth von $a_{1\gamma}$ aus (27.) ein, so erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{a_{2\gamma}-\frac{\partial Y_2}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial Y_\gamma}{\partial x_2}\right\} = 0.$$

Man kann also immer die Grössen $a_{2\gamma}$, wo $\gamma=2, 3, \ldots 2n$, durch die Gleichung

$$(28.)\qquad a_{2\gamma} = \frac{\partial Y_2}{\partial x_\gamma}-\frac{\partial Y_\gamma}{\partial x_2}+\frac{\partial Y_2'}{\partial x_\gamma}-\frac{\partial Y_\gamma'}{\partial x_2}$$

darstellen, wo die Y' ganz beliebige Grössen bedeuten, die aber von x_1 unabhängig sind; wodurch denn die $2n-1$ Grössen

$$\frac{\partial Y'_2}{\partial x_\gamma}-\frac{\partial Y'_\gamma}{\partial x_2}$$

ganz beliebige Werthe darstellen, welche nur von x_1 frei sind.

Durch die Gleichungen (27.), (28.) werden alle Gleichungen (26.) erfüllt, in welchen zwei Indices 1 und 2 werden, und zwar erfüllt auf die allgemeinste Weise. Betrachtet man nun diejenigen Gleichungen (26.), welche die Indices $\alpha=1$, $\beta=3$ oder $\alpha=2$, $\beta=3$ enthalten, und in denen $\gamma=4, 5, \dots$ sein kann. Mit Hülfe der Gleichungen (27.), (28.) nehmen diese Gleichungen die Gestalt an:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{a_{3\gamma}-\frac{\partial Y_3}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial Y_\gamma}{\partial x_3}\right\} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{a_{3\gamma}-\frac{\partial (Y_3+Y'_3)}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial (Y_\gamma+Y'_\gamma)}{\partial x_3}\right\} = 0.$$

Diese Gleichungen werden auf die allgemeinste Weise erfüllt durch die Annahme:

$$a_{3\gamma} = \frac{\partial Y_3}{\partial x_\gamma}-\frac{\partial Y_\gamma}{\partial x_3}+\frac{\partial Y'_3}{\partial x_\gamma}-\frac{\partial Y'_\gamma}{\partial x_3}+\frac{\partial Y''_3}{\partial x_\gamma}-\frac{\partial Y''_\gamma}{\partial x_3},$$

wobei die Grössen

$$Y''_3, \quad Y''_4, \quad \dots \quad Y''_{2n}$$

weder x_1 noch x_2 enthalten.

Indem man auf diese Weise fortschreitet, gelangt man zu der allgemeinen Gleichung:

$$a_{i\gamma} = \frac{\partial (Y_i+Y'_i+\dots+Y_i^{(i-1)})}{\partial x_\gamma}-\frac{\partial (Y_\gamma+Y'_\gamma+\dots+Y_\gamma^{(i-1)})}{\partial x_i},$$

in welcher γ eine der Zahlen $i+1$, $i+2$, ... $2n$ bedeutet, und wo die Grössen Y'_i, Y'_γ von x_1, die Grössen Y''_i, Y''_γ von x_1, x_2, ... die Grössen $Y_i^{(i-1)}$, $Y_\gamma^{(i-1)}$ von x_1, x_2, ... x_{i-1} frei sind. Man darf daher sofort an Stelle dieser Gleichung auch setzen:

$$a_{i\gamma} = \frac{\partial (Y_i+Y'_i+\dots+Y_i^{(i-1)})}{\partial x_\gamma}-\frac{\partial (Y_\gamma+Y'_\gamma+\dots+Y_\gamma^{(\gamma-1)})}{\partial x_i},$$

da die hinzugefügten Terme bei der Differentiation verschwinden. Setzt man nun

$$X_i = Y_i+Y'_i+\dots+Y_i^{(i-1)},$$

so hat man ganz allgemein:

$$a_{i\gamma} = \frac{\partial X_i}{\partial x_\gamma}-\frac{\partial X_\gamma}{\partial x_i},$$

was zu beweisen war.

§. 5.

Ueber einige Folgerungen, welche sich aus der in §. 2 abgeleiteten identischen Gleichung ableiten lassen, wenn man derselben ihre allgemeinste Form giebt.

Die Ableitung der identischen Gleichung (19.) giebt zu einer Bemerkung Veranlassung, welche auf den ersten Anblick überraschend scheint. Denn man sieht sofort, dass dieselbe identische Gleichung auch noch besteht, *wenn man statt der a_{ik} irgend welche Grössen setzt, die nur der Bedingung $a_{ik}+a_{ki}=0$ genügen, und deren Determinante nicht verschwindet.* Man kann sogar diese Betrachtung noch dahin verallgemeinern, dass man an Stelle der a_{ik} *ganz beliebige* Grössen treten lässt, deren Determinante nicht verschwindet. Bezeichnet man durch D noch ihre Determinante und durch D_{ik} den Differentialquotienten derselben nach a_{ik}, so geht mit der Gleichung (19.) nur die wesentliche Veränderung vor, dass auf der rechten Seite an Stelle der Elemente

$$\begin{array}{ccccc}
0 & [f_1,f_2] & \dots & [f_1,f_n] & (f_1) \\
-[f_1,f_2] & 0 & \dots & [f_2,f_n] & (f_2) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-[f_1,f_n] & -[f_2,f_n] & \dots & 0 & (f_n) \\
-(f_1) & -(f_2) & \dots & -(f_n) & 0
\end{array}$$

die folgenden treten:

$$\begin{array}{ccccc}
[f_1,f_1] & [f_1,f_2] & \dots & [f_1,f_n] & (f_1,X) \\
[f_2,f_1] & [f_2,f_2] & \dots & [f_2,f_n] & (f_2,X) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
[f_n,f_1] & [f_n,f_2] & \dots & [f_n,f_n] & (f_n,X) \\
(X,f_1) & (X,f_2) & \dots & (X,f_n) & (X,X);
\end{array}$$

wobei für den Augenblick die Grössen

$$[f_i,f_k],\quad (f_i,X),\quad (X,f_k),\quad (X,X)$$

die Bedeutungen haben:

$$[f_i,f_k] = \Sigma_\mu \Sigma_\nu \frac{D_{\mu\nu}}{D} \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial f_k}{\partial x_\nu},$$

$$(X,f_k) = \Sigma_\mu \Sigma_\nu \frac{D_{\mu\nu}}{D} X_i \frac{\partial f_k}{\partial x_\nu},$$

$$(f_i,X) = \Sigma_\mu \Sigma_\nu \frac{D_{\mu\nu}}{D} \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} X_\nu,$$

$$(X,X) = \Sigma_\mu \Sigma_\nu \frac{D_{\mu\nu}}{D} X_\mu X_\nu.$$

Offenbar verschwindet V dann noch immer für sämmtliche Werthe der α, sobald alle diese Elemente verschwinden, und man hat sonach, da, falls die a_{ik} ganz beliebig waren, auch die Grössen $\frac{D_{ik}}{D} = b_{ik}$ ganz beliebig angenommen werden können, den Satz:

Theorem 8.

