Ueber das *Pfaff*sche Problem.

Erste Abhandlung.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

Jacobi hat mehrfach darauf hingewiesen, dass die bisherige Methode, durch welche man das *Pfaff*sche Problem zu lösen pflegt, unnöthige Integrationen erfordere, und durch eine andere zu ersetzen sei; als ein Beispiel dieser neuen Methode ist der Fall eines viergliedrigen Differentialausdruckes im 29sten Bande dieses Journals p. 253 (Math. W. Th. I, p. 157) andeutungsweise behandelt worden. Aus jener Andeutung geht hervor, dass wenigstens die allgemeine Idee dieser Methode bereits damals *Jacobi* vor Augen gestanden habe.

Inzwischen ist weder in seinen späteren Publicationen noch in seinen nachgelassenen Papieren etwas über diesen Gegenstand vorhanden; und man darf daher wohl annehmen, dass *Jacobi* niemals Zeit oder Gelegenheit gewonnen habe, das gedachte Problem ausführlich und eingehend zu behandeln. Auch die grosse Abhandlung, welche in den vorangehenden Heften dieses Journals aus seinem Nachlasse erschienen ist, giebt nur in Bezug auf die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung jene neue Methode, welche die wahre Verallgemeinerung der Untersuchungen *Lagranges* enthält; nichts hingegen über das verwandte Problem, als dessen speciellen Fall *Pfaff* die Integration jener Gleichungen betrachten gelehrt hat. Indessen zeigt eine genauere Betrachtung, dass in der That die *Jacobi*sche Methode zur Integration der partiellen Differentialgleichungen auf das *Pfaff*sche Problem ganz genau Anwendung findet, und zwar ohne Beschränkung oder Erweiterung der Kunstgriffe, welche bei dem ersteren Probleme zum Ziele führen.

Die Ausdehnung dieser Methode auf das *Pfaff*sche Problem in seiner ganzen Allgemeinheit und in allen seinen möglichen Fällen ist der Gegenstand der vorliegenden Abhandlung. Diese Anwendung erscheint sofort als möglich, sobald man die Idee festhält, dass ein Differentialausdruck von $2n$ Gliedern, der durch n Gleichungen integrirt wird, mit Hülfe irgend einer jener Gleichungen in einen anderen von $2n-1$ Gliedern übergeführt werden kann, welcher durch $n-1$ Gleichungen integrirbar ist; dieser durch eine dieser $n-1$ Gleichungen in einen dritten mit $2n-2$ Veränderlichen, der durch $n-2$ Gleichungen integrirt werden kann, u. s. w. Aber allerdings schien es zunächst der verwickelten Gleichungen wegen sehr schwierig, sich eine genaue Vorstellung aller dieser Vorgänge in ihrem Zusammenhange zu bilden, und die verschiedenen Gleichungen anzugeben, von welchen die successive zu findenden Integrale abhängen. Dieser Schwierigkeit wurde dadurch begegnet, dass man sich immer den gegebenen Differentialausdruck zuerst auf eine bestimmte Weise in die gesuchte Form gebracht denkt, sodann irgend eine andere Lösung der Aufgabe zunächst in dieser speciellen Form begründet, und von dieser erst wieder zu dem gegebenen Differentialausdruck zurückkehrt. Hiedurch ist man der Mühe überhoben, directe Nachweise zu führen, welche auf sehr verwickelte algebraische Betrachtungen führen, und allerdings ihrerseits ein hohes Interesse haben.

Es zeigt sich, dass die möglichen Fälle des *Pfaff*schen Problems sich in zwei grosse Klassen sondern, welche beide auf die Form

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n$$

führen, doch mit dem Unterschiede, dass in der ersten Klasse die Functionen F, f in gewisser Weise bestimmt sind, während in der zweiten eine derselben willkürlich gewählt werden kann; wie man denn das Problem im letzteren Falle auch dahin definiren kann, dass der gegebene Differentialausdruck die Gestalt

$$df + F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots$$

annehmen soll. Die Probleme der ersten Klasse treten im Allgemeinen bei einer geraden, die der zweiten bei einer ungeraden Anzahl von Veränderlichen ein.

Die §§. 1—7 geben die Integrationsmethode für die erste Klasse von Problemen; §§. 8—11 geben zwei verschiedene Methoden für die zweite Klasse, deren jede unter geeigneten Umständen Vorzüge besitzt. Diese Klasse von Problemen ist noch nie allgemein behandelt worden; und ist namentlich die erste dieser beiden Methoden durchaus auf ganz veränderte Anschauungen gegründet.

In diesen §§. sind die Wege angegeben, die Integrale des *Pfaff*schen Problems successive zu finden, und zwar so, dass jede gefundene Gleichung zur Transformation des Differentialausdruckes benutzt wird, ehe zur Aufsuchung der nächstfolgenden übergegangen wird.

In den folgenden §§. ist nur auf den Fall eingegangen, wo ein Ausdruck mit $2n$ Veränderlichen durch n Gleichungen integrirt wird. Aus der in den ersten Paragraphen gegebenen Methode wird ein sehr merkwürdiges System von Gleichungen entwickelt, $\frac{n.n+1}{2}$ Gleichungen enthaltend, welches die n Integrale des *Pfaff*schen Problems *gleichzeitig* definirt, ohne also dass die Kenntniss eines Integrals zur Kenntniss der Gleichungen nothwendig ist, von denen das folgende abhängt. Diese $\frac{n.n+1}{2}$ Gleichungen kommen auf zwei Formen zurück; die eine Form, welche n dieser Gleichungen zukommt und welche nur je eine der unbekannten Functionen enthält, entspricht dem ersten *Pfaff*schen System; die anderen $\frac{n.n-1}{2}$ Gleichungen haben sämmtlich gleiche Form, und jede enthält zwei der gesuchten Functionen. Bezeichnet man also irgend zwei dieser Functionen durch H_i, H_k, so ist dies System durch lineare partielle Differentialgleichungen dargestellt, die man durch die Symbole

$$(H_i)=0, \quad (H_k)=0, \quad [H_i, H_k]=0$$

ausdrücken kann.

Diese Gleichungen haben höchst interessante Eigenschaften. Denn vermöge gewisser identischer Beziehungen kann man das *Poisson-Jacobi*sche Theorem auf dieselben ausdehnen; es besitzt jede Gleichung

$$(\varphi) = 0$$

die Eigenschaft, dass aus irgend *drei* ihrer Lösungen im Allgemeinen die übrigen durch blosse Differentiation abgeleitet werden können; ebenso kann man, wenn in der Gleichung

$$[\varphi, \psi] = 0$$

ψ eine beliebig gegebene Function ist, aus zwei Integralen dieser Gleichung im Allgemeinen alle übrigen zusammensetzen; wie dies bei den dynamischen Gleichungen eintritt, welche als specieller Fall sowohl der ersten als der letzteren Gleichungen zu betrachten sind.

Ein Theil der hier mitgetheilten Resultate findet sich in der Abhandlung des Herrn *Natani,* dieses Journal Bd. 58, p. 301 etc. angebahnt. So ist namentlich die Ausdehnung des *Poisson*schen Satzes im Keime dort enthalten, wenn auch in einer Form, welche das Wesen der Sache nicht vollkommen erkennen lässt, und nicht in der Ausdehnung, welche ihm im Folgenden gegeben ist. Ebenso findet man das *Jacobi*sche Princip, den gegebenen Differentialausdruck durch die gefundenen Integrale zu reduciren, dort angewandt. Da aber nicht gezeigt worden ist, wie man von den auftretenden *simultanen* Systemen partieller Differentialgleichungen *ein* Integral finden könne, so musste a. a. O. die Methode nothwendig ohne Abschluss bleiben. Da ausserdem die Art der Darstellung und die Natur der Beweise hier eine ganz andere ist wie in der Abhandlung des Herrn *Natani,* so schien es dem Verfasser angemessen, neben vielem Neuen auch dasjenige nicht zu übergehen, wofür sich dort Anknüpfungspunkte finden, um dadurch nicht der ganzen Darstellung Deutlichkeit und Zusammenhang zu rauben.

§. 1.

Zurückführung zweier Lösungen des *Pfaff*schen Problems auf einander.

Es sei

$$(1.)\qquad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

der gegebene Differentialausdruck, in welchem X_1, X_2, ... X_{2n} irgend welche Functionen von x_1, x_2, ... x_{2n} bedeuten. Das *Pfaff*sche Problem besteht darin, diesem Ausdruck die Gestalt zu geben:

$$(2.)\qquad F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n,$$

wo die F und f wiederum Functionen der x sind. Dies ist auf mehr als eine Art möglich; so aber dass die verschiedenen Lösungen des Problems aus einander abgeleitet werden können. Ich nehme an, ein Ausdruck (2.) sei gefunden; man soll zunächst aus diesem einen anderen bilden

$$(3.)\qquad \Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_n d\varphi_n,$$

welcher jenem gleich wird, und also eine neue Lösung des Problems angiebt. Betrachtet man dann in der Gleichung

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n = \Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_n d\varphi_n$$

die F und f als die unabhängigen Veränderlichen, so löst sich diese Gleichung in die folgenden auf:

$$(4.)\qquad \begin{cases} F_i = \Phi_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial f_i} + \Phi_2 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial f_i} + \cdots + \Phi_n \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial f_i}, \\[2ex] 0 = \Phi_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial F_i} + \Phi_2 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial F_i} + \cdots + \Phi_n \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial F_i}, \end{cases}$$

deren jede n verschiedene Gleichungen darstellt. Aus der letzten derselben folgt durch Elimination der Φ:

$$0 = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial F_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial F_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial F_n},$$

oder durch Integration:

$$(5.) \quad 0 = \Pi(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n, f_1, f_2, \dots f_n),$$

durch Π eine willkürliche Function bezeichnet. Die Differentiation dieser Gleichung nach F_i giebt dann

$$\Pi'\varphi_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial F_i} + \Pi'\varphi_2 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial F_i} + \dots + \Pi'\varphi_n \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial F_i} = 0,$$

und die Vergleichung mit der zweiten Gleichung (4.) zeigt dann, dass

$$(6.) \quad \Phi_1 = \lambda \Pi'\varphi_1, \quad \Phi_2 = \lambda \Pi'\varphi_2, \quad \dots \quad \Phi_n = \lambda \Pi'\varphi_n,$$

wo λ ein unbestimmter Factor ist. Endlich giebt die erste Gleichung (4.) hienach sofort:

$$F_i = \lambda\left(\Pi'\varphi_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_i} + \Pi'\varphi_2 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial f_i} + \dots + \Pi'\varphi_n \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_i}\right),$$

oder weil nach (5.)

$$\Pi'\varphi_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_i} + \Pi'\varphi_2 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial f_i} + \dots + \Pi'\varphi_n \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_i} + \Pi' f_i = 0$$

wird:

$$(7.) \quad F_1 = -\lambda \Pi' f_1, \quad F_2 = -\lambda \Pi' f_2, \quad \dots \quad F_n = -\lambda \Pi' f_n.$$

Die Gleichungen (5.), (6.), (7.) stellen die allgemeinste Lösung des Problems dar, insofern die Gleichungen (5.), (7.) es gestatten, nachdem man einmal die willkürliche Function Π irgendwie bestimmt hat, die Grössen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$; λ durch die F, f auszudrücken. Die Gleichungen (6.) liefern dann die Φ ohne Weiteres.

Es könnte allgemeiner scheinen, wenn man nicht blos die Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial F_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial F_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial F_n}$$

verschwinden liesse, sondern auch ihre Unterdeterminanten bis zu einer gewissen Ordnung. Dann würde man zwischen den φ und f nicht *eine* Gleichung, sondern eine gewisse Zahl von Gleichungen

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \dots \quad \Pi_\mu = 0$$

anzunehmen haben; und für die F, Φ würden sich dann die Ausdrücke ergeben:

$$\Phi_i = \lambda_1 \Pi_1' \varphi_i + \lambda_2 \Pi_2' \varphi_i + \dots + \lambda_\mu \Pi_\mu' \varphi_i,$$
$$F_i = -\lambda_1 \Pi_1' f_i - \lambda_2 \Pi_2' f_i - \dots - \lambda_\mu \Pi_\mu' f_i.$$

Aber in Wirklichkeit ist dies nur ein specieller Fall des vorigen; denn setzt man in dem früheren

$$\Pi = \lambda_1 \Pi_1 + \lambda_2 \Pi_2 + \cdots + \lambda_\mu \Pi_\mu,$$

wo die λ Functionen der f, φ bedeuten, so wird

$$\begin{aligned}\Phi_i &= \lambda_1 \Pi_1' \varphi_i + \lambda_2 \Pi_2' \varphi_i + \cdots + \lambda_\mu \Pi_\mu' \varphi_i + \Pi_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi_i} + \Pi_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varphi_i} + \cdots + \Pi_\mu \frac{\partial \lambda_\mu}{\partial \varphi_i}, \\ F_i &= -\lambda_1 \Pi_1' f_i - \lambda_2 \Pi_2' f_i - \cdots - \lambda_\mu \Pi_\mu' f_i - \Pi_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial f_i} - \Pi_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial f_i} - \cdots - \Pi_\mu \frac{\partial \lambda_\mu}{\partial f_i}.\end{aligned}$$

Nimmt man nun an, dass statt der Gleichung $\Pi = 0$ die Gleichungen

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \ldots \quad \Pi_\mu = 0$$

gleichzeitig bestehen, so gehen diese Gleichungen in die obigen über, welche demnach aus dem ersten Fall abgeleitet sind.

Wenn man aus den Gleichungen (5.) und (7.) die Grössen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$ und λ eliminirt, so gelangt man zuletzt zu einer Gleichung, der man die Form geben kann:

$$\varphi_n = \psi\left(f_1, f_2, \ldots f_n, \frac{F_1}{F_n}, \frac{F_2}{F_n}, \ldots \frac{F_{n-1}}{F_n}\right);$$

und zwar ist ψ eine ganz willkürliche Function, da Π oben eine willkürliche Function war.

Dies Resultat ist sehr bekannt. Da es aber als Grundlage des folgenden dienen wird, so schien es passend, dasselbe durch einfache Betrachtungen von Neuem abzuleiten.

Ich bemerke nur, dass eben diese Betrachtungen offenbar noch gelten, wenn zwischen den Functionen X solche Beziehungen obwalten, dass man dem Ausdruck (1.) die Gestalt geben kann:

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_m df_m,$$

wo $m < n$. Auch dann wird in der allgemeinsten Form

$$\Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_m d\varphi_m$$

dieses Ausdrucks die Function φ_m eine willkürliche Function der Grössen

$$f_1, f_2, \ldots f_m, \frac{F_1}{F_m}, \frac{F_2}{F_m}, \ldots \frac{F_{m-1}}{F_m}$$

sein, welche einer speciellen Lösung angehören.

§. 2.

Successive Lösung des *Pfaff*schen Problems.

Liegt der Ausdruck (1.) vor, so wird man also zunächst den allgemeinsten Ausdruck von φ_n suchen können,

$$\varphi_n = \Pi\left(f_1, f_2, \dots f_n, \frac{F_1}{F_n}, \frac{F_2}{F_n}, \dots \frac{F_{n-1}}{F_n}\right).$$

Hat man aber einen besonderen Ausdruck dieser Art gefunden, dem ein specieller Werth von Π entspricht, so kann man

$$\varphi_n = \text{Const.}$$

als ein Integral des *Pfaff*schen Problems betrachten, und die Aufsuchung von $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}$ dadurch anbahnen, dass man aus dem Ausdrucke (1.) eine der Veränderlichen eliminirt; wodurch denn dieser in einen Ausdruck mit $2n-1$ Veränderlichen übergeht, der aber die Eigenschaft besitzt, durch $n-1$ Gleichungen integrirt, d. h. in die Gestalt

$$(8.) \qquad F_1^{(1)} df_1^{(1)} + F_2^{(1)} df_2^{(1)} + \dots + F_{n-1}^{(1)} df_{n-1}^{(1)}$$

gebracht werden zu können.

Um diese Eigenschaft, welche von der Wahl der zu eliminirenden Veränderlichen offenbar unabhängig sein muss, nachzuweisen, kann man von der speciellen Form (2.)

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \dots + F_n df_n$$

ausgehen, welche gefunden gedacht wird. Setzt man sodann die Gleichung $\varphi_n = \text{Const.}$ in die Gestalt

$$f_n = \psi\left(f_1, f_2, \dots f_{n-1}, \frac{F_1}{F_n}, \frac{F_2}{F_n}, \dots \frac{F_{n-1}}{F_n}\right),$$

und führt diesen Werth von f_n in die Form (2.) ein, so erhält man:

$$F_n \Big\{ \left(\frac{F_1}{F_n} + \frac{\partial f_n}{\partial f_1}\right) df_1 + \left(\frac{F_2}{F_n} + \frac{\partial f_n}{\partial f_2}\right) df_2 + \dots + \left(\frac{F_{n-1}}{F_n} + \frac{\partial f_n}{\partial f_{n-1}}\right) df_{n-1}$$

$$+ \frac{\partial f_n}{\partial \frac{F_1}{F_n}} \cdot d\frac{F_1}{F_n} + \frac{\partial f_n}{\partial \frac{F_2}{F_n}} \cdot d\frac{F_2}{F_n} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial \frac{F_{n-1}}{F_n}} \cdot d\frac{F_{n-1}}{F_n} \Big\}.$$

Diese Form enthält aber in der Klammer nur $2(n-1)$ Veränderliche

$$f_1, f_2, \dots f_{n-1}, \frac{F_1}{F_n}, \frac{F_2}{F_n}, \dots \frac{F_{n-1}}{F_n},$$

und lässt sich daher nothwendig in der Form (8.) darstellen.