Bedeuten die $(2n)^2$ Grössen b_{ik} ganz beliebige Functionen von x_1, x_2, ... x_{2n}, welche der einzigen Bedingung

$$\Sigma_\mu \Sigma_\nu b_{\mu\nu} X_\mu X_\nu = 0$$

genügen, und deren Determinante nicht verschwindet; und kann man ferner n Functionen f_1, f_2, ... f_n so bestimmen, dass gleichzeitig den $n(n+2)$ Gleichungen

$$\Sigma_\mu \Sigma_\nu b_{\mu\nu} X_\mu \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu} = 0,$$

$$\Sigma_\mu \Sigma_\nu b_{\mu\nu} X_\nu \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} = 0,$$

$$\Sigma_\mu \Sigma_\nu b_{\mu\nu} \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial f_k}{\partial x_\nu} = 0$$

Genüge geschieht, so sind immer die Gleichungen

$$f_1 = \text{Const.}, \quad f_2 = \text{Const.}, \quad ... \quad f_n = \text{Const.}$$

ein System von Integralen des Pfaffschen Problems, d. h. es giebt immer solche Multiplicatoren F_1, F_2, ... F_n, dass identisch:

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n.$$

Dieses Theorem enthält die Gleichungen (15.) als speciellen Fall in sich, und scheint sonach eine sehr viel allgemeinere Auflösungsmethode des *Pfaff*schen Problems in sich zu bergen als die in jenen Gleichungen enthaltene. Ja, da die Anzahl der Gleichungen des vorliegenden Theorems im Allgemeinen viel grösser ist als die der Gleichungen (15.), so würde eine andere Bestimmungsweise der b sogar eine leichtere und niedrigere Integrationen fordernde Methode ergeben. Aber der Werth dieser Bemerkung wird sofort durch die andere wieder aufgehoben, dass es höchst wahrscheinlich keine andere Bestimmungsweise der b giebt, ausser der in den Formeln (15.) enthaltenen, zu welcher man gelangen könnte, ohne schwierige Integrationen ausgeführt zu haben, oder selbst ohne vorherige Lösung des *Pfaff*schen Problems. Denn freilich, wenn man irgend eine Lösung dieses Problems kennt, lassen sich derselben gemäss die b noch auf unendlich viele

Arten so bestimmen, dass die Gleichungen des Theorems für das gefundene System von Integralen erfüllt werden. Auf der anderen Seite kann man, indem man wiederholt Combinationen der Gleichungen des Theorems bildet, ähnlich wie in §. 3, welche nur die *ersten* Differentialquotienten der Functionen f enthalten, zu Differentialgleichungen gelangen, denen die Grössen b nothwendig genügen müssen, falls die Gleichungen des Theorems neben einander bestehen sollen. Aber es ist durchaus nicht zu vermuthen, dass man *im Allgemeinen,* ohne über die Functionen X besondere Voraussetzungen zu machen, auch nur particulare Lösungen dieser Gleichungen auffinden sollte, diejenigen ausgenommen, welche den Gleichungen (15.) entsprechen. Damit ist freilich nicht ausgeschlossen, dass nicht *bei besonderen Annahmen* der X solche Systeme von Grössen b vielleicht gefunden, und damit eine ganz andere Integrationsmethode des *Pfaff*schen Problems angebahnt werden könnte, welche dann allerdings nur auf die betreffenden speciellen Formen anwendbar wäre.

§. 6.

Ueber den Multiplicator und das letzte Integral des *Pfaff*schen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.

In der erwähnten Abhandlung habe ich von dem Nutzen gesprochen, welcher von den in §. 3. bewiesenen Identitäten für die Integration der Gleichung

$$(\varphi) = 0,$$

oder für die Integration des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_{2n} = \Sigma_i R_{i1} X_i : \Sigma_i R_{i2} X_i : \ldots : \Sigma_i R_{i,2n} X_i$$

gezogen werden kann, sobald drei oder selbst nur zwei Integrale dieses Systems gefunden sind. Ich werde den dort angegebenen Sätzen bei dieser Gelegenheit einige weitere hinzufügen.

Führt man eine Hülfsveränderliche t so ein, dass das eben angegebene System in die Gestalt übergeht:

$$(29.)\qquad dt : dx_1 : dx_2 \ldots = R : \Sigma_i R_{i1} X_i : \Sigma_i R_{i2} X_i \ldots,$$

so hat *Jacobi* (dieses Journal Bd. 29, p. 238) gezeigt, dass die allgemeine Gleichung des letzten Multiplicators die Gestalt annimmt:

$$R \frac{\partial M}{\partial t} + \Sigma_i \Sigma_k R_{ik} X_i \frac{\partial M}{\partial x_k} + nRM = 0,$$

oder, nach der im Vorigen angewandten Bezeichnung:

$$(30.)\qquad \frac{\partial M}{\partial t} + nM + (M) = 0.$$

Nimmt man an, dass M von den Grössen $x_1, x_2, \dots x_{2n}$ unabhängig sei, so findet sich hieraus der von *Jacobi* angegebene Multiplicator

$$M = e^{-nt}.$$

Wenn man hingegen einen Multiplicator aufsucht, welcher zwar $x_1, x_2, \dots x_{2n}$, nicht aber t enthält, so ist derselbe durch die Gleichung

$$(M) + nM = 0,$$

oder auch, indem man mit $\frac{1}{n} \cdot M^{\frac{1}{n}-1}$ multiplicirt, durch die Gleichung

$$(31.)\qquad \left(M^{\frac{1}{n}}\right) + M^{\frac{1}{n}} = 0.$$

gegeben.

Sind nun φ, ψ irgend zwei Functionen, welche die Gleichungen

$$(\varphi) = 0, \qquad (\psi) = 0$$

befriedigen, oder sind

$$\varphi = \text{Const.}, \qquad \psi = \text{Const.}$$

irgend zwei von t freie Integrale des Systems (29.), so hat man in Folge der allgemeinen identischen Gleichung

$$[(\varphi), \psi] - [(\psi), \varphi] = ([\varphi, \psi]) + [\varphi, \psi]$$

auch immer:

$$([\varphi, \psi]) + [\varphi, \psi] = 0.$$

Vergleicht man dies mit (31.), so kann man offenbar immer setzen:

$$(32.)\qquad M^{\frac{1}{n}} = [\varphi, \psi], \qquad M = \{[\varphi, \psi]\}^n,$$

und man erhält so den Satz:

Theorem 9.

Sind $\varphi = Const.$, $\psi = Const.$ irgend zwei von t freie Integrale des Systems

$$\frac{dx_k}{dt} = \Sigma_i \frac{R_{ik}}{R} X_i,$$

auf welche das Pfaffsche Problem zunächst führt, so ist immer

$$\{[\varphi, \psi]\}^n = \left\{ \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right\}^n$$

ein Multiplicator des Systems.

Aber der Quotient zweier Multiplicatoren ist immer, einer Constanten gleich gesetzt, ein neues Integral. Vergleicht man also den soeben gefundenen Multiplicator mit dem von *Jacobi* aufgestellten $M = e^{-nt}$, so findet sich das Integral

$$C.e^{-nt} = [\varphi, \psi]^n,$$

oder

$$\tau - t = \log[\varphi, \psi].$$

Dieses ist offenbar das *letzte* Integral des Systems, von welchem *Jacobi* bereits nachgewiesen hat, dass es nach Aufstellung *sämmtlicher* Integrale durch blosse Differentiation ermittelt werden könne. Aber hier zeigt sich, dass es zur Aufstellung dieses letzten Integrals nur *zweier* gefundenen bedarf; aus welchen dasselbe direct gebildet werden kann, während die übrigen nur successive aus einander abgeleitet werden können. Uebrigens erhellt der Satz, welchen ich in der angeführten Abhandlung bewiesen habe, dass man aus *drei* Integralen alle übrigen leicht ableiten könne, aus der obigen Formel sofort. Denn ist $\chi = \text{Const.}$ ein drittes Integral, so wird auch

$$\tau' - t = \log[\varphi, \chi],$$

wo τ' eine neue Constante bedeutet. Durch Elimination von t also folgt

$$\tau - \tau' = \log[\varphi, \psi] - \log[\varphi, \chi] \quad \text{oder}$$

$$\frac{[\varphi, \psi]}{[\varphi, \chi]} = \text{Const.},$$

was der dort bewiesene Satz ist.

Man kann nach dem Obigen folgendes Theorem aufstellen:

Theorem 10.

Sind $\varphi = \text{Const.}$, $\psi = \text{Const.}$ irgend zwei von t unabhängige Integrale des Systems

$$\frac{dx_k}{dt} = \Sigma_i \frac{R_{ik}}{R} X_i,$$

so ist immer das letzte Integral dieses Systems:

$$\tau - t = \log[\varphi, \psi],$$

welches somit nach Auffindung zweier Integrale unmittelbar angegeben werden kann.

§. 7.

Hülfssatz zur Integration der aufgestellten simultanen partiellen Differentialgleichungen.

Die Auflösung des *Pfaff*schen Problems lässt sich unmittelbar an die Gleichungen (15.) knüpfen, mit Hülfe der beiden die Operationen (φ), $[\varphi, \psi]$ betreffenden identischen Gleichungen, welche in §. 3. bewiesen sind.

Die n Functionen f müssen dem Obigen gemäss folgenden $\frac{n.n+1}{2}$ Gleichungen genügen:

$$\begin{array}{lllll}
(f_1) = 0, & & & & \\
(f_2) = 0, & [f_1, f_2] = 0, & & & \\
(f_3) = 0, & [f_1, f_3] = 0, & [f_2, f_3] = 0, & & \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \\
(f_n) = 0, & [f_1, f_n] = 0, & [f_2, f_n] = 0, & \ldots & [f_{n-1}, f_n] = 0.
\end{array}$$

Man wird also die Function f_1 aus *einer* Gleichung zu bestimmen haben; die Function f_2 wird sodann *zwei* simultanen Gleichungen zu genügen haben, die Function f_3 *dreien*, u. s. w.

Zur Bestimmung von f_1 bedarf man demnach eines Integrals von einem System von $2n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Function f_2 aber führt auf zwei simultane Differentialgleichungen. Eliminirt man aus beiden etwa einmal $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, das andere Mal $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$, so gelangt man zu zwei simultanen Differentialgleichungen, deren jede nur $2n-1$ Veränderliche enthält, nach denen differentiirt wird, während immer eine der Veränderlichen als constant betrachtet werden kann. Aber jede dieser Differentialgleichungen wird auch noch erfüllt durch $f_2=f_1$; mithin lässt sich, indem man f_1 als Veränderliche einführt, jede der Differentialgleichungen auf eine mit nur $2n-2$ Veränderlichen zurückführen. Nach der in der angeführten Abhandlung von mir aus einander gesetzten Methode steht zu vermuthen, dass die simultane Integration dieser beiden Gleichungen nur die Kenntniss je eines Integrals von zwei Systemen von $2n-3$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung erfordert.

Ebenso führt die Function f_3 auf drei simultane partielle Differentialgleichungen. Drückt man aus denselben etwa $\frac{\partial f_3}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f_3}{\partial x_3}$ durch die übrigen Differentialquotienten aus, so erhält man drei Gleichungen mit je $2n-2$ Veränderlichen; und da diese ausserdem noch durch $f_3=f_1$, $f_3=f_2$ erfüllt werden, so lässt sich die Anzahl der Veränderlichen noch in jeder Gleichung um zwei erniedrigen. Man hat also drei Gleichungen mit je $2n-4$ Veränderlichen; und nach der angeführten Methode ist zu vermuthen, dass die simultane Integration die Kenntniss je eines Integrals von drei Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen mit je $2n-4$ Veränderlichen verlangt.