Diese Eigenschaft führt auf den Weg, den man zur einfachsten Lösung des *Pfaff*schen Problems einzuschlagen hat. Man denkt sich zunächst den gegebenen Ausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

in die Gestalt gebracht:

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n,$$

und sucht eine beliebige Function φ_n der Grössen

$$f_1, f_2, \ldots f_n, \frac{F_1}{F_n}, \frac{F_2}{F_n}, \ldots \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

zu bestimmen. Eliminirt man dann mit Hülfe der Gleichung $\varphi_n = \text{Const.}$ aus dem gegebenen Ausdruck eine der Veränderlichen, so lässt sich der Rest in die Form

$$F_1^{(1)} df_1^{(1)} + F_2^{(1)} df_2^{(1)} + \cdots + F_{n-1}^{(1)} df_{n-1}^{(1)}$$

überführen. Man sucht jetzt eine beliebige Function φ_{n-1} der Grössen

$$f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots f_{n-1}^{(1)}, \frac{F_1^{(1)}}{F_{n-1}^{(1)}}, \frac{F_2^{(1)}}{F_{n-1}^{(1)}}, \ldots \frac{F_{n-2}^{(1)}}{F_{n-1}^{(1)}}$$

zu bestimmen, und eliminirt mit Hülfe der Gleichung $\varphi_{n-1} = \text{Const.}$ wiederum eine der Veränderlichen aus dem gegebenen Ausdruck, der alsdann noch $2n-2$ Veränderliche enthält, aber durch $n-2$ Gleichungen integrirbar wird, d. h. der sich auf die Form bringen lässt:

$$F_1^{(2)} df_1^{(2)} + F_2^{(2)} df_2^{(2)} + \cdots + F_{n-2}^{(2)} df_{n-2}^{(2)}.$$

Man sucht ferner eine Function φ_{n-2} der Grössen

$$f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, \ldots f_{n-2}^{(2)}, \frac{F_1^{(2)}}{F_{n-2}^{(2)}}, \frac{F_2^{(2)}}{F_{n-2}^{(2)}}, \ldots \frac{F_{n-3}^{(2)}}{F_{n-2}^{(2)}},$$

eliminirt mit Hülfe von $\varphi_{n-2} = \text{Const.}$ abermals eine der Veränderlichen aus dem gegebenen Ausdruck, und fährt in dieser Weise fort, bis man in dem Ausdruck nur noch $n+1$ Veränderliche übrig behält. Den gegebenen Ausdruck, auf diese Weise reducirt, kann man sich dann immer in die Form gebracht denken

$$F_1^{(n-1)} df_1^{(n-1)};$$

sucht man nun eine beliebige Function φ_1 von $f_1^{(n-1)}$ zu bestimmen, so hat man eine Reihe von Functionen

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n,$$

welche, Constanten gleich gesetzt, die Integrale des vorliegenden Problems bilden, d. h. welche es erlauben, den gegebenen Ausdruck in der Form

$$\Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_n d\varphi_n$$

darzustellen.

Denkt man sich die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ gefunden, so sind während der soeben beschriebenen Operationen die Veränderlichen x in folgenden Beziehungen zu betrachten:

1. Aus $\varphi_n \quad = \text{Const.}$, x_{2n} als Function von $x_1, x_2, \ldots x_{2n-3}, x_{2n-2}, x_{2n-1}$.
2. Aus $\varphi_{n-1} = \text{Const.}$, x_{2n-1} als Function von $x_1, x_2, \ldots x_{2n-3}, x_{2n-2}$.
3. Aus $\varphi_{n-2} = \text{Const.}$, x_{2n-2} als Function von $x_1, x_2, \ldots x_{2n-3}$.

u. s. w.

$n-1$. Aus $\varphi_2 \quad = \text{Const.}$, x_{n+2} als Function von $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$.

Setzt man in diesem Sinne:

$$\begin{array}{llll}
1. & X_i^{(1)} = X_i + \dfrac{\partial x_{2n}}{\partial x_i} X_{2n}, & & i = 1, 2, \ldots 2n-1, \\
2. & X_i^{(2)} = X_i^{(1)} + \dfrac{\partial x_{2n-1}}{\partial x_i} X_{2n-1}^{(1)}, & & i = 1, 2, \ldots 2n-2, \\
3. & X_i^{(3)} = X_i^{(2)} + \dfrac{\partial x_{2n-2}}{\partial x_i} X_{2n-2}^{(2)}, & & i = 1, 2, \ldots 2n-3, \\
& \text{u. s. w.} & & \\
n-1. & X_i^{(n-1)} = X_i^{(n-2)} + \dfrac{\partial x_{n+2}}{\partial x_i} X_{n+2}^{(n-2)}, & & i = 1, 2, \ldots n+1,
\end{array}$$

so hat man dem Vorgehenden gemäss, sich folgende identische Gleichungen zu denken:

$$(9.)\left\{\begin{array}{l}
X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n, \\
X_1^{(1)} dx_1 + X_2^{(1)} dx_2 + \cdots + X_{2n-1}^{(1)} dx_{2n-1} = F_1^{(1)} df_1^{(1)} + F_2^{(1)} df_2^{(1)} + \cdots + F_{n-1}^{(1)} df_{n-1}^{(1)}, \\
X_1^{(2)} dx_1 + X_2^{(2)} dx_2 + \cdots + X_{2n-2}^{(2)} dx_{2n-2} = F_1^{(2)} df_1^{(2)} + F_2^{(2)} df_2^{(2)} + \cdots + F_{n-2}^{(2)} df_{n-2}^{(2)}, \\
\text{u. s. w.} \\
X_1^{(n-1)} dx_1 + X_2^{(n-1)} dx_2 + \cdots + X_{n+1}^{(n-1)} dx_{n+1} = F_1^{(n-1)} df_1^{(n-1)},
\end{array}\right.$$

und aus diesen identischen Gleichungen die Bestimmungsweise folgender Functionen aufzusuchen:

$$(10.)\quad \begin{cases} \varphi_n = \Pi\left(f_1,\ f_2,\ \dots f_n,\ \frac{F_1}{F_n},\ \frac{F_2}{F_n},\ \dots \frac{F_{n-1}}{F_n}\right), \\ \varphi_{n-1} = \Pi\left(f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots f_{n-1}^{(1)}, \frac{F_1^{(1)}}{F_{n-1}^{(1)}}, \frac{F_2^{(1)}}{F_{n-1}^{(1)}}, \dots \frac{F_{n-1}^{(1)}}{F_{n-1}^{(1)}}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_1 = \Pi(f_1^{(n-1)}). \end{cases}$$

Ich werde nun zeigen, wie dieselbe aus den Gleichungen (9.) einfach hervorgeht.

§. 3.

Partielle Differentialgleichung, der jedes einzelne Integral des *Pfaff*schen Problems genügt, in dem Falle, wo ein $2n$gliedriger Differential-Ausdruck sich in determinirter Weise auf einen $n$gliedrigen bringen lässt.

Um die zu befolgende Methode deutlicher ans Licht treten zu lassen, wird es gut sein, zunächst die Aufsuchung von φ_n besonders zu behandeln, welche auf das bekannte erste *Pfaff*sche System führt.

Wenn man in der ersten der Gleichungen (9.) die x als die unabhängigen Veränderlichen ansieht, so löst dasselbe sich in ein System auf, welches durch folgende Gleichung repräsentirt wird:

$$(11.)\quad X_i = F_1\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + F_2\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + F_n\frac{\partial f_n}{\partial x_i}.$$

Aus dieser Gleichung aber ergiebt sich sofort folgende:

$$(12.)\quad \begin{cases} a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = \frac{\partial F_1}{\partial x_k}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_2}{\partial x_k}\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_k}\frac{\partial f_n}{\partial x_i} \\ \qquad - \frac{\partial F_1}{\partial x_i}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} - \frac{\partial F_2}{\partial x_i}\frac{\partial f_2}{\partial x_k} - \dots - \frac{\partial F_n}{\partial x_i}\frac{\partial f_n}{\partial x_k}, \end{cases}$$

Man kann jetzt offenbar immer solche Grössen $z_1,\ z_2,\ \dots\ z_{2n}$ bestimmen, welche den Gleichungen genügen:

$$(13.)\quad \begin{cases} X_1 = \quad * \quad a_{21}z_2 + a_{31}z_3 + \dots + a_{2n,1}z_{2n}, \\ X_2 = a_{12}z_1 + \quad * \quad + a_{32}z_3 + \dots + a_{2n,2}z_{2n}, \\ X_3 = a_{13}z_1 + a_{23}z_2 + \quad * \quad + \dots + a_{2n,3}z_{2n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{2n} = a_{1,2n}z_1 + a_{2,2n}z_2 + a_{3,2n}z_3 + \dots \quad * \end{cases}$$

Mit Hülfe der Gleichungen (11.), (12.) nehmen aber diese die Gestalt an:

$$\Sigma_h \Big\{ \frac{\partial f_h}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial F_h}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial F_h}{\partial x_2} z_2 + \cdots + \frac{\partial F_h}{\partial x_{2n}} z_{2n} + F_h\Big)$$
$$- \frac{\partial F_h}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial f_h}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial f_h}{\partial x_2} z_2 + \cdots + \frac{\partial f_h}{\partial x_{2n}} z_{2n}\Big)\Big\} = 0.$$

Diese Gleichung stellt $2n$ verschiedene vor, welche in Bezug auf die $2n$ Ausdrücke

$$\frac{\partial F_h}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial F_h}{\partial x_2} z_2 + \cdots + \frac{\partial F_h}{\partial x_{2n}} z_{2n} + F_h,$$
$$-\Big(\frac{\partial f_h}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial f_h}{\partial x_2} z_2 + \cdots + \frac{\partial f_h}{\partial x_{2n}} z_{2n}\Big)$$

linear sind und zwar so, dass die Determinante ihrer Coefficienten

$$\Delta = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}}\frac{\partial F_2}{\partial x_{n+2}}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial x_{2n}}$$

wird. Wenn also diese Determinante nicht verschwindet, so lösen sich die obigen $2n$ Gleichungen in die folgenden auf:

$$(14.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_h}{\partial x_1} z_1 + \dfrac{\partial F_h}{\partial x_2} z_2 + \cdots + \dfrac{\partial F_h}{\partial x_{2n}} z_{2n} + F_h = 0, \\ \dfrac{\partial f_h}{\partial x_1} z_1 + \dfrac{\partial f_h}{\partial x_2} z_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_h}{\partial x_{2n}} z_{2n} = 0. \end{cases}$$

Was die fragliche Determinante betrifft, so ist leicht zu entscheiden, ob sie verschwindet oder nicht. Denn man kann Δ auch in der Form darstellen:

$$\Delta = \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial x_n}\cdot\Big(-\frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}}\Big)\cdot\Big(-\frac{\partial f_2}{\partial x_{n+2}}\Big)\cdots\Big(-\frac{\partial f_n}{\partial x_{2n}}\Big).$$

Multiplicirt man diese Form mit der vorigen, so erhält man nach einem bekannten Satze, den bereits Herr *Brioschi* in dieser Art angewandt hat, eine Determinante, deren Elemente die Grössen

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_k}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_2}{\partial x_k}\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots - \frac{\partial F_1}{\partial x_i}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} - \frac{\partial F_2}{\partial x_i}\frac{\partial f_2}{\partial x_k} - \cdots = a_{ik}$$

sind; so dass also

$$(15.)\quad \Delta^2 = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{2n,2n}.$$

So ist das Verschwinden von Δ auf das Verschwinden einer bekannten Determinante zurückgeführt. Ich nehme vorerst an, dass dieselbe nicht verschwinde. Auf den entgegengesetzten Fall komme ich weiter unten zurück.

Es bestehen also die Gleichungen (14.). Aus der ersten derselben folgt noch:

$$\frac{\partial \frac{F_h}{F_n}}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial \frac{F_h}{F_n}}{\partial x_2} z_2 + \cdots + \frac{\partial \frac{F_h}{F_n}}{\partial x_{2n}} z_{2n} = 0.$$

Dies, verbunden mit den Gleichungen (14.), zeigt, dass die Lösungen der Gleichung

$$z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + z_{2n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2n}} = 0$$

folgende sind:

$$f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_n,\ \frac{F_1}{F_n},\ \frac{F_2}{F_n},\ \ldots\ \frac{F_{n-1}}{F_n};$$

mithin ist die gesuchte Function φ_n eine beliebige Lösung dieser Gleichung. Dieselbe führt, wie man unmittelbar sieht, auf das erste *Pfaff*sche System, indem hiernach φ_n ein beliebiges Integral des folgenden Systems vollständiger Differentialgleichungen ist:

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_{2n} = z_1 : z_2 : \ldots : z_{2n}.$$

§. 4.

Simultane partielle Differentialgleichungen, die in dem Falle auftreten, wo ein $p$gliedriger Differentialausdruck sich in determinirter Art auf einen $m$gliedrigen bringen lässt und $2m < p$ ist.

Ich werde jetzt eines der anderen Systeme (9.) betrachten; oder, allgemeiner, die Aufgabe behandeln, einen Ausdruck

$$(15.)\qquad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p,$$

zwischen dessen Coefficienten die geeigneten Beziehungen stattfinden, auf die Form

$$\Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_m d\varphi_m$$

zu bringen, wo $2m < p$. Es wird genügen, etwa die Function φ_m zu finden; denn ist dies gelungen, so kann man mit Hülfe der Gleichung

$$\varphi_m = \text{Const.}$$

etwa x_p eliminiren, und hat dann nach §. 2 die Aufgabe auf eine andere zurückgeführt, bei welcher sowohl p als m um Eins vermindert sind, welche aber eine ganz analoge Behandlung gestattet.

Denken wir uns den Ausdruck (15.) auf irgend eine Weise auf die Form

$$(16.)\qquad F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_m df_m$$

gebracht, so ist φ_m eine beliebige Function von

$$f_1, f_2, \dots f_m, \frac{F_1}{F_m}, \frac{F_2}{F_m}, \dots \frac{F_{m-1}}{F_m},$$

und es kommt nur darauf an, eine solche zu finden. Die Gleichsetzung der Ausdrücke (15.), (16.) führt aber zu folgenden Gleichungen:

$$(17.)\qquad X_i = F_1\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+F_2\frac{\partial f_2}{\partial x_i}+\dots+F_m\frac{\partial f_m}{\partial x_i},$$

wo i die Werthe $1, 2, \dots p$ zu erhalten hat; und aus diesen folgt ferner:

$$(18.)\qquad \begin{cases} a_{ik} = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_k}-\dfrac{\partial X_k}{\partial x_i} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x_k}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F_2}{\partial x_k}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}+\dots+\dfrac{\partial F_m}{\partial x_k}\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i} \\ \qquad -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_i}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_k}-\dfrac{\partial F_2}{\partial x_i}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_k}-\dots-\dfrac{\partial F_m}{\partial x_i}\dfrac{\partial f_m}{\partial x_k}. \end{cases}$$

Seien jetzt $k_1, k_2, \dots k_{2m}$ irgend $2m$ verschiedene Indices aus der Reihe $1, 2, \dots p$, und bestimmen wir $p-2m+1$ Grössenreihen

$$\begin{array}{llll} z_1, & z_2, & \dots & z_{2m} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(1)}, & \dots & z_{2m}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(p-2m)}, & z_2^{(p-2m)}, & \dots & z_{2m}^{(p-2m)}, \end{array}$$

so dass die erste Reihe den Gleichungen genügt:

$$(19.)\qquad \begin{cases} a_{1,k_1}\,z_1+a_{2,k_1}\,z_2+\dots+a_{2m,k_1}\,z_{2m} = X_{k_1}, \\ a_{1,k_2}\,z_1+a_{2,k_2}\,z_2+\dots+a_{2m,k_2}\,z_{2m} = X_{k_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1,k_{2m}}\,z_1+a_{2,k_{2m}}\,z_2+\dots+a_{2m,k_{2m}}\,z_{2m} = X_{k_{2m}}; \end{cases}$$

jede der anderen Reihen, z. B.

$$z_1^{(h)}, \quad z_2^{(h)}, \quad \dots \quad z_{2m}^{(h)},$$

aber einem Systeme folgender Art:

$$(20.)\qquad \begin{cases} a_{1,k_1}\,z_1^{(h)}+a_{2,k_1}\,z_2^{(h)}+\dots+a_{2m,k_1}\,z_{2m}^{(h)} = -a_{2m+h,k_1}, \\ a_{1,k_2}\,z_1^{(h)}+a_{2,k_2}\,z_2^{(h)}+\dots+a_{2m,k_2}\,z_{2m}^{(h)} = -a_{2m+h,k_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1,k_{2m}}\,z_1^{(h)}+a_{2,k_{2m}}\,z_2^{(h)}+\dots+a_{2m,k_{2m}}\,z_{2m}^{(h)} = -a_{2m+h,k_{2m}}. \end{cases}$$

Mit Hülfe der Gleichungen (17.), (18.) verwandelt sich das erste dieser Systeme in folgendes:

$$0 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2m}\Big[\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_k}\Big(z_1\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1}+z_2\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_2}+\cdots+z_{2m}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{2m}}\Big)$$
$$-\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k}\Big(z_1\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_1}+z_2\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_2}+\cdots+z_{2m}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_{2m}}+F_\lambda\Big)\Big],$$

wo dem Index k der Reihe nach die Werthe $k_1, k_2, \ldots k_{2m}$ beigelegt werden müssen. Schliesst man nun, ganz wie im vorigen §., vorläufig den Fall aus, wo die Determinante

$$\varDelta = \Sigma\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_m}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_{m+1}}\frac{\partial F_2}{\partial x_{m+2}}\cdots\frac{\partial F_m}{\partial x_{2m}}$$

verschwindet, so löst sich dieses System in die einfacheren Gleichungen auf:

$$z_1\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1}+z_2\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_2}+\cdots+z_{2m}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{2m}} = 0,$$
$$z_1\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_1}+z_2\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_2}+\cdots+z_{2m}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_{2m}}+F_\lambda = 0.$$

Aus der letzteren folgt noch, dass auch

$$z_1\frac{\partial\frac{F_\lambda}{F_m}}{\partial x_1}+z_2\frac{\partial\frac{F_\lambda}{F_m}}{\partial x_2}+\cdots+z_{2m}\frac{\partial\frac{F_\lambda}{F_m}}{\partial x_{2m}} = 0;$$

und man sieht daher, dass der Gleichung

$$(21.)\qquad z_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+z_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+z_{2m}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m}} = 0$$

die $2m-1$ Ausdrücke

$$f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_m,\ \frac{F_1}{F_m},\ \frac{F_2}{F_m},\ \ldots\ \frac{F_{m-1}}{F_m}$$

genügen; woraus weiter sich ergiebt, dass die allgemeine Lösung der Gleichung (21.) ist:

$$(22.)\qquad \varphi = \Pi\Big(f_1,\ f_2,\ \cdots\ f_m,\ \frac{F_1}{F_m},\ \frac{F_2}{F_m},\ \cdots\ \frac{F_{m-1}}{F_m},\ x_{2m+1},\ x_{2m+2},\ \ldots\ x_p\Big).$$

In ganz ähnlicher Weise geht das System (20.) mit Hülfe der Gleichungen (17.), (18.) über in:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=2m}\Big[\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_k}\Big(z_1^{(h)}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1}+z_2^{(h)}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_2}+\cdots+z_{2m}^{(h)}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{2m}}+\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{2m+h}}\Big)$$
$$-\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k}\Big(z_1^{(h)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_1}+z_2^{(h)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_2}+\cdots+z_{2m}^{(h)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_{2m}}+\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_{2m+h}}\Big)\Big] = 0,$$

wo wieder k die Werthe $k_1, k_2, \ldots k_{2m}$ erhalten muss. Und wenn $\varDelta$ nicht verschwindet, löst sich dieses System in das folgende auf:

$$z_1^{(h)}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1}+z_2^{(h)}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_2}+\cdots+z_{2m}^{(h)}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{2m}}+\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{2m+h}} = 0,$$

$$z_1^{(h)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_1}+z_2^{(h)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_2}+\cdots+z_{2m}^{(h)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_{2m}}+\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_{2m+h}} = 0.$$

Man erkennt hieraus, dass die Gleichung

$$(23.)\qquad z_1^{(h)}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}+z_2^{(h)}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}+\cdots+z_{2m}^{(h)}\frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m}}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m+h}} = 0$$

erfüllt wird, wenn man für φ eine der Functionen

$$f_1,\ f_2,\ \dots\ f_m,\ F_1,\ F_2,\ \dots\ F_m$$

einsetzt, und dass also

$$(24.)\qquad \varphi = \psi_h(f_1, f_2, \dots f_m, F_1, F_2, \dots F_m, x_{2m+1}\dots x_{2m+h-1}, x_{2m+h+1}\dots x_p)$$

die allgemeine Lösung der Gleichung (23.) ist.