Allgemein führt so die Function f_i auf i simultane Gleichungen mit je $2n-i+2$ Veränderlichen, deren Integration, wie zu vermuthen ist, durch Kenntniss je eines Integrals von i Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen mit je $2n-2i+2$ Veränderlichen vermittelt wird.

Dies Verfahren aber lässt sich noch allgemeiner darstellen, wobei denn zugleich das für die Integration anzuwendende Verfahren auf einfache Weise hervortritt. Ich werde dasselbe an dem System aus einander setzen, welches zur Auffindung der Function f_i führt. Dies System besteht aus folgenden i Gleichungen:

$$(33.)\quad (\varphi)=0,\quad [f_1,\varphi]=0,\quad [f_2,\varphi]=0,\ \dots\ [f_{i-1},\varphi]=0.$$

An Stelle dieser i Gleichungen werde ich i andere setzen, welche lineare Combinationen derselben sind. Seien zu diesem Ende $\Omega_1, \Omega_2, \dots \Omega_i$ ganz beliebige Functionen, und bestimmen wir i Differentialausdrücke

$$(\varphi)_1,\quad (\varphi)_2,\ \dots\ (\varphi)_i$$

aus folgenden linearen Gleichungen:

$$(34.)\quad \left\{\begin{array}{rcl} (\varphi) & = & (\Omega_1)(\varphi)_1+(\Omega_2)(\varphi)_2+\dots+(\Omega_i)(\varphi)_i,\\ [f_1,\varphi] & = & [f_1,\Omega_1](\varphi)_1+[f_1,\Omega_2](\varphi)_2+\dots+[f_1,\Omega_i](\varphi)_i,\\ [f_2,\varphi] & = & [f_2,\Omega_1](\varphi)_1+[f_2,\Omega_2](\varphi)_2+\dots+[f_2,\Omega_i](\varphi)_i,\\ \dots & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ [f_{i-1},\varphi] & = & [f_{i-1},\Omega_1](\varphi)_1+[f_{i-1},\Omega_2](\varphi)_2+\dots+[f_{i-1},\Omega_i](\varphi)_i. \end{array}\right.$$

Setzt man in diesen Gleichungen, bei denen als einzige Eigenschaft der Functionen Ω vorausgesetzt wird, dass die Determinante der Coefficienten auf der rechten Seite nicht verschwinde, φ gleich $f_1, f_2, \dots$, so verschwinden die linken Theile und also auch $(\varphi)_1, (\varphi)_2, \dots (\varphi)_i$. Man schliesst daraus, dass sämmtlichen Gleichungen

$$(35.)\quad (\varphi)_1=0,\quad (\varphi)_2=0,\ \dots\ (\varphi)_i=0,$$

welche in Folge der Gleichungen (34.) an Stelle der Gleichungen (33.) gesetzt werden können, durch die Lösungen $\varphi=f_1$, $\varphi=f_2$, ... $\varphi=f_{i-1}$ genügt wird.

Setzt man aber in den Gleichungen (34.) φ gleich einer der Functionen Ω, etwa gleich Ω_h, so findet sich offenbar aus (34.), dass alle Grössen $(\varphi)_1, (\varphi)_2, \dots$ verschwinden bis auf $(\varphi)_h$, welches gleich 1 wird. Auf diese Weise kennt man von jeder der Gleichungen (35.) $2i-2$ Lösungen, nämlich von

$$\begin{array}{l} (\varphi)_1=0\ :\ f_1,\ f_2,\ \dots\ f_{i-1},\ \Omega_2,\ \Omega_3,\ \dots\ \Omega_i,\\ (\varphi)_2=0\ :\ f_1,\ f_2,\ \dots\ f_{i-1},\ \Omega_1,\ \Omega_3,\ \dots\ \Omega_i,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (\varphi)_i=0\ :\ f_1,\ f_2,\ \dots\ f_{i-1},\ \Omega_1,\ \Omega_2,\ \dots\ \Omega_{i-1}. \end{array}$$

Mit welcher dieser Gleichungen man also auch beginnen mag, immer wird die Aufsuchung einer neuen Lösung mit der Aufsuchung eines Integrals in einem System von $2n-2i+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung aequivalent sein.

Zwischen diesen Ausdrücken $(\varphi)_1, (\varphi)_2, \dots (\varphi)_i$ besteht ein sehr einfacher Zusammenhang, welcher die Methode der simultanen Integration wesentlich bedingt. Um diesen Zusammenhang nachzuweisen, gehe ich zu den beiden identischen Gleichungen zurück, welche für die Ausdrücke (φ), $[\varphi, \psi]$ bestehen:

$$[(\varphi), \psi]-[(\psi), \varphi] = ([\varphi, \psi])+[\varphi, \psi],$$
$$[[\varphi, \psi], \chi]+[[\psi, \chi], \varphi]+[[\chi, \varphi], \psi] = 0.$$

In diesen Gleichungen setze ich $\psi = f_k$, $\chi = f_h$, indem h und k zwei verschiedene Zahlen der Reihe 1, 2, ... $i-1$ bedeuten sollen. Die Functionen f_k, f_h genügen den Gleichungen:

$$(f_k) = 0, \quad (f_h) = 0, \quad [f_k, f_h] = 0.$$

Daher kann man den obigen identischen Gleichungen für diesen Fall folgende Form geben:

$$(36.) \quad \begin{cases} ([f_k, \varphi])+[f_k, \varphi]-[f_k, (\varphi)] = 0, \\ [f_h, [f_k, \varphi]]-[f_k, [f_h, \varphi]] = 0. \end{cases}$$