Vergleicht man nunmehr die Gleichung (22.) mit den $p-2m$ Gleichungen, welche (24.) für die verschiedenen Werthe von h darstellt, so zeigt sich, dass es Functionen giebt, welche gleichzeitig unter alle diese Formen fallen, und also simultane Lösungen der Gleichungen (21.), (23.) sind. Dieselben dürfen wegen der Gleichungen (24.) die x nicht mehr explicite enthalten, da jede jener Gleichungen die Abwesenheit eines der x fordert, endlich aber können der Gleichung (22.) wegen nur die Verhältnisse der F darin vorkommen. Die allgemeinste simultane Lösung der Gleichungen (21.), (23.) ist also

$$\varphi = \Pi\left(f_1, f_2, \dots f_m, \frac{F_1}{F_m}, \frac{F_2}{F_m}, \dots \frac{F_{m-1}}{F_m}\right).$$

Dies aber ist genau die gesuchte Function, deren Kenntniss dazu dient, den vorliegenden Differentialausdruck auf die nächst einfachere Form zu reduciren. Man hat also nichts zu thun, als irgend eine simultane Lösung der Gleichungen (21.), (23.) zu suchen. Es entsteht die Frage, wie dies bewerkstelligt werden kann.

Ich bemerke zuvor, dass es offenbar gleichgültig sein muss, welche der Indices 1, 2, ... p man als k_1, k_2, ... k_{2m} zur Bildung der z verwendet; so wie dass es ganz gleichgültig ist, welche der Veränderlichen man durch die Indices 1, 2, ... $2m$ gewissermassen von den übrigen sondert. Dass dies wirklich so sein muss, liefert eben die Bedingungen, unter welchen der Ausdruck

$$X_1 dx_1+X_2 dx_2+\cdots+X_p dx_p$$

in der Form

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_m df_m$$

darstellbar ist. Es ist nach dem Vorhergehenden leicht, die übrigens bekannte Form dieser Bedingungen abzuleiten; was ich um so mehr übergehen kann, als die Aufstellung derselben für das Folgende ohne Bedeutung ist.

Im Vorigen ist der Fall ausgeschlossen, in welchem Δ verschwindet. Es ist leicht zu zeigen, wie man diese Bedingung auf eine zwischen den X stattfindende Bedingung zurückführt. Sind nämlich $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2m}$ eine Reihe von $2m$ verschiedenen Indices aus der Reihe $1, 2, \ldots p$, und setzt man

$$\begin{aligned}\Delta' &= \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_{\alpha_1}} \frac{\partial f_2}{\partial x_{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial F_1}{\partial x_{\alpha_{m+1}}} \frac{\partial F_2}{\partial x_{\alpha_{m+2}}} \cdots \\ &= \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_{\alpha_1}} \frac{\partial F_2}{\partial x_{\alpha_2}} \cdots \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_{\alpha_{m+1}}}\right) \cdot \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x_{\alpha_{m+2}}}\right) \cdots,\end{aligned}$$

so ist mit Hülfe der Gleichungen (18.) nach einem bekannten Determinantensatze:

$$\Delta\Delta' = \Sigma \pm a_{1,\alpha_1}\, a_{2,\alpha_2} \ldots a_{2m,\alpha_{2m}}.$$

Wenn also Δ verschwindet, so müssen alle Determinanten dieser Art verschwinden, bei denen eine Indicesreihe die Reihe

$$1, \quad 2, \quad \ldots \quad 2m$$

ist, während die andere Reihe

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_{2m}$$

jede beliebige sein kann.

§. 5.

Eigenschaft der gefundenen simultanen partiellen linearen Differentialgleichungen.

Die Aufgabe besteht darin, eine simultane Lösung der Gleichungen

$$(25.)\quad \left\{\begin{array}{llllll} A[\varphi] = & z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + & z_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + & z_{2m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m}} & & = 0, \\ A^{(1)}[\varphi] = & z_1^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + & z_2^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + & z_{2m}^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m}} & + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m+1}} & = 0, \\ A^{(2)}[\varphi] = & z_1^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + & z_2^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + & z_{2m}^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m}} & + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m+2}} & = 0, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A^{(p-2m)}[\varphi] = & z_1^{(p-2m)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + & z_2^{(p-2m)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + & z_{2m}^{(p-2m)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m}} & + \frac{\partial \varphi}{\partial x_p} & = 0 \end{array}\right.$$

zu finden. Man weiss dabei im Voraus, dass es immer $2m$ solcher Functionen

$$f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_m,\ F_1,\ F_2,\ \ldots\ F_m$$

giebt, mit deren Hülfe die allgemeinen Integrale der einzelnen vorliegenden Gleichungen bezüglich die folgenden Gestalten annehmen:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \psi\Big(f_1, f_2, \ldots f_m, \frac{F_1}{F_m}, \frac{F_2}{F_m}, \ldots \frac{F_{m-1}}{F_m}, x_{2m+1}, x_{2m+2}, \ldots x_{p-1}, x_p\Big),\\
\varphi &= \psi_1(f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_{m-1}, F_m, x_{2m+2}, \ldots x_{p-1}, x_p),\\
\varphi &= \psi_2(f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_{m-1}, x_{2m+1}, F_m, \ldots x_{p-1}, x_p),\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\varphi &= \psi_{p-2m}(f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_{m-1}, x_{2m+1}, x_{2m+2}, \ldots x_{p-1}, F_m).
\end{aligned}$$

Unter diesen Umständen liegt es nahe, die Functionen $f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_m$ sich als bekannt vorzustellen, und sodann als unabhängige Veränderliche in den obigen Gleichungen die Grössen

$$f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_m,\ F_1,\ F_2,\ \ldots\ F_m,\ x_{2m+1},\ x_{2m+2},\ \ldots\ x_p$$

einzuführen. Die vorstehenden $p-2m+1$ Ausdrücke von φ werden dann offenbar einzeln die allgemeinen Lösungen folgender partiellen Differentialgleichungen, in welchen die unter den Klammern ausgeführten Differentiationen sich auf die neue Wahl unabhängiger Veränderlichen beziehen:

$$\begin{aligned}
0 &= F_1\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial F_1}\Big)+F_2\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial F_2}\Big)+\cdots+F_m\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial F_m}\Big),\\
0 &= \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}}\Big)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial x_1}{\partial x_{2m+1}}\Big)+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial x_2}{\partial x_{2m+1}}\Big)+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m}}\Big(\frac{\partial x_{2m}}{\partial x_{2m+1}}\Big),\\
0 &= \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+2}}\Big)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+2}}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial x_1}{\partial x_{2m+2}}\Big)+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial x_2}{\partial x_{2m+2}}\Big)+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m}}\Big(\frac{\partial x_{2m}}{\partial x_{2m+2}}\Big),\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
0 &= \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_p}\Big)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_p}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial x_1}{\partial x_p}\Big)+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial x_2}{\partial x_p}\Big)+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m}}\Big(\frac{\partial x_{2m}}{\partial x_p}\Big).
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen müssen mit den oben angegebenen bis auf gewisse Factoren übereinstimmen; und man sieht auch, dass diese Factoren für die letzten $p-2m$ Gleichungen nur 1 sein können, da sowohl in der neuen als in der ersten Form die Differentialquotienten $\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+2}}, \ldots$ den Coefficienten 1 haben. Bezeichnet man für die erste Gleichung den unbekannten Factor, welcher beide Formen unterscheidet, durch μ, so hat man demnach folgende Gleichungen:

$$A[\varphi] = \mu\left(F_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial F_1}\right)+F_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial F_2}\right)+\cdots+F_m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial F_m}\right)\right),$$
$$A^{(1)}[\varphi] = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}}\right),$$
$$A^{(2)}[\varphi] = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+2}}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A^{(p-2m)}[\varphi] = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_p}\right).$$

Bezeichnen wir jetzt durch

$$A^{(i)}[A^{(k)}[\varphi]]$$

denjenigen Ausdruck, welcher entsteht, indem man die Operation $A^{(i)}$ auf den Ausdruck $A^{(k)}[\varphi]$ anwendet, oder indem man in $A^{(i)}[\varphi]$ an die Stelle von φ den Ausdruck $A^{(k)}[\varphi]$ treten lässt, so erhält man Relationen, welche nothwendig von der Wahl der Veränderlichen unabhängig sind, und also auch für die ursprünglichen Formen jener Operationen gelten müssen. Sind i und k irgend welche der Indices 1, 2, ... $p-2m$, so ist immer identisch:

$$(26.)\qquad A^{(i)}[A^{(k)}[\varphi]]-A^{(k)}[A^{(i)}[\varphi]] = 0.$$

Durch Verbindung der ersten Operation mit einer der anderen gewinnt man aber die identischen Gleichungen:

$$(27.)\qquad A[A^{(k)}[\varphi]]-A^{(k)}[A[\varphi]] = \left(\frac{\partial\log\mu}{\partial x_{2m+k}}\right).A[\varphi].$$

Obgleich diese Gleichungen bereits zur Begründung der folgenden Integrationsmethode hinreichen, so ist es doch zweckmässig, den wirklichen Werth des Factors μ aufzusuchen, was folgendermassen geschehen kann.

Bezeichnet man durch D die Determinante:

$$D = \Sigma\pm a_{1,k_1}\,a_{2,k_2}\ldots a_{2m,k_{2m}},$$

welche sich nach §. 4. in die beiden Factoren

$$\varDelta = \Sigma\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_m}{\partial x_m}\frac{\partial F_1}{\partial x_{m+1}}\frac{\partial F_2}{\partial x_{m+2}}\cdots\frac{\partial F_m}{\partial x_{2m}},$$
$$\varDelta' = \Sigma\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_{k_1}}\frac{\partial f_2}{\partial x_{k_2}}\cdots\frac{\partial f_m}{\partial x_{k_m}}\frac{\partial F_1}{\partial x_{k_{m+1}}}\frac{\partial F_2}{\partial x_{k_{m+2}}}\cdots\frac{\partial F}{\partial x_{k_{2m}}},$$

auflöst, so ergiebt sich durch Auflösung der Gleichungen (19.)

$$D.z_h = X_{k_1}\frac{\partial D}{\partial a_{h,k_1}}+X_{k_2}\frac{\partial D}{\partial a_{h,k_2}}+\cdots+X_{k_{2m}}\frac{\partial D}{\partial a_{h,k_{2m}}};$$

oder indem man bemerkt, dass

$$X_k = \Sigma_\lambda F_\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k},$$

$$a_{h,k} = \Sigma_\sigma \left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial x_k}\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_h} - \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_h}\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_k}\right)$$

zu setzen war:

$$\Delta\Delta'.z_h = \Sigma_i \Sigma_\lambda \Sigma_\sigma F_\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{k_i}} \left(\frac{\partial \Delta'}{\partial \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_{k_i}}} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_h}} - \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_h}} \cdot \frac{\partial \Delta'}{\partial \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_{k_i}}} \right),$$

wo die erste Summe von $i=0$ bis $i=2m$, die anderen beiden von 1 bis m zu nehmen sind. Es ist aber

$$\Sigma_i \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{k_i}} \cdot \frac{\partial \Delta'}{\partial \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_{k_i}}}$$

unter allen Umständen gleich Null; und

$$\Sigma_i \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{k_i}} \cdot \frac{\partial \Delta'}{\partial \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_{k_i}}}$$

nur von Null verschieden, wenn $\lambda = \sigma$ ist, und in diesem Falle ist es gleich Δ'. Die obige Gleichung nimmt also mit Uebergehung des Factors Δ' die Gestalt an:

$$\Delta.z_h = -\Sigma_\lambda F_\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_h}},$$

aus welcher beiläufig die willkürliche Indicesreihe $k_1, k_2, \ldots k_{2m}$ ganz verschwunden ist.

Betrachtet man nun, wie oben geschehen ist, die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_{2m}$ als Functionen von $f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_m$, und schliesst die in diesem Sinne genommenen Differentialquotienten in Klammern, so wird bekanntlich:

$$\left(\frac{\partial x_h}{\partial F_\lambda}\right) = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_h}},$$

und daher ist

$$z_h = -\left(F_1\left(\frac{\partial x_h}{\partial F_1}\right) + F_2\left(\frac{\partial x_h}{\partial F_2}\right) + \cdots + F_m\left(\frac{\partial x_h}{\partial F_m}\right)\right).$$

Bildet man also jetzt den Ausdruck $A[\varphi]$, so kommt:

$$A[\varphi] = z_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+z_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+z_{2m}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m}}$$
$$= -\left\{F_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial F_1}\right)+F_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial F_2}\right)+\cdots+F_m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial F_m}\right)\right\}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass der im Vorigen unbestimmt gelassene Factor μ den Werth -1 hat; und demnach geht die Gleichung (27.) in die einfachere Gestalt über:

$$(28.)\qquad A[A^{(k)}[\varphi]]-A^{(k)}[A[\varphi]] = 0,$$

eine Beziehung, welche sich den Gleichungen (26.) vollkommen anschliesst.

§. 6.

Integration der gefundenen simultanen partiellen Differentialgleichungen.

Jacobi hat den Weg angegeben, auf welchem man ein gemeinsames Integral eines Systems von Gleichungen

$$A[\varphi]=0,\quad A^{(1)}[\varphi]=0,\quad A^{(2)}[\varphi]=0,\quad \ldots$$

aufzusuchen hat, sobald dieselben den Gleichungen (26.), (28.) genügen, sobald es also nicht möglich ist, aus denselben durch Differentiation neue Differentialgleichungen erster Ordnung abzuleiten.

Zu diesem Ende sucht man zuerst ein Integral irgend einer dieser Gleichungen auf. Ich will annehmen, man kenne ein Integral ψ der Gleichung

$$A[\varphi] = 0.$$

Diese Gleichung wird sich im vorliegenden Falle immer deswegen zur Untersuchung empfehlen, weil sie nur auf ein System von $2m-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen führt, während jede der anderen auf $2m$ Gleichungen führt. Man kann sagen, dass ψ ein Integral einer Gleichung $(2m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung vorstellt, auf welche man jenes System zurückführen kann.

Da auf diese Weise identisch

$$A[\psi] = 0,$$

so folgt aus (28.), dass auch:

$$A[A^{(1)}[\psi]] = 0,$$

d. h. wenn ψ eine Lösung der Gleichung $A[\varphi]=0$ ist, so ist auch $A^{(1)}[\psi]$ eine solche; mithin auch $A^{(1)}[A^{(1)}[\psi]]$, etc. Setzen wir der Kürze wegen

$$A^{(1)}[\psi] = \psi',$$
$$A^{(1)}[\psi'] = \psi'',\quad \text{etc.}$$

Da es unmöglich mehr als $2m-1$ von einander unabhängige Lösungen der

Gleichung $A[\varphi]=0$ geben kann, so führt die Fortsetzung dieser Operationen unfehlbar auf eine Function $\psi^{(\mu)}$, welche sich als Function der vorhergehenden darstellen lässt, so dass

$$\psi^{(\mu)} = \Pi(\psi, \psi', \dots \psi^{(\mu-1)}),$$

wo Π zwar noch $x_{2m+1}, x_{2m+2}, \dots x_p$, aber nicht mehr $x_1, x_2, \dots x_{2m}$ enthalten darf; und zwar ist μ höchstens gleich $2m-1$, kann aber ebensowohl kleiner sein.

Man kann jetzt untersuchen, ob es eine Function φ von $\psi, \psi', \dots \psi^{(\mu-1)}$ giebt, welche zugleich die Gleichung $A^{(1)}[\varphi]$ befriedigt; dieselbe kann noch $x_{2m+1}, x_{2m+2}, \dots x_p$ enthalten, aber $x_1, x_2, \dots x_{2m}$ sollen explicite nicht mehr darin vorkommen. Ist φ eine solche Function, so wird

$$\begin{aligned}
0 &= A^{(1)}[\varphi] \\
&= \quad z_1^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+z_2^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\dots+z_{2m}^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m}}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}} \\
&= z_1^{(1)}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi'}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial x_1}+\dots+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi^{(\mu-1)}}\right)\frac{\partial\psi^{(\mu-1)}}{\partial x_1}\right) \\
&\quad +z_2^{(1)}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi'}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial x_2}+\dots+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi^{(\mu-1)}}\right)\frac{\partial\psi^{(\mu-1)}}{\partial x_2}\right) \\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\quad +z_{2m}^{(1)}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_{2m}}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi'}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial x_{2m}}+\dots+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi^{(\mu-1)}}\right)\frac{\partial\psi^{(\mu-1)}}{\partial x_{2m}}\right) \\
&\quad + \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_{2m+1}}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi'}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial x_{2m+1}}+\dots+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi^{(\mu-1)}}\right)\frac{\partial\psi^{(\mu-1)}}{\partial x_{2m+1}}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}}\right),
\end{aligned}$$

wo die in Klammern eingeschlossenen Differentialquotienten sich auf die Vorstellung beziehen, nach welcher φ als Function von $\psi, \psi', \dots \psi^{(\mu-1)}$, $x_{2m+1}, x_{2m+2}, \dots x_p$ betrachtet wird. Nach der Definition der ψ giebt aber Obiges sogleich

$$\begin{aligned}
0 = A^{(1)}[\varphi] &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\psi'+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi'}\right)\psi''+\dots+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi^{(\mu-1)}}\right)\psi^{(\mu)}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}}\right) \\
&= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\psi'+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi'}\right)\psi''+\dots+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi^{(\mu-1)}}\right)\Pi \ +\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}}\right).
\end{aligned}$$

Da in den Coefficienten dieser Gleichung die Grössen $x_1, x_2, \dots x_{2m}$ explicite nicht mehr vorkommen, so giebt es wirklich eine Function φ der verlangten Art, und dieselbe ist dann eine simultane Lösung der ersten beiden Gleichungen (25.). Die obige Gleichung aber ergiebt φ als Integral des Systems von μ gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{d\psi}{dx_{2m+1}} = \psi', \quad \frac{d\psi'}{dx_{2m+1}} = \psi'', \quad \dots \quad \frac{d\psi^{(\mu-1)}}{dx_{2m+1}} = \Pi(\psi, \psi', \dots \psi^{(\mu-1)}, x_{2m+1}, \dots),$$

oder der Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung:

$$\frac{d^\mu \psi}{dx_{2m+1}} = \Pi\left(\psi, \frac{d\psi}{dx_{2m+1}}, \frac{d^2\psi}{dx_{2m+1}^2}, \dots \frac{d^{(\mu-1)}\psi}{dx_{2m+1}^{\mu-1}}, x_{2m+1}, \dots\right).$$

Ist ein Integral dieser Gleichung:

$$\Omega\left(\psi, \frac{d\psi}{dx_{2m+1}}, \frac{d^2\psi}{dx_{2m+1}^2}, \dots \frac{d^{(\mu-1)}\psi}{dx_{2m+1}^{\mu-1}}, x_{2m+1}, \dots\right) = \text{Const.},$$

so ist

$$\varphi = \Omega(\psi, \psi', \psi'', \dots \psi^{(\mu-1)}, x_{2m+1}, \dots)$$

die gesuchte simultane Lösung der ersten beiden Gleichungen (25.).

Betrachtet man insbesondere diese Function als Lösung der ersten Gleichung (25.), so kann man offenbar aus derselben auf ganz dem nämlichen Wege, wie hier eine simultane Lösung der ersten und zweiten gefunden wurde, eine simultane Lösung der ersten und dritten finden, welche der zweiten Gleichung dann ebenfalls genügen wird. Und so kann man allmälig zu einer Function aufsteigen, welche auch noch der dritten, vierten, etc. der Gleichungen (25.) genügt, und endlich zu der gesuchten simultanen Lösung aller, wodurch denn die Aufgabe erledigt ist. Man hat dabei der Reihe nach $p-2m$ Hülfsgleichungen aufzustellen, deren Grad den $(2m-1)^{\text{ten}}$ niemals übersteigt, und *ein* Integral einer jeden zu suchen. Da zunächst die Kenntniss eines Integrals der ersten Gleichung erforderlich war, welches ebenfalls von einer gewöhnlichen Differentialgleichung $(2m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung abhängt, so bedarf man im ungünstigsten Falle je eines Integrals von $p-2m+1$ Differentialgleichungen $(2m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, um die Function φ in vorgeschriebener Weise angeben zu können.

§. 7.

Zusammenstellung der zur gegebenen Lösung nöthigen Operationen.

Die auf diese Weise gewonnene Lösung des *Pfaff*schen Problems ist demnach folgende. Ist

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2n} dx_{2n}$$

der gegebene Ausdruck, so bilde man zunächst das in §. 3 angegebene System, welches einer Differentialgleichung $(2n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung entspricht. Ein Integral derselben sei

$$\varphi_n = \text{Const.}.$$

Eliminirt man sodann x_{2n} mit Hülfe dieser Gleichung aus dem gegebenen

Ausdruck, so geht derselbe etwa über in:

$$X_1^{(1)}dx_1+X_2^{(1)}dx_2+\cdots+X_{2n-1}^{(1)}dx_{2n-1}.$$

Indem man auf diesen Ausdruck die Methode der §§. 5., 6. anwendet, wo $m=n-1$, $p=2n-1$ zu setzen ist, gelangt man zu einer Function φ_{n-1}, welche gleichzeitig 2 partiellen Differentialgleichungen genügt, und zu deren Aufstellung man je ein Integral von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen kennen muss, von welchen eine von der $(2n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, die andere von gleicher oder niedrigerer Ordnung ist.

Mit Hülfe der Gleichung $\varphi_{n-1}=\text{Const.}$ eliminirt man jetzt x_{2n-1} aus dem bereits reducirten Ausdruck, wodurch derselbe in

$$X_1^{(2)}dx_1+X_2^{(2)}dx_2+\cdots+X_{2n-2}^{(2)}dx_{2n-2}$$

übergehe. Setzt man in der Methode der §§. 5., 6. $m=n-2$, $p=2n-2$, so findet man zu diesem Ausdruck eine Function φ_{n-2}, mit Hülfe je eines Integrals von 3 Gleichungen, welche höchstens bis zur $(2n-5)^{\text{ten}}$ Ordnung ansteigen. Mit Hülfe der Gleichung $\varphi_{n-2}=\text{Const.}$ eliminirt man x_{2n-2} u. s. w. So gelangt man endlich zu einem Ausdruck:

$$X_1^{(n-1)}dx_1+X_2^{(n-1)}dx_2+\cdots+X_{n+1}^{(n-1)}dx_{n+1}.$$

Indem man auf diesen Ausdruck die Methode der §§. 5., 6. anwendet, hat man $p=n+1$, $m=1$ zu setzen. Es findet sich dann eine Function φ_1, welche gleichzeitig n verschiedenen partiellen Differentialgleichungen genügt, und durch Integration von ebensoviel einzelnen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung gewonnen wird.

Die Gleichungen

$$\varphi_n=\text{Const.},\quad \varphi_{n-1}=\text{Const.},\quad \ldots\quad \varphi=\text{Const.}$$

geben dann eine Lösung des *Pfaff*schen Problems. Im ungünstigsten Falle bedarf man zur Auffindung derselben die Kenntniss je eines Integrals von

1	Differentialgleichung	$(2n-1)^{\text{ter}}$	Ordnung,
2	- -	$(2n-3)^{\text{ter}}$	-
3	- -	$(2n-5)^{\text{ter}}$	-
. . .	. . .	. . .	. . .
n	- -	1^{ter}	- .

Die gewöhnliche Auflösung des *Pfaff*schen Problems fordert die vollständige Integration von je einem System der $(2n-1)^{\text{ten}}$, $(2n-3)^{\text{ten}}$, ... 1^{ten} Ordnung;

oder wenn man will, die Kenntniss je eines Integrals von

1	Differentialgleichung		$(2n-1)^{\text{ter}}$	Ordnung
1	-	-	$(2n-2)^{\text{ter}}$	-
2	-	-	$(2n-3)^{\text{ter}}$	-
2	-	-	$(2n-4)^{\text{ter}}$	-
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$n-1$	-	-	3^{ter}	-
$n-1$	-	-	2^{ter}	-
n	-	-	1^{ter}	- .

Man bemerkt, dass durch die vorliegende Methode die einmalige Integration sämmtlicher Differentialgleichungen gerader Ordnung erspart wird; wozu ausserdem der Umstand tritt, dass die übrigen Integrationen, welche in beiden Fällen von gleicher Zahl sind, nur im ungünstigsten Falle bis zu den angegebenen Ordnungen aufsteigen, sehr oft aber grossentheils von viel niedrigeren Ordnungen sein werden.

Wenn zwischen den Coefficienten des gegebenen Differentialausdrucks solche Relationen stattfinden, dass er durch $n-k$ Gleichungen integrirt werden kann, so ist der Verlauf folgender. Man wendet sogleich auf den gegebenen Ausdruck die Methode der §§. 5. und 6. an, indem $p=2n$, $m=n-k$ gesetzt wird, und findet ein Integral

$$\varphi_{n-k} = \text{Const.}$$

durch je einmalige Integration von $2k+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen der $2(n-k)-1^{\text{ter}}$ Ordnung (höchstens). Eliminirt man sodann mit Hülfe dieser Gleichung x_{2n} aus dem gegebenen Differentialausdruck, so erhält man ein zweites Integral $\varphi_{n-k-1}=\text{Const.}$, indem man in §§. 5. und 6. $p=2n-1$, $m=n-k-1$ setzt, durch je einmalige Integration von $2k+3$ gewöhnlichen Differentialgleichungen $2(n-k)-3^{\text{ter}}$ Ordnung, etc. So fordert die Aufgabe je ein Integral von

$2k+1$	Differentialgleichungen	$[2(n-k)-1]^{\text{ter}}$	Ordnung
$2k+2$	-	$[2(n-k)-3]^{\text{ter}}$	-
$2k+3$	-	$[2(n-k)-5]^{\text{ter}}$	-
. . .	. . .	. . .	. . .
$k+n$	-	1^{ter}	- .

§. 8.

Indeterminirter Fall des *Pfaff*schen Problems.

Es bleibt übrig, diejenigen Fälle zu untersuchen, welche im Vorhergehenden ausgeschlossen wurden. Diese Fälle sind nur scheinbar oben als Ausnahmsfälle aufgetreten. Dieselben bilden in Wirklichkeit eine besondere Klasse, welche von gleicher Allgemeinheit ist, wie die im Vorigen behandelte, und zwar so, dass bei einer geraden Anzahl von Veränderlichen im Allgemeinen der oben behandelte Fall, bei einer ungeraden Anzahl der andere auftreten wird. Diese zweite Klasse von Problemen, welcher bisher nur geringe Aufmerksamkeit geschenkt worden ist, fordert eine ganz andere Behandlung wie die vorhergehende. Indem ich den analogen Gang einschlage, werde ich zunächst den gegebenen Ausdruck

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \cdots + X_p\,dx_p$$

auf irgend eine besondere Weise in die Form

$$Fdf + F_1\,df_1 + \cdots + F_m\,df_m$$

gebracht denken; und ich nehme an, dass es nicht möglich sei, den Ausdruck in einen anderen zu verwandeln, welcher eine geringere Anzahl von Termen enthielte; wobei denn jedenfalls $p \gtreqless 2(m+1)$. Es soll die allgemeinste ähnliche Form gefunden werden, welche dieser Ausdruck annehmen kann.

Die Bedingung, welche zum Unterschied gegen die früheren Fälle hier eintreten soll, besteht darin, dass die Functionaldeterminante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f_1}{\partial x_\beta} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_\mu} \frac{\partial F}{\partial x_\nu} \frac{\partial F_1}{\partial x_\varrho} \cdots \frac{\partial F_m}{\partial x_\tau}$$

unter allen Umständen verschwinden soll, welche Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots p$ man auch an Stelle der Indices $\alpha, \beta, \ldots \tau$ treten lässt. Denn giebt es nur eine einzige derartige Combination, für welche die Determinante *nicht* verschwindet, so kann man immer die Methode des §. 4. anwenden, indem man die beiden dort benutzten Indicesreihen, mit der in Rede stehenden zusammenfallen lässt. Verschwinden aber alle Determinanten, so existirt zwischen den $2m+2$ Functionen

$$f,\ f_1,\ \ldots\ f_m,\ F,\ F_1,\ \ldots\ F_m,$$

eine Relation, welche keine der Grössen x mehr explicite enthält.

Hingegen darf es niemals vorkommen, dass sämmtliche Unterdeterminanten erster Ordnung der angeführten Determinanten verschwinden. Denn alsdann würden zwei dergleichen Relationen bestehen; man könnte etwa f und F durch die übrigen Functionen ausdrücken, und demnach auch den gegebenen Ausdruck in einen anderen verwandeln, der nur m Glieder enthält. Dies ist der gemachten Voraussetzung entgegen.

Das Verschwinden der angegebenen Determinanten ist aequivalent damit, dass in dem System

$$\begin{matrix} 0 & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{p1} \\ a_{12} & 0 & a_{32} & \dots & a_{p2} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \dots & a_{p3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1p} & a_{2p} & a_{3p} & \dots & 0 \end{matrix}$$

sämmtliche Unterdeterminanten gleich Null sind, welche aus $(2m+2)^2$ Elementen zusammengesetzt werden. Denn nach §. 4. ist jede solche Unterdeterminante entweder das Quadrat einer der erstgedachten Determinanten oder das Product von zweien derselben. Hingegen führt das Product von zweien ihrer Unterdeterminanten erster Ordnung immer auf eine Unterdeterminante des obigen Systems, welche nur aus $(2m+1)^2$ Elementen zusammengesetzt ist. Es würden daher *niemals* diese letzteren Unterdeterminanten *sämmtlich* verschwinden dürfen.

Man kann sich also den gegebenen Ausdruck in die Form

$$Fdf + F_1 df_1 + \dots + F_m df_m$$

gebracht denken, wo zwischen den Grössen F, f eine, und nicht mehr als eine, Beziehung besteht. Auch muss diese Beziehung jedenfalls eine der Functionen F enthalten, da sonst der Ausdruck sich in einen $m$gliedrigen würde überführen lassen. Sei also die gegebene Beziehung:

$$F = \Psi(f, f_1, f_2, \dots f_m, F_1, F_2, \dots F_m).$$

Die allgemeinste Form, welche jener Ausdruck annehmen kann, sei

$$\Phi d\varphi + \Phi_1 d\varphi_1 + \dots + \Phi_m d\varphi_m.$$

Betrachtet man nun als unabhängige Veränderliche $f, f_1, f_2, \dots f_m, F_1, F_2, \dots F_m, x_{2m+2}, \dots x_p$, so giebt die Gleichsetzung beider Formen folgende Gleichungen:

$$
(\mathrm{I.})\quad \begin{cases}
\Psi = \Phi \dfrac{\partial \varphi}{\partial f} + \Phi_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial f} + \cdots + \Phi_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial f}, \\
F_1 = \Phi \dfrac{\partial \varphi}{\partial f_1} + \Phi_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial f_1} + \cdots + \Phi_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial f_1}, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
F_m = \Phi \dfrac{\partial \varphi}{\partial f_m} + \Phi_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial f_m} + \cdots + \Phi_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial f_m},
\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{II.})\quad \begin{cases}
0 = \Phi \dfrac{\partial \varphi}{\partial F_1} + \Phi_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial F_1} + \cdots + \Phi_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial F_1}, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
0 = \Phi \dfrac{\partial \varphi}{\partial F_m} + \Phi_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial F_m} + \cdots + \Phi_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial F_m},
\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{III.})\quad \begin{cases}
0 = \Phi \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_{2m+2}} + \Phi_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_{2m+2}} + \cdots + \Phi_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_{2m+2}}, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
0 = \Phi \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_p} + \Phi_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_p} + \cdots + \Phi_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_p}.
\end{cases}
$$

Durch Combination der Systeme (II.), (III.) erhält man verschiedene Functionaldeterminanten, welche verschwinden müssen, und welche ausdrücken, dass eine Relation existire von der Form:

$$\Pi(f, f_1, f_2, \ldots f_m, \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m) = 0,$$

durch Π eine willkürliche Function bezeichnet. Dann aber ergiebt sich:

$$\Phi = \lambda \Pi' \varphi, \quad \Phi_1 = \lambda \Pi' \varphi_1, \quad \ldots \quad \Phi_m = \lambda \Pi' \varphi_m;$$

und aus den Gleichungen (I.):

$$\Psi = -\lambda \Pi' f, \quad F_1 = -\lambda \Pi' f_1, \quad \ldots \quad F_m = -\lambda \Pi' f_m.$$

Der Fall, wo statt der Gleichung $\Pi = 0$ mehrere ähnliche Gleichungen neben einander bestehen, lässt sich leicht beseitigen, wie in §. 1.

Aus den vorliegenden Gleichungen ergiebt sich, dass, wie auch über die willkürliche Function Π verfügt werden mag, jedenfalls $\varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_m, \Phi, \Phi_1, \ldots \Phi_m$ Functionen der f und F allein werden, ohne noch die x zu enthalten; und dass ferner, da Π noch beliebig war, für eine derselben jede beliebige Function von

$$f, f_1, \ldots f_m, F_1, \ldots F_m$$

gesetzt werden könne.

Unter den speciellen Formen wird man daher eine solche wählen können, für welche der Coefficient *eines* Differentials gleich 1 wird, oder die Form:

$$(29.)\qquad df+F_1\,df_1+F_2\,df_2+\cdots+F_m\,df_m.$$

Diese Form werde ich im Folgenden zu Grunde legen; und, indem ich mir den gegebenen Ausdruck in diese Form gebracht denke, die Functionen Φ und φ aufsuchen, durch welche derselbe auf allgemeinste Weise in die Form

$$(30.)\qquad d\varphi+\Phi_1\,d\varphi_1+\Phi_2\,d\varphi_2+\cdots+\Phi_m\,d\varphi_m$$

übergehen kann. Die oben angegebenen Gleichungen für den Zusammenhang der allgemeinen mit der speciellen Form sind dann, da Φ und Ψ gleich 1 gesetzt sind:

$$\begin{gathered}\Pi(f,f_1,f_2,\dots f_m,\varphi,\varphi_1,\varphi_2,\dots\varphi_m)=0,\\ 1=\lambda\Pi'\varphi,\quad \Phi_1=\lambda\Pi'\varphi_1,\quad\dots\quad \Phi_m=\lambda\Pi'\varphi_m,\\ 1=-\lambda\Pi'f,\quad F_1=-\lambda\Pi'f_1,\quad\dots\quad F_m=-\lambda\Pi'f_m.\end{gathered}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich noch die Beziehung

$$\Pi'\varphi+\Pi'f=0,$$

d. h. in Π dürfen die Functionen f und φ nur in der Verbindung $\varphi-f$ vorkommen; und alsdann kann man jene Gleichungen durch folgendes System ersetzen:

$$\begin{gathered}\Pi(\varphi-f,f_1,f_2,\dots f_m,\varphi_1,\varphi_2,\dots\varphi_m)=0,\\ \Phi_1=\frac{\Pi'\varphi_1}{\Pi'(\varphi-f)},\quad \Phi_2=\frac{\Pi'\varphi_2}{\Pi'(\varphi-f)},\quad\dots\quad \Phi_m=\frac{\Pi'\varphi_m}{\Pi'(\varphi-f)},\\ F_1=-\frac{\Pi'f_1}{\Pi'(\varphi-f)},\quad F_2=-\frac{\Pi'f_2}{\Pi'(\varphi-f)},\quad\dots\quad F_m=-\frac{\Pi'f_m}{\Pi'(\varphi-f)}.\end{gathered}$$

Wenn man aus diesen Gleichungen $\varphi-f$, φ_1, φ_2, ... φ_{m-1}, Φ_1, Φ_2, ... Φ_m eliminirt, so bleibt eine Beziehung zwischen φ_m, f_1, f_2, ... f_m, F_1, F_2, ... F_m übrig, welche vollkommen willkürlich ist, da Π ganz willkürlich sein konnte. *Der allgemeinste Werth von φ_m ist also eine willkürliche Function von f_1, f_2, ... f_m, F_1, F_2, ... F_m.* Auf diese Eigenschaft lässt sich die neue Methode der Behandlung des vorliegenden Problems gründen.