Führen wir in diesen Gleichungen statt der Operationen (φ), $[f_k, \varphi]$ aus den Gleichungen (34.) die Operationen $(\varphi)_\lambda$ ein; und zwar soll dies zunächst für die durch die *inneren* Klammern dargestellten Operationen allein geschehen, während die durch die äusseren Klammern dargestellten fortbestehen mögen. Indem man dies ausführt, bemerkt man, dass die linken Theile der Gleichungen (36.) sich in zwei Theile sondern; indem nämlich für $[f_k, \varphi]$ oder (φ) der Werth aus (34.) gesetzt und sodann die äusseren Operationen in den Formeln (36.) angewendet werden, entstehen einerseits Glieder, welche von der Anwendung der äusseren Operation auf die Coefficienten (Ω), $[f_k, \Omega]$ herrühren, während in den anderen die Operation auf die Factoren $(\varphi)_\lambda$ angewandt wird. Alle Glieder der ersten Art enthalten einen der Ausdrücke $(\varphi)_\lambda$ als Factor; man überzeugt sich aber sofort, dass in den ganzen Ausdrücken, in welche die linken Theile der Gleichungen (36.) übergehen, der Coefficient jedes Ausdrucks $(\varphi)_\lambda$ verschwindet. Denn ein solcher Coefficient ist nichts Anderes, *als die linke Seite einer der Gleichungen* (36.) *selbst, nur für φ darin Ω_λ gesetzt.* Da nun die linken Theile der Gleichungen (36.) für *jede* Function φ verschwinden, so sind die gedachten Coefficienten Null; und es bleiben also in den aus (36.) entstehenden Relationen nur diejenigen Terme übrig, welche von der Anwendung der äusseren Operationen auf die Factoren $(\varphi)_\lambda$ herrühren. Jene Gleichungen werden also jetzt:

$$0 = \Sigma_\lambda \{[f_k, \Omega_\lambda]((\varphi)_\lambda)-(\Omega_\lambda)[f_k, (\varphi)_\lambda]\},$$
$$0 = \Sigma_\lambda \{[f_k, \Omega_\lambda][f_h, (\varphi)_\lambda]-[f_h, \Omega_\lambda][f_k, (\varphi)_\lambda]\}.$$

Drückt man nun auch noch die äusseren Operationen mit Hülfe der Gleichungen (34.) durch die Operationen $(\varphi)_\mu$ aus, so erhält man:

$$0 = \Sigma_\lambda \Sigma_\mu \{ [f_k, \Omega_\lambda](\Omega_\mu) - [f_k, \Omega_\mu](\Omega_\lambda) \} ((\varphi)_\lambda)_\mu,$$

$$0 = \Sigma_\lambda \Sigma_\mu \{ [f_k, \Omega_\lambda][f_h, \Omega_\mu] - [f_k, \Omega_\mu][f_h, \Omega_\lambda] \} ((\varphi)_\lambda)_\mu$$

oder auch, indem man der Kürze wegen

$$(37.) \qquad x_{\lambda,\mu} = ((\varphi)_\lambda)_\mu - ((\varphi)_\mu)_\lambda$$

setzt, durch Vertauschung von λ mit μ in den letzten Gliedern der Doppelsummen:

$$(38.) \qquad \begin{cases} 0 = \Sigma_\lambda \Sigma_\mu [f_k, \Omega_\lambda](\Omega_\mu) . x_{\lambda,\mu}, \\ 0 = \Sigma_\lambda \Sigma_\mu [f_k, \Omega_\lambda][f_h, \Omega_\mu] . x_{\lambda,\mu}. \end{cases}$$

Diesen Gleichungen kann man noch die Gleichung

$$0 = \Sigma_\lambda \Sigma_\mu (\Omega_\lambda)(\Omega_\mu) . x_{\lambda,\mu}$$

hinzufügen, welche identisch erfüllt ist, da $x_{\lambda,\mu} = -x_{\mu,\lambda}$. Vergleicht man aber diese Gleichung mit der ersten Gleichung (38.), und legt in letzterer dem Index k alle möglichen Werthe bei; erinnert man sich ferner, dass die aus den Ausdrücken (Ω_λ), $[f_k, \Omega_\lambda]$ gebildete Determinante nicht verschwinden soll, so findet sich sofort, dass diese Gleichungen das System

$$(39.) \qquad 0 = \Sigma_\mu (\Omega_\mu) . x_{\lambda,\mu}$$

mit sich führen, in welchem λ alle Werthe von 1 bis i erhalten kann.

Combinirt man hingegen eine der ersten Gleichungen (38.) mit denjenigen aus der zweiten entspringenden Gleichungen, welchen derselbe Werth von k zukommt, so findet sich, da wieder jene Determinante nicht verschwinden darf, dass die Gleichungen bestehen müssen:

$$(40.) \qquad 0 = \Sigma_\lambda [f_k, \Omega_\lambda] . x_{\lambda,\mu},$$

wo der Index μ die Werthe 1, 2, ... i annehmen kann. Schreibt man inzwischen statt (39.):

$$0 = \Sigma_\lambda (\Omega_\lambda) . x_{\lambda,\mu},$$

so folgt abermals aus der Erwägung, dass die gedachte Determinante nicht verschwinden kann, dass

$$x_{\lambda,\mu} = 0,$$

dass also für jeden Werth von λ und μ:

$$((\varphi)_\lambda)_\mu = ((\varphi)_\mu)_\lambda.$$

Und diese Gleichung enthält folgenden Satz:

Theorem 11.

Sind $f_1, f_2, \ldots f_{i-1}$ Functionen, welche den Gleichungen

$$(f_k) = 0, \quad (f_h) = 0, \quad [f_k, f_h] = 0$$

genügen, und $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_i$ ganz beliebige Functionen, welche die einzige Eigenschaft haben, dass die Determinante der Gleichungen

$$\begin{array}{l}
(\Omega_1)(\varphi)_1 + (\Omega_2)(\varphi)_2 + \cdots + (\Omega_i)(\varphi)_i = (\varphi), \\
[f_1, \Omega_1](\varphi)_1 + [f_1, \Omega_2](\varphi)_2 + \cdots + [f_1, \Omega_i](\varphi)_i = [f_1, \varphi], \\
[f_2, \Omega_1](\varphi)_1 + [f_2, \Omega_2](\varphi)_2 + \cdots + [f_2, \Omega_i](\varphi)_i = [f_2, \varphi], \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[f_{i-1}, \Omega_1](\varphi)_1 + [f_{i-1}, \Omega_2](\varphi)_2 + \cdots + [f_{i-1}, \Omega_i](\varphi)_i = [f_{i-1}, \varphi]
\end{array}$$

nicht verschwindet, so haben die Differentialoperationen

$$(\varphi)_1, \quad (\varphi)_2, \quad \ldots \quad (\varphi)_i,$$

welche sich aus vorstehenden Gleichungen ergeben, die Eigenschaft, dass die successive Anwendung derselben oder einiger derselben immer dasselbe Resultat giebt, welches auch die Reihenfolge der angewandten Operationen sein möge, indem immer:

$$((\varphi)_\lambda)_\mu = ((\varphi)_\mu)_\lambda.$$

§. 8.