Denn ist etwa eine Function

$$\varphi_m=\Pi(f_1,f_2,\dots f_m,F_1,F_2,\dots F_m)$$

gefunden, und eliminirt man mit Hülfe der Gleichung $\varphi_m=\text{Const.}$ oder

$$F_m=\Psi(f_1,f_2,\dots f_m,F_1,F_2,\dots F_{m-1})$$

eine der Veränderlichen aus dem gegebenen Ausdruck, so geht derselbe in einen anderen über, welcher nur $p-1$ Veränderliche enthält, und die Form

$$df^{(1)}+F_1^{(1)}\,df_1^{(1)}+F_2^{(1)}\,df_2^{(1)}+\cdots+F_{m-1}^{(1)}\,df_{m-1}^{(1)}$$

annehmen kann. Sucht man daher wieder eine beliebige Function

$$\varphi_{m-1} = \Pi_1(f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots f_{m-1}^{(1)}, F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, \dots F_{m-1}^{(1)}),$$

und eliminirt mit Hülfe der Gleichung

$$\varphi_{m-1} = \text{Const.}$$

aufs Neue aus dem schon einmal transformirten Ausdruck eine der Veränderlichen, so erhält man einen Ausdruck mit $p-2$ Veränderlichen, welcher die Gestalt

$$df^{(2)} + F_1^{(2)} df_1^{(2)} + F_2^{(2)} df_2^{(2)} + \dots + F_{m-2}^{(2)} df_{m-2}^{(2)}$$

annehmen kann, u. s. w. Auf diese Weise gelangt man endlich zu einem Ausdruck von nicht mehr als $p-m$ Veränderlichen, welcher ein vollständiges Differential ist, und, gleich Null gesetzt, durch eine blosse Quadratur

$$\varphi = \text{Const.}$$

giebt. Die $m+1$ Gleichungen

$$\varphi_m = \text{Const.}, \quad \varphi_{m-1} = \text{Const.}, \quad \dots \quad \varphi = \text{Const.}$$

sind dann die Integralgleichungen des Problems.

Um die oben angeführte Eigenschaft nachzuweisen, welche von der Wahl der Veränderlichen unabhängig sein muss, betrachte ich den vorgelegten Differentialausdruck in der Form

$$df + F_1 df_1 + F_2 df_2 + \dots + F_m df_m,$$

und eliminire f_m mit Hülfe der Gleichung

$$F_m = \psi(f_1, f_2, \dots f_m, F_1, F_2, \dots F_{m-1}).$$

Der Ausdruck

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \dots + F_m df_m$$

enthält dann nur $2m-1$ Veränderliche, und kann also nach dem Vorigen die Gestalt annehmen:

$$d\vartheta + F_1^{(1)} df_1^{(1)} + F_2^{(1)} df_2^{(1)} + \dots + F_{m-1}^{(1)} df_{m-1}^{(1)}.$$

Setzt man also jetzt

$$f^{(1)} = f + \vartheta,$$

so geht der gegebene Differentialausdruck in

$$df^{(1)} + F_1^{(1)} df_1^{(1)} + F_2^{(1)} df_2^{(1)} + \dots + F_{m-1}^{(1)} df_{m-1}^{(1)}$$

über, was zu beweisen war.

§. 9.

Erste Methode zur Lösung des indeterminirten Falles. Aufstellung der partiellen Differentialgleichungen für die Integrale.

Um also das vorliegende Problem, dem Ausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p$$

die Gestalt

$$df + F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_m df_m$$

zu geben, vollständig lösen zu können, ist es nur nöthig zu zeigen, wie man aus dem vorgelegten Ausdruck im Stande sei, eine willkürliche Function von $f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_m$ zu finden. Zu diesem Zweck kann man zunächst aus der Gleichsetzung der obigen beiden Ausdrücke die Gleichungen bilden:

$$X_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} F_\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}.$$

Aus dieser Gleichung folgt sogleich die andere:

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_k} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} - \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_k} \right),$$

aus welcher, wie man sieht, die Function f gänzlich verschwunden ist.

Bestimmt man jetzt $2m$ Grössen $z_1^{(h)}, z_2^{(h)}, \ldots z_{2m}^{(h)}$ so, dass man, durch $k_1, k_2, \ldots k_{2m}$ irgend welche der Indices $1, 2, \ldots p$ angedeutet, die Gleichungen hat:

$$(31.)\quad \begin{cases} a_{1,k_1} z_1^{(h)} + a_{2,k_1} z_2^{(h)} + \cdots + a_{2m,k_1} z_{2m}^{(h)} = -a_{2m+h,k_1}, \\ a_{1,k_2} z_1^{(h)} + a_{2,k_2} z_2^{(h)} + \cdots + a_{2m,k_2} z_{2m}^{(h)} = -a_{2m+h,k_2}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{1,k_{2m}} z_1^{(h)} + a_{2,k_{2m}} z_2^{(h)} + \cdots + a_{2m,k_{2m}} z_{2m}^{(h)} = -a_{2m+h,k_{2m}}, \end{cases}$$

so leitet man, indem man für die a_{ik} ihre obigen Werthe einsetzt, genau wie in §. 4 die Gleichungen ab:

$$z_1^{(h)} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1} + z_2^{(h)} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m}^{(h)} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{2m}} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{2m+h}} = 0,$$

$$z_1^{(h)} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_1} + z_2^{(h)} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m}^{(h)} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_{2m}} + \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_{2m+h}} = 0,$$

welche für alle Werthe von λ gelten. Hieraus geht hervor, dass die allgemeine Lösung der Gleichung

$$(32.)\quad A^{(h)}[\varphi] = z_1^{(h)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + z_2^{(h)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + z_{2m}^{(h)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m}} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m+h}} = 0$$

eine beliebige Function von $f_1, f_2, \dots f_m, F_1, F_2, \dots F_m$, so wie von $x_{2m+1}, x_{2m+2}, \dots x_p$ ist, unter den letzteren allein x_{2m+h} ausgeschlossen. Setzt man daher für h der Reihe nach $1, 2, \dots p-2m$, so erhält man aus (32.) $p-2m$ verschiedene Gleichungen, welche eine gemeinsame Lösung zulassen, nämlich

$$\varphi = \Pi(f_1, f_2, \dots f_m, F_1, F_2, \dots F_m).$$

Dies ist aber gerade eine Function, wie sie oben gesucht wurde. Die Aufgabe ist daher auf die Aufsuchung einer gemeinsamen Lösung der Gleichungen (32.) zurückgeführt.

Es mag bemerkt werden, dass immer durch passende Wahl der Indices $k_1, k_2, \dots k_{2m}$ und indem man für $x_1, x_2, \dots x_{2m}$ unter den Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_p$ geeignete auswählt, ein solches System (31.) gebildet werden kann, dessen Determinante nicht verschwindet. Denn der Fall, in welchem sämmtliche derartige Determinanten verschwinden, ist oben besonders ausgenommen worden, und gehört nicht hierher, sondern in die *erste* Klasse von Problemen. Wenn man in den Gleichungen (32.) $f_1, f_2, \dots f_m, F_1, F_2, \dots F_m$, $x_{2m+1}, x_{2m+2}, \dots x_p$ als unabhängige Veränderliche einführt, so gehen dieselben über in:

$$A^{(1)}[\varphi] = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}}\right),$$

$$A^{(2)}[\varphi] = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+2}}\right),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$A^{(p-2m)}[\varphi] = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_p}\right).$$

Aus diesen Gleichungen geht die identische Gleichung

$$A^{(i)}[A^{(k)}[\varphi]] = A^{(k)}[A^{(i)}[\varphi]]$$

hervor, und man kann somit zur Auffindung der simultanen Lösung dieses Systems die Methode des §. 6 benutzen. Aber jede dieser Gleichungen führt einzeln auf eine Differentialgleichung $2m^{\text{ter}}$ Ordnung; mithin werden auch, wenn ein Integral einer dieser Gleichungen bekannt ist, die dort erforderlichen Hülfsgleichungen von eben dieser Ordnung sein können; und man bedarf also zur Auffindung der simultanen Lösung je ein Integral von $p-2m$ Gleichungen, welche im ungünstigsten Falle sämmtlich von der $2m^{\text{ten}}$ Ordnung sind.

Man kann nunmehr den Gang der Operationen für das Problem angeben. Es soll möglich sein, den Ausdruck

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \cdots + X_p\,dx_p$$

in die Form

$$d\varphi + \Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_m d\varphi_m$$

zu bringen. Man findet zunächst φ_m, sobald man je ein Integral von $p-2m$ Differentialgleichungen $2m^{\text{ter}}$ Ordnung angeben kann. Hat man dann mit Hülfe der Gleichung $\varphi_m = \text{Const.}$ eine der Veränderlichen aus dem vorgelegten Differentialausdruck eliminirt, so behandelt man den resultirenden ganz ähnlich, und findet φ_{m-1}, sobald man je ein Integral von $p-2m+2$ Differentialgleichungen $2m-2^{\text{ter}}$ Ordnung kennt, u. s. w. Zuletzt gelangt man zu einem Ausdruck von $p-m$ Gliedern, welcher die Integration gestattet. Die Auflösung des ganzen Problems erfordert also im ungünstigsten Falle die Kenntniss je eines Integrals von

$p-2m$	Differentialgleichungen		$2m^{\text{ter}}$	Ordnung,
$p-2m+1$	-	-	$2(m-1)^{\text{ter}}$	-
$p-2m+2$	-	-	$2(m-2)^{\text{ter}}$	-
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . .
$p-m-1$	-	-	2^{ter}	-

und eine Quadratur.

§. 10.

Zweite Methode zur Lösung des indeterminirten Falles.

Von dieser Methode ist wesentlich unterschieden eine andere, welche derjenigen näher kommt, durch welche das *Pfaff*sche Problem in der Regel bei einer ungeraden Anzahl von Veränderlichen gelöst wird. Sie beruht auf dem einfachen Gedanken, dass der Ausdruck

$$df + F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_m df_m$$

durch eine Gleichung von der Form

$$f_m = \Psi(f, f_1, f_2, \ldots f_{m-1}, F_1, F_2, \ldots F_m)$$

in einen anderen übergeführt wird, welcher die Gestalt

$$F_1^{(1)} df_1^{(1)} + F_2^{(1)} df_2^{(2)} + \cdots + F_m^{(1)} df_m^{(m)}$$

annehmen kann, ohne dass zwischen den $f_1^{(1)}$, $F^{(1)}$ eine Beziehung eintritt, welcher also der *ersten* Classe von Problemen angehört. Gelingt es daher irgend eine Function φ von $f, f_1, f_2, \ldots f_m, F_1, F_2, \ldots F_m$ aufzufinden, und eliminirt man mit Hülfe der Gleichung $\varphi = \text{Const.}$ eine der Veränderlichen, so kann man den resultirenden Ausdruck nach der Methode des §. 4. behandeln.

Um eine solche Function zu finden, kann man folgendermassen verfahren. Betrachten wir das System von Gleichungen:

$$(32^a.)\quad \begin{cases} \quad * \quad +a_{2,1}z_2 \quad +a_{3,1}z_3 \quad +\cdots+a_{2m+2,1}z_{2m+2} = X_1, \\ a_{1,2}z_1 \quad + \quad * \quad +a_{3,2}z_3 \quad +\cdots+a_{2m+2,2}z_{2m+2} = X_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{1,2m+2}z_1+a_{2,2m+2}z_2+a_{3,2m+2}z_3+\cdots+ \quad * \quad = X_{2m+2}, \end{cases}$$

wo für den Augenblick von der gegenwärtigen Bedeutung der Grössen a und X abstrahirt, und statt dessen ihnen die Bedeutung beigelegt werden soll:

$$(33.)\quad \begin{cases} X_k = \sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=m} F_\lambda \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial x_k}, \\ a_{ik} = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial X_k}{\partial x_i} = \sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=m}\left(\dfrac{\partial F_\lambda}{\partial x_k}\dfrac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} - \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial x_i}\dfrac{\partial f_\lambda}{\partial x_k}\right). \end{cases}$$

Man erhält hieraus den vorliegenden Fall, wenn man $F = 1$ annimmt.

Setzt man

$$D = \Sigma \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{2m+2,2m+2},$$

so ist bekanntlich D das Quadrat eines rationalen Ausdrucks R, und die directe Auflösung des Systems $(32^a.)$ giebt

$$(34.)\quad R.z_h = X_1\frac{\partial R}{\partial a_{h,1}}+X_2\frac{\partial R}{\partial a_{h,2}}+\cdots+X_{2m+2}\frac{\partial R}{\partial a_{h,2m+2}}.$$

Aber, wie in §. 5 bewiesen ist, folgt aus (31.) auch mit Hülfe der Gleichungen (33.):

$$(35.)\quad \varDelta.z_h = -\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m+1} F_\lambda \frac{\partial\varDelta}{\partial\dfrac{\partial F_\lambda}{\partial x_h}},$$

wobei $\varDelta$ die Determinante bedeutet:

$$\varDelta = \Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_m}{\partial x_{m+1}}\frac{\partial F}{\partial x_{m+2}}\frac{\partial F_1}{\partial x_{m+3}}\cdots\frac{\partial F_m}{\partial x_{2m+2}},$$

und wo ausserdem $\varDelta^2 = D$, so dass demzufolge

$$\varDelta = R$$

wird. Daher folgt aus den Gleichungen (34.), (35.):

$$(36.)\quad X_1\frac{\partial R}{\partial a_{h,1}}+X_2\frac{\partial R}{\partial a_{h,2}}+\cdots+X_{2m+2}\frac{\partial R}{\partial a_{h,2m+2}} = -\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} F_\lambda\frac{\partial\varDelta}{\partial\dfrac{\partial F_\lambda}{\partial x_h}}.$$

Die Ableitung dieser Gleichung beruht auf rein algebraischen Principien, und die Gleichung ist daher mit Rücksicht auf die Gleichungen (33.) unter allen Umständen eine identische. Sie kann nicht aufhören zu gelten, wenn auch $F=1$ gesetzt wird; wobei denn freilich Δ verschwindet, die z hingegen unendlich grosse Werthe annehmen.

Setzt man aber $F=1$, wie es im vorliegenden Falle geschehen muss, so verschwindet der Ausdruck $\dfrac{\partial \Delta}{\partial \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial x_h}}$ jedesmal, wenn nicht $\lambda=0$ ist. Setzt man also der Kürze wegen

$$(37.)\qquad X_1\frac{\partial R}{\partial a_{h,1}}+X_2\frac{\partial R}{\partial a_{h,2}}+\cdots+X_{2m+2}\frac{\partial R}{\partial a_{h,2m+2}} = Z_h,$$

so geht die Gleichung (36.) über in:

$$Z_h = -\frac{\partial \Delta}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial x_h}}.$$

Man erhält ferner, wenn φ eine beliebige Function bedeutet:

$$Z_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+Z_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+Z_{2m+2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+2}}$$
$$= -\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_m}{\partial x_{m+1}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{m+2}}\frac{\partial F_1}{\partial x_{m+3}}\cdots\frac{\partial F_m}{\partial x_{2m+2}}.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$A[\varphi] = Z_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+Z_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+Z_{2m+2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+2}} = 0$$

ist daher

$$\varphi = \Pi(f, f_1, \ldots f_m, F_1, \ldots F_m, x_{2m+3}, x_{2m+4}, \ldots x_p).$$

Bildet man jetzt $R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots R^{(p-2m-2)}$ ähnlich wie R, indem man an Stelle der a mit einem der Indices $2m+2$ der Reihe nach Grössen a eintreten lässt, welche die Indices $2m+3$, $2m+4$, ... p haben, und bildet man dann die Ausdrücke

$$Z_h^{(1)} = X_1\frac{\partial R^{(1)}}{\partial a_{h,1}}+X_2\frac{\partial R^{(1)}}{\partial a_{h,2}}+\cdots+X_{2m+1}\frac{\partial R^{(1)}}{\partial a_{h,2m+1}}+X_{2m+3}\frac{\partial R^{(1)}}{\partial a_{h,2m+3}},$$
$$Z_h^{(1)} = X_1\frac{\partial R^{(2)}}{\partial a_{h,1}}+X_2\frac{\partial R^{(2)}}{\partial a_{h,2}}+\cdots+X_{2m+1}\frac{\partial R^{(2)}}{\partial a_{h,2m+1}}+X_{2m+4}\frac{\partial R^{(2)}}{\partial a_{h,2m+4}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so gestatten die Gleichungen

$$(38.)\quad\begin{cases} A[\varphi] = Z_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} + Z_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \cdots + Z_{2m+1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}} + Z_{2m+2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+2}} = 0,\\ A^{(1)}[\varphi] = Z_1^{(1)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} + Z_2^{(1)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \cdots + Z_{2m+1}^{(1)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}} + Z_{2m+3}^{(1)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+3}} = 0,\\ A^{(2)}[\varphi] = Z_1^{(2)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} + Z_2^{(2)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \cdots + Z_{2m+1}^{(2)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}} + Z_{2m+4}^{(2)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+4}} = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

offenbar eine gemeinsame Lösung, nämlich

$$\varphi = \Pi(f, f_1, \dots f_m, F_1, F_2, \dots F_m).$$

Dies ist gerade die gesuchte Function; und die Aufgabe kommt daher zurück auf die Aufgabe, eine gemeinschaftliche Lösung der Gleichungen (38.) zu finden.

Dividirt man aber diese Gleichungen respective durch Z_{2m+2}, $Z_{2m+3}^{(1)}$, ..., und führt dann als unabhängige Veränderliche die Grössen

$$f,\ f_1,\ f_2,\ \dots\ f_m,\ F_1,\ F_2,\ \dots\ F_m,\ x_{2m+2},\ x_{2m+3},\ \dots\ x_p$$

ein, so erhält man sogleich:

$$\begin{aligned} B[\varphi] &= \frac{1}{Z_{2m+2}}A[\varphi] &&= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+2}}\right),\\ B^{(1)}[\varphi] &= \frac{1}{Z_{2m+3}^{(1)}}A^{(1)}[\varphi] &&= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+3}}\right),\\ &\dots\dots\dots\dots\\ B^{(p-2m-2)}[\varphi] &= \frac{1}{Z_p^{(p-2m-2)}}A^{(p-2m-2)}[\varphi] &&= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_p}\right). \end{aligned}$$

Es gelten daher wieder die Gleichungen

$$B^{(i)}[B^{(k)}[\varphi]] = B^{(k)}[B^{(i)}[\varphi]];$$

und man kann also die Methode des §. 6 auf diese Gleichungen anwenden. Die Auffindung der simultanen Lösung erfordert je ein Integral von $p-2m-1$ Differentialgleichungen, welche sämmtlich bis zur $2m+1^{\text{ten}}$ Ordnung aufsteigen können.

Da durch die Gleichung $\varphi = \text{Const.}$ alsdann das Problem auf eines der ersten Art zurückgeführt wird, so erfordert auf diesem Wege die vollständige Lösung des Problems im ungünstigsten Falle die Kenntniss je eines Integrals von

$p-2m-1$	Differentialgleichungen		$(2m+1)^{\text{ter}}$	Ordnung
$p-2m$	-	-	$(2m-1)^{\text{ter}}$	-
$p-2m+1$	-	-	$(2m-3)^{\text{ter}}$	-
. . . . .	. . . . .	. . .	. . . . .	. . .
$p-m-1$	-	-	1^{ter}	- .

Vergleicht man dies mit dem Ende des vorigen §., so erkennt man, dass im Allgemeinen die dort angegebene Methode vor dieser wegen der niedrigeren Ordnung der Operationen den Vorzug verdienen wird. Aber wenn zufällig ein simultanes Integral der Gleichungen (38.) bekannt ist, so ist ihrerseits die Ordnung der Operationen für die letzte Methode die niedrigere, und die letzte verdient also den Vorzug. Dies tritt z. B. ein, wenn der gegebene Differentialausdruck nur $2m+1$ Veränderliche enthält. Dann verschwinden sämmtliche Grössen Z, und jede beliebige Function der Veränderlichen kann als simultanes Integral der Gleichungen (38.) angesehen werden; d. h. man reducirt den Differentialausdruck auf einen anderen von $2m$ Veränderlichen, indem man zwischen den vorliegenden $2m+1$ Veränderlichen eine beliebige Beziehung festsetzt. Dies ist der gewöhnliche Weg, der eben hier auch den Vorzug verdient.