Simultane Integration irgend eines der Systeme, auf welche nach dem Obigen die Lösung des *Pfaff*schen Problems zurückkommt.

Mit Hülfe des soeben aufgestellten Theorems erkennt man ohne Weiteres, dass die Gleichungen

$$(\varphi)_1 = 0, \quad (\varphi)_2 = 0, \quad \ldots \quad (\varphi)_i = 0$$

ein solches simultanes System bilden, wie es *Jacobi* in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen auflösen gelehrt hat; und bei welchem die Auffindung einer gemeinschaftlichen Lösung nur die Kenntniss je eines Integrals von i Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erfordert, deren eines immer, die anderen im Allgemeinen $2n-2i+2$ Veränderliche enthalten. Denn ist $\varphi = \text{Const.}$ etwa ein Integral des Systems, auf welches die Integration der Gleichung

$$(\varphi)_1 = 0$$

führt, und welches, da $2(i-1)$ Integrale desselben,

$$\begin{array}{l}
f_1 = \text{Const.}, \quad f_2 = \text{Const.}, \quad \ldots \quad f_{i-1} = \text{Const.}, \\
\Omega_2 = \text{Const.}, \quad \Omega_3 = \text{Const.}, \quad \ldots \quad \Omega_i = \text{Const.},
\end{array}$$

bereits bekannt sind, die Stelle eines Systems mit $2(n-i)+2$ Veränderlichen vertritt, so sind auch

$$\varphi' = (\varphi)_2, \quad \varphi'' = ((\varphi)_2)_2, \quad \text{etc.}$$

Integrale desselben Systems, oder es sind

$$\varphi, \quad \varphi', \quad \varphi'', \quad \ldots$$

Lösungen der Gleichung

$$(\varphi)_1 = 0.$$

In der That folgt aus der Gleichung des Theorems (11.), wenn man $\lambda = 1$, $\mu = 2$ setzt, und zugleich berücksichtigt, dass

$$(\varphi)_1 = 0$$

sein soll, sofort:

$$((\varphi)_2)_1 = 0$$

oder

$$(\varphi')_1 = 0;$$

sodann, indem man in der Gleichung des Theorems φ' an die Stelle von φ setzt, auch:

$$((\varphi')_2)_1 = 0, \quad \text{oder} \quad (\varphi'')_1 = 0,$$

u. s. w.

Aus einer Lösung kann man also, blos mit Hülfe der Operation $(\varphi)_2$, beliebig viele bilden; ebenso natürlich mit Hülfe der anderen Operationen, was oft von Nutzen sein kann, hier aber, um die Darstellung des Integrationsverfahrens nicht zu stören, übergangen sein mag.

Unter den so erhaltenen Lösungen $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ der Gleichung $(\varphi)_1 = 0$ ist ohne Zweifel eine Lösung $\varphi^{(\mu)}$, welche sich als eine Function von $\varphi, \varphi', \ldots \varphi^{(\mu-1)}, f_1, f_2, \ldots f_{i-1}, \Omega_2, \Omega_3, \ldots \Omega_i$ darstellen lässt, und zwar ist $\mu \leqq 2n-2i+1$, da die Anzahl der unabhängigen Lösungen von $(\varphi)_1 = 0$ nur $2n-1$ beträgt.

Man kann nun immer eine Function ψ von

$$\varphi, \varphi', \ldots \varphi^{(\mu-1)}, f_1, f_2, \ldots f_{i-1}, \Omega_2, \Omega_3, \ldots \Omega_i,$$

d. h. eine im Vorigen enthaltene Lösung der Gleichung $(\psi)_1 = 0$, so bestimmen, dass sie zugleich der Gleichung $(\psi)_2 = 0$ genügt. Denn denkt man sich

$$\psi = \psi\{\varphi, \varphi', \ldots \varphi^{(\mu-1)}, f_1, f_2, \ldots f_{i-1}, \Omega_2, \Omega_3, \ldots \Omega_i\},$$

und führt diese Function in $(\psi)_2 = 0$ ein, so erhält man:

$$(\psi)_2 = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}(\varphi)_2 + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi'}(\varphi')_2 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi^{(\mu-1)}}(\varphi^{(\mu-1)})_2,$$
$$+\frac{\partial\psi}{\partial f_1}(f_1)_2 + \frac{\partial\psi}{\partial f_2}(f_2)_2 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial f_{i-1}}(f_{i-1})_2,$$
$$+\frac{\partial\psi}{\partial\Omega_2}(\Omega_2)_2 + \frac{\partial\psi}{\partial\Omega_3}(\Omega_3)_2 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial\Omega_i}(\Omega_i)_2.$$

Aber nach §. 7. verschwinden die Ausdrücke

$$(f_1)_2,\ (f_2)_2,\ \ldots\ (f_{i-1})_2,\ (\Omega_3)_2,\ (\Omega_4)_2,\ \ldots\ (\Omega_i)_2,$$

und $(\Omega_2)_2$ wird 1. Ferner ist

$$(\varphi)_2 = \varphi',\ (\varphi')_2 = \varphi'',\ \ldots\ (\varphi^{(\mu-1)})_2 = \Pi(\varphi, \varphi' \ldots, f_1, f_2 \ldots, \Omega_2, \Omega_3 \ldots),$$

so dass die Gleichung $(\psi)_2 = 0$ übergeht in folgende:

$$(41.)\quad 0 = \frac{\partial\psi}{\partial\Omega_2} + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\varphi' + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi'}\varphi'' + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi^{(\mu-1)}}\cdot\Pi,$$

eine Gleichung mit nur $\mu+1$, d. h. höchstens $2n-2i+2$ unabhängigen Veränderlichen. Kennt man eine Lösung dieser Gleichung, d. h. ein Integral des entsprechenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen*) mit $\mu+1$ oder höchstens $2n-2i+2$ Veränderlichen, so hat man eine Function ψ, welche gleichzeitig den Gleichungen

$$(\psi)_1 = 0, \quad (\psi)_2 = 0$$

genügt.