§. 11.

Vollständige Durchführung der successiven Lösung des *Pfaff*schen Problems für den determinirten Fall.

Im Vorhergehenden sind die Methoden kurz skizzirt, mit deren Hülfe man in allen Fällen auf möglichst kurzem Wege zur Lösung des *Pfaff*schen Problems gelangt. Ich kehre jetzt zu demjenigen Problem zurück, welches wegen seiner Beziehungen zu den partiellen Differentialgleichungen vorzugsweise Aufmerksamkeit erregt, nämlich zu dem Problem, den Ausdruck

$$(1.)\qquad X_1\,dx_1+X_2\,dx_2+\cdots+X_{2n}\,dx_{2n}$$

auf die Form

$$F_1\,df_1+F_2\,df_2+\cdots+F_n\,df_n$$

zurückzuführen; und ich werde an die in §. 7 gegebene Lösung einige weitere Bemerkungen knüpfen.

Der Gang der dort angegebenen Operationen ist folgender. Zunächst bestimmt man aus den linearen Gleichungen

$$(2.)\qquad \begin{cases} \quad * \quad +a_{2,1}z_2+a_{3,1}z_3+\cdots+a_{2n,1}z_{2n} = X_1, \\ a_{1,2}z_1+\quad * \quad +a_{3,2}z_3+\cdots+a_{2n,2}z_{2n} = X_2, \\ a_{1,3}z_1+a_{2,3}z_2+\quad * \quad +\cdots+a_{2n,3}z_{2n} = X_3, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{1,2n}z_1+a_{2,2n}z_2+a_{3,2n}z_3+\cdots+\quad * \quad = X_{2n}, \end{cases}$$

wo

$$a_{i,k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i},$$

die Unbekannten z, sucht eine Lösung φ_n der Gleichung

$$(3.)\qquad z_1\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}+z_2\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}+\cdots+z_{2n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_{2n}} = 0,$$

und betrachtet dann in Folge der Gleichung

$$\varphi_n = c_n,$$

wo c_n eine willkürliche Constante bezeichnet, x_{2n} als Function von $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}, c_n$. Hierdurch geht der Ausdruck (1.) über in

$$(4.)\qquad X_1^{(1)}dx_1+X_2^{(1)}dx_2+\cdots+X_{2n-1}^{(1)}dx_{2n-1},$$

wo

$$(5.)\qquad X_k^{(i)} = X_k+X_{2n}\frac{\partial x_{2n}}{\partial x_k}$$

gesetzt ist. Wird nunmehr auch

$$(6.)\qquad a_{i,k}^{(1)} = \frac{\partial X_i^{(1)}}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k^{(1)}}{\partial x_i}$$

gesetzt, wo aber bei der Differentiation $X_i^{(1)}$, $X_k^{(1)}$ als Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}, c_n$ zu betrachten sind, so hat man die beiden Systeme von Gleichungen zu bilden:

$$(7.)\qquad \left\{\begin{array}{llllll} * & +a_{2,1}^{(1)}z_{2,1} & +a_{3,1}^{(1)}z_{3,1} & +\cdots+a_{2n-2,1}^{(1)}z_{2n-2,1} & = & X_1^{(1)},\\ a_{1,2}^{(1)}z_{1,1} & + \quad * & +a_{3,2}^{(1)}z_{3,1} & +\cdots+a_{2n-2,2}^{(1)}z_{2n-2,1} & = & X_2^{(1)},\\ a_{1,3}^{(1)}z_{1,1} & +a_{2,3}^{(1)}z_{2,1} & + \quad * & +\cdots+a_{2n-2,3}^{(1)}z_{2n-2,1} & = & X_3^{(1)},\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{1,2n-2}^{(1)}z_{1,1} & +a_{2,2n-2}^{(1)}z_{2,1} & +a_{3,2n-2}^{(1)}z_{3,1} & +\cdots+ \quad * & = & X_{2n-2}^{(1)}, \end{array}\right.$$

$$(8.)\qquad \left\{\begin{array}{llllll} * & +a_{2,1}^{(1)}z'_{2,1} & +a_{3,1}^{(1)}z'_{3,1} & +\cdots+a_{2n-2,1}^{(1)}z'_{2n-2,1} & = & -a_{2n-1,1}^{(1)},\\ a_{1,2}^{(1)}z'_{1,1} & + \quad * & +a_{3,2}^{(1)}z'_{3,1} & +\cdots+a_{2n-2,2}^{(1)}z'_{2n-2,1} & = & -a_{2n-1,2}^{(1)},\\ a_{1,3}^{(1)}z'_{1,1} & +a_{2,3}^{(1)}z'_{2,1} & + \quad * & +\cdots+a_{2n-2,3}^{(1)}z'_{2n-2,1} & = & -a_{2n-1,3}^{(1)},\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{1,2n-2}^{(1)}z'_{1,1} & +a_{2,2n-2}^{(1)}z'_{2,1} & +a_{3,2n-2}^{(1)}z'_{3,1} & +\cdots+ \quad * & = & -a_{2n-1,2n-2}^{(1)} \end{array}\right.$$

und eine gemeinschaftliche Lösung der beiden Gleichungen

$$(9.)\qquad \left\{\begin{array}{l} z_{1,1}\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_1}+z_{2,1}\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_2}+\cdots+z_{2n-2,1}\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{2n-2}} = 0,\\ z'_{1,1}\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_1}+z'_{2,1}\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_2}+\cdots+z'_{2n-2,1}\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{2n-2}}+\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{2n-1}} = 0 \end{array}\right.$$

aufzusuchen. Setzt man

$$(10.)\qquad \varphi_{n-1} = c_{n-1},$$

so wird x_{2n-1} eine Function von $x_1, x_2, \dots x_{2n-2}, c_n, c_{n-1}$, und indem man dies einführt, geht der gegebene Differentialausdruck über in:

$$(11.)\qquad X_1^{(2)} dx_1 + X_2^{(2)} dx_2 + \cdots + X_{2n-2}^{(2)} dx_{2n-2},$$

wo

$$(12.)\qquad X_k^{(2)} = X_k^{(1)} + X_{2n-1}^{(1)} \frac{\partial x_{2n-1}}{\partial x_k}.$$

Sei nun wieder:

$$(13.)\qquad a_{i,k}^{(2)} = \frac{\partial X_i^{(2)}}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k^{(2)}}{\partial x_i},$$

wobei $X_i^{(2)}$, $X_k^{(2)}$ als Functionen von $x_1, x_2, \dots x_{2n-2}, c_n, c_{n-1}$ betrachtet werden müssen. Aus diesen Grössen setzt man dann folgende Systeme von Gleichungen zusammen:

$$(14.)\qquad \begin{cases} * + a_{2,1}^{(2)} z_{2,2} + a_{3,1}^{(2)} z_{3,2} + \cdots + a_{2n-4,1}^{(2)} z_{2n-4,2} = X_1^{(2)}, \\ a_{1,2}^{(2)} z_{1,2} + * + a_{3,2}^{(2)} z_{3,2} + \cdots + a_{2n-4,2}^{(2)} z_{2n-4,2} = X_2^{(2)}, \\ a_{1,3}^{(2)} z_{1,2} + a_{2,3}^{(2)} z_{2,2} + * + \cdots + a_{2n-4,3}^{(2)} z_{2n-4,2} = X_3^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1,2n-4}^{(2)} z_{1,2} + a_{2,2n-4}^{(2)} z_{2,2} + a_{3,2n-4}^{(2)} z_{3,2} + \cdots + * = X_{2n-4}^{(2)}, \end{cases}$$

$$(15.)\qquad \begin{cases} * + a_{2,1}^{(2)} z'_{2,2} + a_{3,1}^{(2)} z'_{3,2} + \cdots + a_{2n-4,1}^{(2)} z'_{2n-4,2} = -a_{2n-3,1}^{(2)}, \\ a_{1,2}^{(2)} z'_{1,2} + * + a_{3,2}^{(2)} z'_{3,2} + \cdots + a_{2n-4,2}^{(2)} z'_{2n-4,2} = -a_{2n-3,2}^{(2)}, \\ a_{1,3}^{(2)} z'_{1,2} + a_{2,3}^{(2)} z'_{2,2} + * + \cdots + a_{2n-4,3}^{(2)} z'_{2n-4,2} = -a_{2n-3,3}^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1,2n-4}^{(2)} z'_{1,2} + a_{2,2n-4}^{(2)} z'_{2,2} + a_{3,2n-4}^{(2)} z'_{3,2} + \cdots + * = -a_{2n-3,2n-4}^{(2)}, \end{cases}$$

$$(16.)\qquad \begin{cases} * + a_{2,1}^{(2)} z''_{2,2} + a_{3,1}^{(2)} z''_{3,2} + \cdots + a_{2n-4,1}^{(2)} z''_{2n-4,2} = -a_{2n-2,1}^{(2)}, \\ a_{1,2}^{(2)} z''_{1,2} + * + a_{3,2}^{(2)} z''_{3,2} + \cdots + a_{2n-4,2}^{(2)} z''_{2n-4,2} = -a_{2n-2,2}^{(2)}, \\ a_{1,3}^{(2)} z''_{1,2} + a_{2,3}^{(2)} z''_{2,2} + * + \cdots + a_{2n-4,3}^{(2)} z''_{2n-4,2} = -a_{2n-2,3}^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1,2n-4}^{(2)} z''_{1,2} + a_{2,2n-4}^{(2)} z''_{2,2} + a_{3,2n-4}^{(2)} z''_{3,2} + \cdots + * = -a_{2n-2,2n-4}^{(2)}, \end{cases}$$

und sucht eine gemeinschaftliche Lösung der Gleichungen:

$$(17.)\qquad \begin{cases} z_{1,2} \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_1} + z_{2,2} \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_2} + \cdots + z_{2n-4,2} \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_{2n-4}} = 0, \\ z'_{1,2} \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_1} + z'_{2,2} \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_2} + \cdots + z'_{2n-4,2} \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_{2n-4}} + \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_{2n-3}} = 0, \\ z''_{1,2} \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_1} + z''_{2,2} \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_2} + \cdots + z''_{2n-4,2} \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_{2n-4}} + \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_{2n-2}} = 0. \end{cases}$$

Man setzt dann $\varphi_{n-2}=c_{n-2}$, und bestimmt daraus x_{2n-2} als Function von $x_1, x, \ldots x_{2n-3}, c_n, c_{n-1}, c_{n-2}$ u. s. w.

Indem man auf diese Weise fortfährt, gelangt man zu einer Function φ_{n-k}, welche die gemeinschaftliche Lösung von folgenden $k+1$ Gleichungen wird:

$$
(18.)\quad \begin{cases}
z_{1,k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_1}+z_{2,k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_2}+\cdots+z_{2(n-k),k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_{2(n-k)}} = 0,\\[2mm]
z'_{1,k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_1}+z'_{2,k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_2}+\cdots+z'_{2(n-k),k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_{2(n-k)}}+\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_{2(n-k)+1}} = 0,\\[2mm]
z''_{1,k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_1}+z''_{2,k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_2}+\cdots+z''_{2(n-k),k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_{2(n-k)}}+\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_{2(n-k)+2}} = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
z^{(k)}_{1,k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_1}+z^{(k)}_{2,k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_2}+\cdots+z^{(k)}_{2(n-k),k}\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_{2(n-k)}}+\dfrac{\partial\varphi_{n-k}}{\partial x_{2n-k}} = 0.
\end{cases}
$$

In diesen Gleichungen bestimmen sich die Coefficienten $z_{i,k}$ durch das System:

$$
(19.)\quad \begin{cases}
\quad * \quad + a^{(k)}_{2,1}z_{2,k} + a^{(k)}_{3,1}z_{3,k} + \cdots + a^{(k)}_{2(n-k),1}z_{2(n-k),k} = X^{(k)}_1,\\
a^{(k)}_{1,2}z_{1,k} + \quad * \quad + a^{(k)}_{3,2}z_{3,k} + \cdots + a^{(k)}_{2(n-k),2}z_{2(n-k),k} = X^{(k)}_2,\\
a^{(k)}_{1,3}z_{1,k} + a^{(k)}_{2,3}z_{2,k} + \quad * \quad + \cdots + a^{(k)}_{2(n-k),3}z_{2(n-k),k} = X^{(k)}_3,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a^{(k)}_{1,2(n-k)}z_{1,k} + a^{(k)}_{2,2(n-k)}z_{2,k} + a^{(k)}_{3,2(n-k)}z_{3,k} + \cdots + \quad * \quad = X^{(k)}_{2(n-k)},
\end{cases}
$$

und irgend eine der anderen Coefficientenreihen, z. B. $z^{(h)}_{1,k}, z^{(h)}_{2,k}, \ldots$, bestimmt sich aus dem System

$$
(20.)\quad \begin{cases}
\quad * \quad + a^{(k)}_{2,1}z^{(h)}_{2,k} + a^{(k)}_{3,1}z^{(h)}_{3,k} + \cdots + a^{(k)}_{2(n-k),1}z^{(h)}_{2(n-k),k} = -a^{(k)}_{2(n-k)+h,1},\\
a^{(k)}_{1,2}z^{(h)}_{1,k} + \quad * \quad + a^{(k)}_{3,2}z^{(h)}_{3,k} + \cdots + a^{(k)}_{2(n-k),2}z^{(h)}_{2(n-k),k} = -a^{(k)}_{2(n-k)+h,2},\\
a^{(k)}_{1,3}z^{(h)}_{1,k} + a^{(k)}_{2,3}z^{(h)}_{2,k} + \quad * \quad + \cdots + a^{(k)}_{2(n-k),3}z^{(h)}_{2(n-k),k} = -a^{(k)}_{2(n-k)+h,3},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a^{(k)}_{1,2(n-k)}z^{(h)}_{1,k} + a^{(k)}_{2,2(n-k)}z^{(h)}_{2,k} + a^{(k)}_{3,2(n-k)}z^{(h)}_{3,k} + \cdots + \quad * \quad = -a^{(k)}_{2(n-k)+h,2(n-k)}.
\end{cases}
$$

Endlich ist noch

$$
(21.)\quad a^{(k)}_{i,m} = \frac{\partial X^{(k)}_i}{\partial x_m} - \frac{\partial X^{(k)}_m}{\partial x_i};
$$

die $X^{(k)}_i$, $X^{(k)}_m$ sind die Coefficienten desjenigen Ausdrucks, in welchen (1.) übergeht, wenn man mit Hülfe der Gleichungen

$$
\varphi_n = c_n,\quad \varphi_{n-1}=c_{n-1},\quad \ldots\quad \varphi_{n-k+1}=c_{n-k+1}
$$

die Veränderlichen x_{2n}, x_{2n-1}, ... x_{2n-k+1} eliminirt, und bei den Differentiationen in (21.) ist darauf Rücksicht zu nehmen, dass x_1, x_2, ... x_{2n-k}, c_n, c_{n-1}, ... c_{n-k+1} als die unabhängigen Veränderlichen betrachtet werden.

§. 12.

Transformation der bisherigen successiven Lösung in eine gleichzeitige.

In den vorstehenden Formeln ist

φ_n eine Function von $x_1, x_2, \dots x_{2n-3}, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n}$,

φ_{n-1} - - - $x_1, x_2, \dots x_{2n-3}, x_{2n-2}, x_{2n-1}, c_n$,

φ_{n-2} - - - $x_1, x_2, \dots x_{2n-3}, x_{2n-2}, c_{n-1}, c_n$,

φ_{n-3} - - - $x_1, x_2, \dots x_{2n-3}, c_{n-2}, c_{n-1}, c_n$.

u. s. w.

Bedient man sich jetzt der Gleichungen

$$\varphi_n = c_n, \quad \varphi_{n-1} = c_{n-1}, \quad \varphi_{n-2} = c_{n-2}, \quad \text{etc.}$$

um aus φ_{n-1}, φ_{n-2} etc. die Constanten c zu eliminiren, so gehen φ_n, φ_{n-1} etc. in Functionen der x allein über, welche durch

$$H_n = c_n, \quad H_{n-1} = c_{n-1}, \quad \dots \quad H_1 = c_1$$

bezeichnet sein mögen, und welche zusammen ebenfalls eine Lösung des *Pfaff*schen Problems vorstellen. Es entsteht die Frage, wie man die Gleichungen (3.), (9.), (17.), (18.) des vorigen §. so umgestalten kann, dass in ihnen die Functionen H als die Unbekannten erscheinen. Diese Umgestaltung kann man in passender Weise folgendermassen bewirken.

Man kann sich die Function φ_{n-k} aus H_{n-k} dadurch entstanden denken, dass man aus dieser Function die Veränderlichen x_{2n}, x_{2n-1}, ... x_{2n-k+1} mit Hülfe der Gleichungen

$$H_n = c_n, \quad H_{n-1} = c_{n-1}, \quad \dots \quad H_{n-k+1} = c_{n-k+1}$$

eliminirt, wobei denn die x_{2n}, x_{2n-1}, ... x_{2n-k+1} als Functionen von x_1, x_2, ... x_{2n-k}, c_{n-k+1}, c_{n-k+2}, ... c_n erscheinen. Die Differentialquotienten von φ_{n-k}, welche in (18.) vorkommen, sind also an die Differentialquotienten von H_{n-k} durch die Gleichungen gebunden:

$$\frac{\partial \varphi_{n-k}}{\partial x_i} = \frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_{2n-k+1}} \cdot \frac{\partial x_{2n-k+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_{2n-k+2}} \cdot \frac{\partial x_{2n-k+2}}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial H_{n-k}}{\partial x_{2n}} \cdot \frac{\partial x_{2n}}{\partial x_i},$$

wo dem Index i der Reihe nach die Werthe 1, 2, ... $2n-k$ beizulegen sind.

Führt man dies in die Gleichungen (18.) ein, so nehmen sie folgende Gestalt an:

$$(22.)\begin{cases} 0 = \sum\limits_{i=1}^{i=2(n-k)} z_{i,k}\dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_i} + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_\lambda}\left(z_{1,k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_1} + z_{2,k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z_{2(n-k),k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)}}\right) \\ 0 = \sum\limits_{i=1}^{i=2(n-k)} z'_{i,k}\dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_{2(n-k)+1}} \\ \qquad + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_\lambda}\left(z'_{1,k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_1} + z'_{2,k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z'_{2(n-k),k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)}} + \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)+1}}\right) \\ 0 = \sum\limits_{i=1}^{i=2(n-k)} z''_{i,k}\dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_{2(n-k)+2}} \\ \qquad + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_\lambda}\left(z''_{1,k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_1} + z''_{2,k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z''_{2(n-k),k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)}} + \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)+2}}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = \sum\limits_{i=1}^{i=2(n-k)} z^{(k)}_{i,k}\dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_{2n-k}} \\ \qquad + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_\lambda}\left(z^{(k)}_{1,k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_1} + z^{(k)}_{2,k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_2} + \cdots + z^{(k)}_{2(n-k),k}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)}} + \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2n-k}}\right). \end{cases}$$

Denken wir uns, dass schliesslich die Function H_{n-k} folgenden $k+1$ Gleichungen genüge:

$$(22^a.)\begin{cases} u_1^{(k)}\dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_1} + u_2^{(k)}\dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_2} + \cdots + u_{2n}^{(k)}\dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_{2n}} = 0 = U^{(k)}(H_{n-k}), \\ u_{1,1}^{(k)}\dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_1} + u_{2,1}^{(k)}\dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_2} + \cdots + u_{2n,1}^{(k)}\dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_{2n}} = 0 = U_1^{(k)}(H_{n-k}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{1,k}^{(k)}\dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_1} + u_{2,k}^{(k)}\dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_2} + \cdots + u_{2n,k}^{(k)}\dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_{2n}} = 0 = U_k^{(k)}(H_{n-k}), \end{cases}$$

so müssen die Gleichungen (22.) offenbar lineare Combinationen dieser Gleichungen sein; oder mit anderen Worten, es müssen solche Multiplicatoren $K_{\alpha,\beta}$ existiren, dass:

$$(23.)\begin{cases} K_{0,0}u_i^{(k)} + K_{0,1}u_{i,1}^{(k)} + K_{0,2}u_{i,2}^{(k)} + \cdots + K_{0,k}u_{i,k}^{(k)} = z_{i,k}, \\ K_{1,0}u_i^{(k)} + K_{1,1}u_{i,1}^{(k)} + K_{1,2}u_{i,2}^{(k)} + \cdots + K_{1,k}u_{i,k}^{(k)} = z_{i,k}^{(1)}, \\ K_{2,0}u_i^{(k)} + K_{2,1}u_{i,1}^{(k)} + K_{2,2}u_{i,2}^{(k)} + \cdots + K_{2,k}u_{i,k}^{(k)} = z_{i,k}^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_{k,0}u_i^{(k)} + K_{k,1}u_{i,1}^{(k)} + K_{k,2}u_{i,2}^{(k)} + \cdots + K_{k,k}u_{i,k}^{(k)} = z_{i,k}^{(k)}, \end{cases}$$

für $i=1, 2, \dots 2(n-k)$; dass ferner für $h=2(n-k)+1, 2(n-k)+2, \dots 2n-k$:

$$(24.)\quad \begin{cases} K_{0,0}\, u_h^{(k)} + K_{0,1} u_{h,1}^{(k)} + \dots + K_{0,k}\, u_{h,k}^{(k)} = 0, \\ K_{1,0}\, u_h^{(k)} + K_{1,1}\, u_{h,1}^{(k)} + \dots + K_{1,k}\, u_{h,k}^{(k)} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ K_{k,0} u_h^{(k)} + K_{k,1} u_{h,1}^{(k)} + \dots + K_{k,k}\, u_{h,k}^{(k)} = 0, \end{cases}$$

ausgenommen, wenn in den letzten k Gleichungen h respective die Werthe $2(n-k)+1$ in der zweiten Gleichung, $2(n-k)+2$ in der dritten, etc. annimmt, wo denn:

$$(25.)\quad \begin{cases} K_{1,0} u_{2(n-k)+1}^{(k)} + K_{1,1}\, u_{2(n-k)+1,1}^{(k)} + \dots + K_{1,k} u_{2(n-k)+1,k}^{(k)} = 1, \\ K_{2,0} u_{2(n-k)+2}^{(k)} + K_{2,1} u_{2(n-k)+2,1}^{(k)} + \dots + K_{2,k} u_{2(n-k)+2,k}^{(k)} = 1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ K_{k,0} u_{2n-k}^{(k)} \quad + K_{k,1} u_{2n-k,1}^{(k)} \quad + \dots + K_{k,k}\, u_{2n-k,k}^{(k)} \quad = 1; \end{cases}$$

dass endlich für $\lambda = 2n-k+1, 2n-k+2, \dots 2n$:

$$(26.)\quad \begin{cases} K_{0,0} u_\lambda^{(k)} + K_{0,1}\, u_{\lambda,1}^{(k)} + K_{0,2}\, u_{\lambda,2}^{(k)} + \dots + K_{0,k}\, u_{\lambda,k}^{(k)} \\ \qquad = z_{1,k} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_1} + z_{2,k} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_2} + \dots + z_{2(n-k),k} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)}}, \\ K_{1,0} u_\lambda^{(k)} + K_{1,1}\, u_{\lambda,1}^{(k)} + K_{1,2}\, u_{\lambda,2}^{(k)} + \dots + K_{1,k}\, u_{\lambda,k}^{(k)} \\ \qquad = z'_{1,k} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_1} + z'_{2,k} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_2} + \dots + z'_{2(n-k),k} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)}} + \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)+1}}, \\ K_{2,0} u_\lambda^{(k)} + K_{2,1}\, u_{\lambda,1}^{(k)} + K_{2,2}\, u_{\lambda,2}^{(k)} + \dots + K_{2,k} u_{\lambda,k}^{(k)} \\ \qquad = z''_{1,k} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_1} + z''_{2,k} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_2} + \dots + z''_{2(n-k),k} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)}} + \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)+2}}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ K_{k,0} u_\lambda^{(k)} + K_{k,1}\, u_{\lambda,1}^{(k)} + K_{k,2}\, u_{\lambda,2}^{(k)} + \dots + K_{k,k} u_{\lambda,k}^{(k)} \\ \qquad = z_{1,k}^{(k)} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_1} + z_{2,k}^{(k)} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_2} + \dots + z_{2(n-k),k}^{(k)} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)}} + \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2n-k}}. \end{cases}$$

Wenn die Grössen K und u diesen Gleichungen genügen, so sind die Gleichungen (22.) identisch mit folgendem System:

$$(27.)\quad \begin{cases} 0 = K_{0,0} U^{(k)}(H_{n-k}) + K_{0,1} U_1^{(k)}(H_{n-k}) + \dots + K_{0,k} U_k^{(k)}(H_{n-k}), \\ 0 = K_{1,0} U^{(k)}(H_{n-k}) + K_{1,1} U_1^{(k)}(H_{n-k}) + \dots + K_{1,k} U_k^{(k)}(H_{n-k}), \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 = K_{k,0} U^{(k)}(H_{n-k}) + K_{k,1} U_1^{(k)}(H_{n-k}) + \dots + K_{k,k} U_k^{(k)}(H_{n-k}), \end{cases}$$

oder auch mit (22.), sobald die Determinante

$$(28.)\qquad \Theta = \Sigma \pm K_{0,0} K_{1,1} \ldots K_{k,k}$$

von Null verschieden ist.

§. 13.

Fortsetzung der Transformation.

Es sind nunmehr die Gleichungen (19.), (20.) zu bilden, auf welchen die Bestimmung der z und also auch der u beruht. Betrachtet man, wie im Vorigen, x_{2n-k+1}, x_{2n-k+2}, ... x_{2n} als Functionen von x_1, x_2, ... x_{2n-k}, c_{n-k+1}, c_{n-k+2}, ... c_n, so ist

$$(29.)\qquad \begin{cases} X_i^{(k)} = X_i + X_{2n-k+1}\dfrac{\partial x_{2n-k+1}}{\partial x_i} + X_{2n-k+2}\dfrac{\partial x_{2n-k+2}}{\partial x_i} + \cdots + X_{2n}\dfrac{\partial x_{2n}}{\partial x_i} \\ \qquad = X_i + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} X_\lambda \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_i}. \end{cases}$$

Um $a_{i,m}^{(k)}$ zu bilden, muss man zunächst in (21.) wieder so differentiiren, als wären in $X_i^{(k)}$, $X_h^{(k)}$ nur noch die Veränderlichen x_1, x_2, ... x_{2n-k} enthalten; und führt man dies auf Differentiationen der X_i zurück, welche als Functionen von x_1, x_2, ... x_{2n} gegeben vorliegen, so erhält man folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} a_{i,m}^{(k)} &= \frac{\partial X_i^{(k)}}{\partial x_m} - \frac{\partial X_m^{(k)}}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial X_i}{\partial x_m} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \frac{\partial X_i}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} \\ &+ \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n}\left[\frac{\partial X_\lambda}{\partial x_m} + \sum_{\mu=2n-k+1}^{\mu=2n}\frac{\partial X_\lambda}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_m}\right]\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_i} \\ &- \frac{\partial X_m}{\partial x_i} - \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n}\frac{\partial X_m}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_i} \\ &- \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n}\left[\frac{\partial X_\lambda}{\partial x_i} + \sum_{\mu=2n-k+1}^{\mu=2n}\frac{\partial X_\lambda}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i}\right]\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} \end{aligned}$$

oder endlich, wenn man noch in der ersten Doppelsumme die Indices λ, μ mit einander vertauscht:

$$(30.)\qquad \begin{cases} a_{i,m}^{(k)} = a_{i,m} + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n}\left(a_{i,\lambda}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} - a_{m,\lambda}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_i}\right) \\ \qquad - \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n}\sum\limits_{\mu=2n-k+1}^{\mu=2n} a_{\lambda,\mu}\dfrac{\partial x_\mu}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}. \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke nehmen die Gleichungen (19.) die Gestalt an:

$$(31.)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=2(n-k)} a_{i,m} z_{i,k} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \left(\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} \sum_{i=1}^{i=2(n-k)} a_{i,\lambda} z_{i,k}\right) \\ &\quad + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \left(a_{\lambda,m} \sum_{i=1}^{i=2(n-k)} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_i} z_{i,k}\right) \\ &\quad + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \sum_{\mu=2n-k+1}^{\mu=2n} \left(a_{\mu,\lambda} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} \sum_{i=1}^{i=2(n-k)} \frac{\partial x_\mu}{\partial x_i} z_{i,k}\right) \\ &= X_m + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} X_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}. \end{aligned}\right.$$

Wenn man nun für die z ihre Werthe aus (23.) einführt und zugleich die Gleichungen (24.), (26.) berücksichtigt, so verbindet sich die erste Summe in dieser Gleichung mit der dritten zu:

$$K_{0,0} \sum_{i=1}^{i=2n} a_{i,m} u_i^{(k)} + K_{0,1} \sum_{i=1}^{i=2n} a_{i,m} u_{i,1}^{(k)} + \cdots + K_{0,k} \sum_{i=1}^{i=2n} a_{i,m} u_{i,k}^{(k)},$$

und ganz ebenso wird der Coefficient von $\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}$ aus der zweiten und vierten Summe:

$$K_{0,0} \sum_{i=1}^{i=2n} a_{i,\lambda} u_i^{(k)} + K_{0,1} \sum_{i=1}^{i=2n} a_{i,\lambda} u_{i,1}^{(k)} + \cdots + K_{0,k} \sum_{i=1}^{i=2n} a_{i,\lambda} u_{i,k}^{(k)}.$$

Setzen wir also der Kürze wegen:

$$(32.)\quad \left\{\begin{aligned} &a_{1,m} u_1^{(k)} + a_{2,m} u_2^{(k)} + \cdots + a_{2n,m} u_{2n}^{(k)} = v_m^{(k)}, \\ &a_{1,m} u_{1,1}^{(k)} + a_{2,m} u_{2,1}^{(k)} + \cdots + a_{2n,m} u_{2n,1}^{(k)} = v_{m,1}^{(k)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{1,m} u_{1,k}^{(k)} + a_{2,m} u_{2,k}^{(k)} + \cdots + a_{2n,m} u_{2n,k}^{(k)} = v_{m,k}^{(k)}, \end{aligned}\right.$$

so geht die Gleichung (31.) in folgende über:

$$(33.)\quad \left\{\begin{aligned} &K_{0,0}\left(v_m^{(k)} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} v_\lambda^{(k)} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}\right) \\ &+ K_{0,1}\left(v_{m,1}^{(k)} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} v_{\lambda,1}^{(k)} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}\right) \\ &+ \cdots\cdots\cdots \\ &+ K_{0,k}\left(v_{m,k}^{(k)} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} v_{\lambda,k}^{(k)} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}\right) \\ &\quad = X_m + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} X_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}. \end{aligned}\right.$$

Auf ganz gleiche Weise erhält man, immer mit Rücksicht auf (24.), (25.), (26.), aus (20.) die Gleichung:

$$(34.)\quad \begin{cases} K_{h,0}\left(v_m^{(k)} + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} v_\lambda^{(k)} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}\right) \\ + K_{h,1}\left(v_{m,1}^{(k)} + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} v_{\lambda,1}^{(k)} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}\right) \\ + \cdots\cdots\cdots \\ + K_{h,k}\left(v_{m,k}^{(k)} + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} v_{\lambda,k}^{(k)} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}\right) = 0. \end{cases}$$

Da die Gleichung (34.) k verschiedene Gleichungen repräsentirt, so kann man aus diesen und (33.) die in den Klammern enthaltenen Grössen bestimmen; und es wird sodann:

$$\begin{aligned} v_m^{(k)} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} v_\lambda^{(k)} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} &= \mathrm{K}\left(X_m + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} X_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}\right), \\ v_{m,1}^{(k)} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} v_{\lambda,1}^{(k)} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} &= \mathrm{K}_1\left(X_m + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} X_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}\right), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_{m,k}^{(k)} + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} v_{\lambda,k}^{(k)} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} &= \mathrm{K}_k\left(X_m + \sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} X_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}\right), \end{aligned}$$

oder auch, nur anders geordnet:

$$(35.)\quad \begin{cases} (v_m^{(k)} - \mathrm{K}\,X_m) + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}(v_\lambda^{(k)} - \mathrm{K}\,X_\lambda) = 0, \\ (v_{m,1}^{(k)} - \mathrm{K}_1 X_m) + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}(v_{\lambda,1}^{(k)} - \mathrm{K}_1 X_\lambda) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ (v_{m,k}^{(k)} - \mathrm{K}_k X_m) + \sum\limits_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \dfrac{\partial x_\lambda}{\partial x_m}(v_{\lambda,k}^{(k)} - \mathrm{K}_k X_\lambda) = 0. \end{cases}$$

Bestimmt man jetzt k Factoren $\varLambda_1, \varLambda_2, \ldots \varLambda_k$ so, dass sie den k Gleichungen genügen:

$$(36.)\quad \begin{cases} v_{2n-k+1}^{(k)} = \mathrm{K}\,X_{2n-k+1} + \varLambda_1 \dfrac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_{2n-k+1}} + \varLambda_2 \dfrac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_{2n-k+1}} + \cdots + \varLambda_k \dfrac{\partial H_n}{\partial x_{2n-k+1}}, \\ v_{2n-k+2}^{(k)} = \mathrm{K}\,X_{2n-k+2} + \varLambda_1 \dfrac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_{2n-k+2}} + \varLambda_2 \dfrac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_{2n-k+2}} + \cdots + \varLambda_k \dfrac{\partial H_n}{\partial x_{2n-k+2}}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ v_{2n}^{(k)} = \mathrm{K}\,X_{2n} + \varLambda_1 \dfrac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_{2n}} + \varLambda_2 \dfrac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_{2n}} + \cdots + \varLambda_k \dfrac{\partial H_n}{\partial x_{2n}} \end{cases}$$

und bemerkt dann, dass

$$\sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_m} \frac{\partial H_\mu}{\partial x_\lambda} = -\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m},$$

so giebt die erste der Gleichungen (35.), in welchen m die Werthe $1, 2, \ldots 2(n-k)$ erhalten muss, sogleich auch:

$$(37.)\quad \begin{cases} \overset{(k)}{v}_1 = \mathrm{K} X_1 + A_1 \dfrac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_1} + A_2 \dfrac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_1} + \cdots + A_k \dfrac{\partial H_n}{\partial x_1}, \\ \overset{(k)}{v}_2 = \mathrm{K} X_2 + A_1 \dfrac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_2} + A_2 \dfrac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_2} + \cdots + A_k \dfrac{\partial H_n}{\partial x_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overset{(k)}{v}_{2(n-k)} = \mathrm{K} X_{2(n-k)} + A_1 \dfrac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_{2(n-k)}} + A_2 \dfrac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_{2(n-k)}} + \cdots + A_k \dfrac{\partial H_n}{\partial x_{2(n-k)}}. \end{cases}$$

Ganz ähnliche Systeme ergeben sich aus der zweiten Gleichung (35.) für die $\overset{(k)}{v}_{i,1}$, u. s. w., nur dass an Stelle der K, A jedesmal andere Grössen treten. Bemerkt man indessen, dass die Grössen:

$$\overset{(k)}{v}_i, \quad \overset{(k)}{v}_{i,1}, \quad \overset{(k)}{v}_{i,2}, \quad \ldots$$

auf ganz analoge Weise respective aus den Grössen

$$\overset{(k)}{u}_i, \quad \overset{(k)}{u}_{i,1}, \quad \overset{(k)}{u}_{i,2}, \quad \ldots$$

zusammengesetzt sind; dass man aber offenbar an Stelle der $u_{i,h}$ jede beliebige lineare Verbindung

$$\alpha u_i + \alpha_1 u_{i,1} + \alpha_2 u_{i,2} + \cdots$$

treten lassen kann, indem alsdann statt der Gleichungen (22^a.) nur lineare Verbindungen derselben zu Grunde gelegt werden, so erkennt man, dass man über die Coefficienten K, A vollkommen frei verfügen kann; dass es also zum Beispiel erlaubt ist, in dem System (36.) sämmtliche A gleich Null und K gleich Eins zu setzen, sowie in den analogen Systemen die K und alle A bis auf je eines verschwinden zu lassen.

Auf diese Weise gehen aus den Gleichungen (36.) folgende Gleichungen hervor, in welchen der Index m die Werthe $1, 2, \ldots 2(n-k)$ und $2n-k+1, 2n-k+2, \ldots 2n$ annehmen kann:

$$(38.)\quad \begin{cases} \overset{(k)}{v}_m = a_{1,m}\overset{(k)}{u}_1 + a_{2,m}\overset{(k)}{u}_2 + \cdots + a_{2n,m}\overset{(k)}{u}_{2n} = X_m, \\ \overset{(k)}{v}_{m,1} = a_{1,m}\overset{(k)}{u}_{1,1} + a_{2,m}\overset{(k)}{u}_{2,1} + \cdots + a_{2n,m}\overset{(k)}{u}_{2n,1} = \dfrac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_m}, \\ \overset{(k)}{v}_{m,2} = a_{1,m}\overset{(k)}{u}_{1,2} + a_{2,m}\overset{(k)}{u}_{2,2} + \cdots + a_{2n,m}\overset{(k)}{u}_{2n,2} = \dfrac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_m}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overset{(k)}{v}_{m,k} = a_{1,m}\overset{(k)}{u}_{1,k} + a_{2,m}\overset{(k)}{u}_{2,k} + \cdots + a_{2n,m}\overset{(k)}{u}_{2n,k} = \dfrac{\partial H_n}{\partial x_m}. \end{cases}$$

Ich werde jetzt zeigen, dass diese Gleichungen auch noch für die fehlenden Werthe von m, also für $m = 2(n-k)+1,\ 2(n-k)+2, \dots 2n-k$ gültig sind, wodurch denn die Grössen u sich vollständig bestimmen.