Wendet man nun die Operation $(\varphi)_3$ auf die gefundene Function ψ an, so erhält man, ganz wie oben aus φ, neue Functionen

$$\psi' = (\psi)_3, \quad \psi'' = (\psi')_3 \quad \text{etc.},$$

welche wegen der Gleichungen des Theorems (11.)

$$((\psi)_3)_1 = ((\psi)_1)_3 = 0, \quad ((\psi)_3)_2 = ((\psi)_2)_3 = 0$$
$$((\psi')_3)_1 = ((\psi')_1)_3 = 0, \quad ((\psi')_3)_2 = ((\psi')_2)_3 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ebenfalls den Gleichungen

$$(\psi)_1 = 0, \quad (\psi)_2 = 0$$

*) Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass dies System durch die Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung

$$\frac{d^\mu\varphi}{d\Omega_2^\mu} = \Pi$$

ersetzt werden kann, wenn in Π die Functionen $\varphi', \varphi'' \ldots \varphi^{(\mu-1)}$ respective durch $\frac{d\varphi}{d\Omega_2}, \frac{d^2\varphi}{d\Omega_2^2} \cdots \frac{d^{\mu-1}\varphi}{d\Omega_2^{\mu-1}}$ ersetzt werden.

genügen. Ebenso wie vorhin ψ aus φ, kann also aus ψ eine neue Function χ abgeleitet werden, welche zugleich den Gleichungen

$$(\chi)_1 = 0, \quad (\chi)_2 = 0, \quad (\chi)_3 = 0$$

genügt, und zu deren Auffindung man wieder eines Integrals für ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit höchstens $2n-2i+2$ Veränderlichen bedarf.

Fährt man auf diese Weise fort, so erkennt man, dass man schliesslich zu einer gemeinsamen Lösung f_i sämmtlicher Gleichungen

$$(\varphi)_1 = 0, \quad (\varphi)_2 = 0, \; \dots \quad (\varphi)_i = 0,$$

oder

$$(\varphi) = 0, \; [\varphi_1, f_1] = 0, \; \dots \; [\varphi_1, f_{i-1}] = 0$$

gelangt; und zwar bedarf man dazu nur je eines Integrals von i Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Und von diesen Systemen enthält das erste schlechterdings $2n-2i+2$ Veränderliche; die anderen aber, deren entsprechende partielle Differentialgleichungen nach dem Muster von (41.) gebildet werden, können auch eine geringere Anzahl von Veränderlichen enthalten.

§. 9.

Gang der Integrationen, welche die allgemeinste Auflösungsmethode des *Pfaff*schen Problems erfordert.

Hieraus ergiebt sich dann leicht die allgemeinste Methode das *Pfaff*sche Problem zu lösen, d. h. dem Differentialausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2n} dx_{2n}$$

die Form

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \dots + F_n df_n$$

zu geben; wobei vorausgesetzt wird, dass die Determinante D der Grössen

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

nicht verschwinde. Es sei $D = R^2$, und $R_{ik} = \frac{\partial R}{\partial a_{ik}}$, endlich

$$(\varphi) = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k},$$

$$[\varphi, \psi] = \Sigma_i \Sigma_k \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}.$$

Erstens suche man eine Function $\varphi = f_1$, welche die Gleichung

$$(\varphi) = 0$$

befriedigt.

Zweitens bilde man zwei Ausdrücke $(\varphi)_1$, $(\varphi)_2$, welche durch die Gleichungen

$$(\varphi) = (A_1)(\varphi)_1 + (A_2)(\varphi)_2,$$
$$[f_1, \varphi] = [f_1, A_1](\varphi)_1 + [f_1, A_2](\varphi)_2$$

bestimmt werden, wo A_1, A_2 beliebige Functionen bezeichnen, für welche nur die Auflösung dieser Gleichungen nach $(\varphi)_1$, $(\varphi)_2$ möglich ist. Man suche irgend eine Lösung φ der Gleichung $(\varphi)_1 = 0$, welche von den beiden bekannten Lösungen A_2, f_1 verschieden ist. Sodann bilde man die Ausdrücke

$$\varphi' = (\varphi)_2, \quad \varphi'' = (\varphi')_2, \quad \ldots$$

bis man zu einer Function $\varphi^{(\mu)}$ gelangt, welche durch $\varphi, \varphi', \ldots \varphi^{(\mu-1)}, f_1, A_2$ ausdrückbar ist, so dass

$$\varphi^{(\mu)} = \Pi(\varphi, \varphi', \ldots \varphi^{(\mu-1)}, f_1, A_2),$$

wo dann $\mu \overline{\overline{<}} 2n-3$, und suche eine Lösung $\psi = f_2$ der Gleichung

$$0 = \frac{\partial\psi}{\partial A_2} + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\varphi' + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi'}\varphi'' + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi^{(\mu-1)}} \cdot \Pi.$$

Drittens bilde man drei Ausdrücke $(\varphi)_1$, $(\varphi)_2$, $(\varphi)_3$, welche den drei Gleichungen

$$(\varphi) = (B_1)(\varphi)_1 + (B_2)(\varphi)_2 + (B_3)(\varphi)_3,$$
$$[f_1, \varphi] = [f_1, B_1](\varphi)_1 + [f_1, B_2](\varphi)_2 + [f_1, B_3](\varphi)_3$$
$$[f_2, \varphi] = [f_2, B_1](\varphi)_1 + [f_2, B_2](\varphi)_2 + [f_2, B_3](\varphi)_3$$

genügen. Darin sind B_1, B_2, B_3 abermals beliebige Functionen, welche nur der einen Bedingung genügen, dass die Auflösung der vorliegenden linearen Gleichuugen nicht unmöglich sei. Man suche eine beliebige Lösung der Gleichung

$$(\varphi)_1 = 0,$$

welche von den bekannten Lösungen B_2, B_3, f_1, f_2 verschieden ist, und bilde die Functionen

$$\varphi' = (\varphi)_2, \quad \varphi'' = (\varphi')_2, \quad \ldots$$

bis man zu einer Function $\varphi^{(\nu)}$ gelangt, welche sich durch $\varphi, \varphi', \ldots \varphi^{(\nu-1)}$, B_2, B_3, f_1, f_2 ausdrücken lässt. Ist dann

$$\varphi^{(\mu)} = \Pi(\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(\nu-1)}, f_1, f_2, B_2, B_3),$$

so suche man eine Lösung der Gleichung

$$0 = \frac{\partial\psi}{\partial B_2} + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \cdot \varphi' + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi'} \cdot \varphi'' + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi^{(\nu-1)}} \cdot \Pi.$$

Man bilde sodann die Ausdrücke

$$\psi' = (\psi)_3, \quad \psi'' = (\psi')_3, \quad \ldots$$

bis man zu einem Ausdrucke $\psi^{(\nu')}$ gelangt, welcher durch ψ, ψ', ... $\psi^{(\nu'-1)}$, f_1, f_2, B_3 darstellbar ist. Und hat man dann

$$\psi^{(\nu')} = \Pi_1(\psi, \psi', \dots \psi^{(\nu'-1)}, f_1, f_2, B_3),$$

so suche man eine Lösung $\chi = f_3$ der Gleichung

$$0 = \frac{\partial\chi}{\partial B_3} + \frac{\partial\chi}{\partial\psi}\cdot\psi' + \frac{\partial\chi}{\partial\psi'}\cdot\psi'' + \dots + \frac{\partial\chi}{\partial\psi^{(\nu-1)}}\cdot\Pi_1.$$

Die Zahlen ν, ν' sind dabei immer gleich oder kleiner als $2n-5$.

Auf ähnliche Weise sucht man die Functionen f_4, f_5, ... *Endlich,* um die Function f_n zu finden, bildet man n Ausdrücke $(\varphi)_1$, $(\varphi)_2$, ... $(\varphi)_n$, welche den Gleichungen genügen:

$$\begin{array}{rcl}
(\varphi) &=& (N_1)(\varphi)_1 + (N_2)(\varphi)_2 + \dots + (N_n)(\varphi)_n,\\
[f_1, \varphi] &=& [f_1, N_1](\varphi)_1 + [f_1, N_2](\varphi)_2 + \dots + [f_1, N_n](\varphi)_n,\\
[f_2, \varphi] &=& [f_2, N_1](\varphi)_1 + [f_2, N_2](\varphi)_2 + \dots + [f_2, N_n](\varphi)_n,\\
\cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
[f_{n-1}, \varphi] &=& [f_{n-1}, N_1](\varphi)_1 + [f_{n-1}, N_2](\varphi)_2 + \dots + [f_{n-1}, N_n](\varphi)_n,
\end{array}$$

wo N_1, N_2, ... N_n beliebige Functionen sind, welche nur die Auflösung dieser linearen Gleichungen gestatten. Man sucht sodann diejenige Lösung der Gleichung

$$(\varphi)_1 = 0,$$

welche ausser den bekannten Lösungen, N_2, N_3, ... N_n, f_1, f_2, ... f_{n-1}, noch existirt, und bildet die Function

$$\varphi' = (\varphi)_2,$$

welche nothwendig sich durch φ, N_2, N_3, ... N_n, f_1, f_2, ... f_{n-1} ausdrücken lässt, so dass

$$\varphi' = \Pi(\varphi, f_1, f_2, \dots f_{n-1}, N_2, N_3, \dots N_n).$$

Hierauf sucht man die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial\psi}{\partial N_2} + \Pi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0;$$

bildet alsdann die Function

$$\psi' = (\psi)_3,$$

welche sich durch ψ, f_1, f_2, ... f_{n-1}, N_3, N_4, ... N_n ausdrücken lässt, so dass

$$\psi' = \Pi_1(\psi, f_1, f_2, \dots f_{n-1}, N_3, N_4, \dots N_n).$$

Man sucht ferner die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial\chi}{\partial N_3} + \Pi_1\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\psi} = 0,$$

bildet die Function

$$\chi' = (\psi)_4 = \Pi_2(\chi, f_1, f_2, \dots f_{n-1}, N_4, N_5, \dots N_n)$$

u. s. w.

Auf diese Weise gelangt man allmälig zu einer Gleichung

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial N_{n-1}} + \Pi_{n-3}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\varkappa} = 0,$$

wo Π_{n-3} eine Function von $\varkappa, f_1, f_2, \dots f_{n-1}, N_{n-1}, N_n$ ist. Man sucht die Lösung dieser Gleichung, bildet die Function

$$\vartheta' = (\vartheta)_n = \Pi_{n-2}(\vartheta, f_1, f_2, \dots f_{n-1}, N_n),$$

und sucht schliesslich die Lösung $\omega = f_n$ der Gleichung

$$\frac{\partial\omega}{\partial N_n} + \Pi_{n-2}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta} = 0.$$

Die Operationen sind hiermit abgeschlossen; die gefundenen Functionen f_n, Constanten gleich gesetzt, geben die Lösungen des *Pfaff*schen Problems.

Die geforderte Bestimmung kam wesentlich darauf hinaus, die Functionen f so zu wählen, dass den $2n$ Gleichungen

$$\begin{aligned}
X_1 &= F_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + F_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \dots + F_n\frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \\
X_2 &= F_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + F_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + F_n\frac{\partial f_n}{\partial x_2}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
X_{2n} &= F_1\frac{\partial f_1}{\partial x_{2n}} + F_2\frac{\partial f_2}{\partial x_{2n}} + \dots + F_n\frac{\partial f_n}{\partial x_{2n}}
\end{aligned}$$

durch n Functionen F gleichzeitig genügt werden kann. Da dies geschehen ist, so finden sich die Functionen F ohne Weiteres, indem man irgend n dieser Gleichungen zur Bestimmung derselben benutzt.

Carlruhe, den 25sten Januar 1861.