§. 14.
Schluss der Transformation.

Die so eben angeführten Gleichungen ersetzen die Stelle der Gleichungen (19.), (20.), durch welche die z sich ursprünglich bestimmten. Zwischen den Grössen u finden aber noch weitere Beziehungen statt, welche in den Gleichungen (23.) bis (26.) enthalten sind. Man sieht leicht, dass der Uebergang von den Gleichungen (36.), (37.) zu (38.) damit übereinkommt, dass man $K_{0,0}$ gleich Eins, und $K_{1,0}$, $K_{2,0}$, ... gleich Null gesetzt hat, wodurch die oben durch K_1, K_2, ... bezeichneten Grössen verschwinden, während K der Einheit gleich wird. Unter diesen Umständen genügen die Gleichungen (24.), (25.) um die übrigen Coefficienten K durch die Grössen u auszudrücken. Wenn man diese Werthe so wie die Werthe der z aus (23.) in die Gleichungen (26.) einführt, so gehen dieselben in $k(k+1)$ Bedingungsgleichungen über, denen die Grössen u noch zu genügen haben. Statt aber in dieser Weise zu verfahren, kann man sich eine gleiche Anzahl von Bedingungsgleichungen folgendermassen zusammensetzen.

Es sei H_μ irgend eine der Functionen H_{n-k+1}, H_{n-k+2}, ... H_n. Multiplicirt man nun jede der Gleichungen (26.) mit $\frac{\partial H_\mu}{\partial x_\lambda}$ und summirt nach λ von $2n-k+1$ bis $2n$, nachdem man für die z aus (23.) ihre Werthe gesetzt hat, so erhält man, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\Sigma_\lambda \frac{\partial H_\mu}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_i} = -\frac{\partial H_\mu}{\partial x_i},$$

folgendes System:

$$\begin{aligned}
&K_{0,0}\Sigma u_m^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} + K_{0,1}\Sigma u_{m,1}^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} + \dots + K_{0,k}\Sigma u_{m,k}^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} = 0,\\
&K_{1,0}\Sigma u_m^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} + K_{1,1}\Sigma u_{m,1}^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} + \dots + K_{1,k}\Sigma u_{m,k}^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} = -\frac{\partial H_\mu}{\partial x_{2(n-k)+1}},\\
&K_{2,0}\Sigma u_m^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} + K_{2,1}\Sigma u_{m,1}^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} + \dots + K_{2,k}\Sigma u_{m,k}^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} = -\frac{\partial H_\mu}{\partial x_{2(n-k)+2}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&K_{k,0}\Sigma u_m^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} + K_{k,1}\Sigma u_{m,1}^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} + \dots + K_{k,k}\Sigma u_{m,k}^{(k)}\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} = -\frac{\partial H_\mu}{\partial x_{2n-k}},
\end{aligned}$$

wo unter den Summenzeichen m jedesmal die Werthe $1, 2, \dots 2(n-k)$, $2n-k+1$, $2n-k+2, \dots 2n$ erhalten muss. Aber aus den Gleichungen (24.), (25.) folgt, dass man sofort in diesen Summen dem Index m alle Werthe von 1 bis $2n$ beilegen kann, sobald man nur auf der rechten Seite überall Null setzt. Und dann gehen also diese Gleichungen über in:

$$\begin{aligned}
K_{0,0}U^{(k)}(H_\mu)+K_{0,1}U_1^{(k)}(H_\mu)+\dots+K_{0,k}U_k^{(k)}(H_\mu) &= 0,\\
K_{1,0}U^{(k)}(H_\mu)+K_{1,1}U_1^{(k)}(H_\mu)+\dots+K_{1,k}U_k^{(k)}(H_\mu) &= 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\\
K_{k,0}U^{(k)}(H_\mu)+K_{k,1}U_1^{(k)}(H_\mu)+\dots+K_{k,k}U_k^{(k)}(H_\mu) &= 0,
\end{aligned}$$

Gleichungen, welche man sofort durch die einfacheren ersetzen kann:

$$(39.)\qquad U^{(k)}(H_\mu)=0,\quad U_1^{(k)}(H_\mu)=0,\quad \dots\quad U_k^{(k)}(H_\mu)=0.$$

Man sieht also, dass die Functionen H_{n-k+1}, H_{n-k+2}, $\dots H_n$ selbst den nämlichen Gleichungen genügen, wie die Function H_{n-k}.

Eine andere Beziehung erhält man noch, wenn man aus den Gleichungen (23.)—(26.) die Combinationen bildet:

$$(40.)\quad\left\{\begin{aligned}
K_{0,0}\sum_{i=1}^{i=2n}u_i^{(k)}X_i+K_{0,1}\sum_{i=1}^{i=2n}u_{i,1}^{(k)}X_i+\dots &= \sum_{i=1}^{i=2(n-k)}z_{i,k}\Big(X_i+\sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_i}X_\lambda\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{i=2(n-k)}z_{i,k}X_i^{(k)},\\
K_{1,0}\sum_{i=1}^{i=2n}u_i^{(k)}X_i+K_{1,1}\sum_{i=1}^{i=2n}u_{i,1}^{(k)}X_i+\dots &= \sum_{i=1}^{i=2(n-k)}z_{i,k}^{(1)}\Big(X_i+\sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_i}X_\lambda\Big)\\
&\quad+X_{2(n-k)+1}+\sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)+1}}X_\lambda\\
&= \sum_{i=1}^{i=2(n-k)}z_{i,k}^{(1)}X_i^{(k)}+X_{2(n-k)+1}^{(k)},\\
K_{2,0}\sum_{i=1}^{i=2n}u_i^{(k)}X_i+K_{2,1}\sum_{i=1}^{i=2n}u_{i,1}^{(k)}X_i+\dots &= \sum_{i=1}^{i=2(n-k)}z_{i,k}^{(2)}\Big(X_i+\sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_i}X_\lambda\Big)\\
&\quad+X_{2(n-k)+2}+\sum_{\lambda=2n-k+1}^{\lambda=2n}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_{2(n-k)+1}}X_\lambda\\
&= \sum_{i=1}^{i=2(n-k)}z_{i,k}^{(2)}X_i^{(k)}+X_{2(n-k)+2}^{(k)}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right.$$

Die rechten Theile dieser Gleichungen verschwinden sämmtlich. Von dem der ersten Gleichung sieht man dies aus den Gleichungen (19.) ohne Weiteres.

Denn multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit $z_{1,k}$, $z_{2,k}$ etc. und benutzt die Gleichungen (19.) selbst, so geht die Summe über in

$$z_{1,k} X_1^{(k)} + z_{2,k} X_2^{(k)} + \cdots = -(z_{1,k} X_1^{(k)} + z_{2,k} X_2^{(k)} + \cdots)$$

oder in

$$z_{1,k} X_1^{(k)} + z_{2,k} X_2^{(k)} + \cdots = 0.$$

Die rechten Theile der übrigen Gleichungen (40.) aber stellen, wie man aus den Gleichungen (20.) leicht erkennt, nichts anderes dar als diejenigen Ausdrücke, welche verschwinden müssen, sobald jeder der Ausdrücke

$$\begin{gathered} X_1^{(k)} dx_1 + X_2^{(k)} dx_2 + \cdots + X_{2(n-k)}^{(k)} dx_{2(n-k)} + X_{2(n-k)+1}^{(k)} dx_{2(n-k)+1}, \\ X_1^{(k)} dx_1 + X_2^{(k)} dx_2 + \cdots + X_{2(n-k)}^{(k)} dx_{2(n-k)} + X_{2(n-k)+2}^{(k)} dx_{2(n-k)+2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

durch $n-k$ Gleichungen integrirbar sein soll. Da demnach die linken Theile der Gleichungen (40.) gleich Null sein müssen, so hat man die Gleichungen:

$$(41.)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=2n} u_i^{(k)} X_i = 0, \\ &\sum_{i=1}^{i=2n} u_{i,1}^{(k)} X_i = 0, \\ &\cdots\cdots \\ &\sum_{i=1}^{i=2n} u_{i,k}^{(k)} X_i = 0. \end{aligned} \right.$$

Multiplicirt man jetzt die erste Gleichung (38.) mit $u_m^{(k)}$ und summirt nach m, indem man diesem Index die Werthe $1, 2, \ldots 2(n-k), 2n-k+1, 2n-k+2, \ldots 2n$ giebt, so erhält man, mit Rücksicht auf die Gleichungen (38.) selbst und auf (41.):

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=2n} u_i^{(k)} \{ -X_i + a_{2(n-k)+1,i}\, u_{2(n-k)+1}^{(k)} + a_{2(n-k)+2,i}\, u_{2(n-k)+2}^{(k)} + \cdots + a_{2n-k,i}\, u_{2n-k}^{(k)} \} \\ &\qquad = -\{ u_{2(n-k)+1} X_{2(n-k)+1} + u_{2(n-k)+2} X_{2(n-k)+2} + \cdots + u_{2n-k} X_{2n-k} \}, \end{aligned}$$

oder auch, da $\Sigma u_i^{(k)} X_i$ verschwindet:

$$\begin{aligned} 0 = {} & u_{2(n-k)+1} \left\{ \sum_{i=1}^{i=2n} a_{i,2(n-k)+1}\, u_i^{(k)} - X_{2(n-k)+1} \right\} \\ & + u_{2(n-k)+2} \left\{ \sum_{i=1}^{i=2n} a_{i,2(n-k)+2}\, u_i^{(k)} - X_{2(n-k)+2} \right\} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + u_{2n-k} \left\{ \sum_{i=1}^{i=2n} a_{i,2n-k}\, u_i^{(k)} - X_{2n-k} \right\}. \end{aligned}$$

Multiplicirt man statt dessen die erste Gleichung (38.) mit $u_{m,1}^{(k)}$ und summirt nach m, so erhält man eine ähnliche Gleichung, in welcher nur statt

$$u_{2(n-k)+1}, \quad u_{2(n-k)+2}, \quad \dots$$

die Grössen

$$u_{2(n-k)+1,1}, \quad u_{2(n-k)+2,1}, \quad \dots$$

vor den Klammern erscheinen. Auf diese Weise erhält man successive $k+1$ ähnliche Gleichungen, in welchen die eingeklammerten Grössen jedesmal dieselben sind. Es folgt daraus, dass diese selbst verschwinden müssen, d. h. dass die erste Gleichung (38.) auch noch für $m=2(n-k)+1$, $2(n-k)+2$, ... $2n-k$, mithin überhaupt für alle Werthe von m gilt.

Dasselbe wird in genau gleicher Weise von der zweiten Gleichung (38.) nachgewiesen, wenn man in den soeben beschriebenen Operationen statt der Gleichungen (41.) die aus (39.) fliessenden Gleichungen

$$U^{(k)}(H_{n-k+1}) = 0, \quad U_1^{(k)}(H_{n-k+1}) = 0, \quad \dots \quad U_k^{(k)}(H_{n-k+1}) = 0$$

benutzt.

Und so ist denn überhaupt nachgewiesen, dass die Gleichungen (38.) für alle Werthe von m gelten.

§. 15.

Definition der Lösung des *Pfaff*schen Problems durch $\frac{n.n+1}{2}$ simultane partielle Differentialgleichungen.

Das Resultat dieser sehr complicirten Betrachtungen ist nunmehr ein sehr einfaches. Denn bezeichnet man durch R das bekannte Aggregat, dessen Quadrat der Determinante

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{2n,2n}$$

gleich wird, und durch $R_{i,k}$ den Differentialquotienten desselben, genommen nach $a_{i,k}$, so giebt die Auflösung der Gleichungen (38.):

$$\begin{aligned}
R.u_i^{(k)} &= X_1 R_{i,1} + X_2 R_{i,2} + \dots + X_{2n} R_{i,2n} \\
R.u_{i,1}^{(k)} &= \frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_1} R_{i,1} + \frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_2} R_{i,2} + \dots + \frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_{2n}} R_{i,2n}, \\
R.u_{i,2}^{(k)} &= \frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_1} R_{i,1} + \frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_2} R_{i,2} + \dots + \frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_{2n}} R_{i,2n}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
R.u_{i,k}^{(k)} &= \frac{\partial H_n}{\partial x_1} R_{i,1} + \frac{\partial H_n}{\partial x_2} R_{i,2} + \dots + \frac{\partial H_n}{\partial x_{2n}} R_{i,2n},
\end{aligned}$$

und die $k+1$ Gleichungen, denen die Function H_{n-k} genügen muss, sind demnach folgende:

$$(42.)\quad \begin{cases} \Sigma_i \Sigma_h X_i \dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_h} R_{i,h} & = 0, \\ \Sigma_i \Sigma_h \dfrac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_h} R_{i,h} & = 0, \\ \Sigma_i \Sigma_h \dfrac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_h} R_{i,h} & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \Sigma_i \Sigma_h \dfrac{\partial H_n}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial H_{n-k}}{\partial x_h} R_{i,h} & = 0. \end{cases}$$

Bezeichnet man also durch (ψ) den Ausdruck:

$$(43.)\quad (\psi) = \frac{1}{R} \Sigma_i \Sigma_h X_i \frac{\partial \psi}{\partial x_h} R_{i,h};$$

und durch $[\psi, \varphi]$ den Ausdruck:

$$(44.)\quad [\psi, \varphi] = \frac{1}{R} \Sigma_i \Sigma_h \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_h} R_{i,h},$$

so dass

$$[\psi, \varphi] = -[\varphi, \psi], \quad [\psi, \psi] = 0,$$

so nehmen die Gleichungen (42.) die einfache Form an:

$$(45.)\quad (H_{n-k}) = 0, \; [H_{n-k}, H_{n-k+1}] = 0, \; [H_{n-k}, H_{n-k+2}] = 0, \; \ldots \; [H_{n-k}, H_n] = 0.$$

Die erste Gleichung ist, wie man bemerkt, nichts Anderes als die partielle Differentialgleichung, welche dem ersten *Pfaff*schen System entspricht; und dass die Functionen H sämmtlich dieser Gleichung genügen, ist sehr bekannt. Aber die anderen Gleichungen bilden ein merkwürdiges System von Beziehungen, welche zwischen den Functionen H eintreten, wichtig genug sie in einem Theorem besonders hervorzuheben:

Theorem I.

Wenn man einen Differentialausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

in der Form

$$M_1 dH_1 + M_2 dH_2 + \cdots + M_n dH_n$$

darstellt, so genügen die Functionen H sämmtlich der Gleichung

$$(H) = 0 = \frac{1}{R} \Sigma_i \Sigma_h X_i \frac{\partial H}{\partial x_h} R_{i,h};$$

ausserdem aber noch $\frac{n.n-1}{2}$ Gleichungen, welche aus der Gleichung

$$[H_\mu, H_\nu] = 0 = \frac{1}{R} \Sigma_i \Sigma_h \frac{\partial H_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial H_\mu}{\partial x_h} R_{i,h}$$

hervorgehen, indem man den Zahlen μ und ν die Werthe 1, 2, ... n beilegt; und umgekehrt kann man durch jede n Functionen H, welche diesen Gleichungen genügen, dem obigen Differentialausdruck jene Form geben.

§. 16.

Beziehungen zwischen den gefundenen simultanen partiellen Differentialgleichungen.

Man kann die Ausdrücke (ψ), $[\psi, \varphi]$ als *Operationen* auffassen, welche mit den Functionen φ, ψ vorgenommen werden. In diesem Falle ist schon dadurch, dass diese Operationen aus den in §. 5. angegebenen Operationen

$$A[\varphi], \quad A_1[\varphi], \quad \text{etc.}$$

hervorgegangen sind, ersichtlich, dass zwischen den neuen Operationen in ähnlicher Weise Beziehungen obwalten müssen, wie deren im angeführten §. zwischen jenen Operationen angegeben sind. Diese Beziehungen sollen nun entwickelt werden; woran sich dann einige bemerkenswerthe Folgerungen knüpfen.

Denken wir uns wieder den Differentialausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

bereits auf irgend eine Weise in die Form

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n$$

gebracht, so dass identisch

$$(46.) \qquad X_i = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} F_\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}.$$

Alsdann ist auch, wie in §. 3 (12.) bereits angegeben:

$$(47.) \qquad a_{i,m} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_m} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} - \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_m} \right).$$

Die Gleichungen (38.) nehmen hiernach folgende Gestalt an:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \left\{ \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_m} \sum_{i=1}^{i=2n} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} \cdot u_i^{(k)} - \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_m} \sum_{i=1}^{i=2n} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i} \cdot u_i^{(k)} \right\} = X_m,$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \left\{ \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_m} \sum_{i=1}^{i=2n} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} \cdot u_{i,1}^{(k)} - \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_m} \sum_{i=1}^{i=2n} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i} \cdot u_{i,1}^{(k)} \right\} = \frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial x_m},$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \left\{ \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_m} \sum_{i=1}^{i=2n} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} \cdot u_{i,2}^{(k)} - \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_m} \sum_{i=1}^{i=2n} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i} \cdot u_{i,2}^{(k)} \right\} = \frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial x_m},$$

. . . .

Wenn man aber hier für X_m seinen Werth aus (46.) und, indem man in den Functionen H die F, f als unabhängige Veränderliche eingeführt denkt, für $\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m}$ den Ausdruck setzt:

$$\frac{\partial H_\mu}{\partial x_m} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\left(\frac{\partial H_\mu}{\partial F_\lambda}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_m}+\frac{\partial H_\mu}{\partial f_\lambda}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_m}\right),$$

so zerfallen diese Gleichungen unmittelbar in folgende:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=2n} u_i^{(k)}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=2n} u_i^{(k)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i} = -F_\lambda, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=2n} u_{i,1}^{(k)}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial F_\lambda}, \\ \sum_{i=1}^{i=2n} u_{i,1}^{(k)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i} = -\frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial f_\lambda}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=2n} u_{i,2}^{(k)}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial F_\lambda}, \\ \sum_{i=1}^{i=2n} u_{i,2}^{(k)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_i} = -\frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial f_\lambda}, \end{cases}$$

. . . .

Multiplicirt man nun immer die erste Gleichung jedes dieser Paare mit $\frac{\partial x_m}{\partial f_\lambda}$, die zweite mit $\frac{\partial x_m}{\partial F_\lambda}$, addirt beide, und nimmt dann die Summe für λ, so kommt:

$$u_m^{(k)} = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} F_\lambda\frac{\partial x_m}{\partial F_\lambda},$$

$$u_{m,1}^{(k)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\left(\frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial F_\lambda}\frac{\partial x_m}{\partial f_\lambda}-\frac{\partial H_{n-k+1}}{\partial f_\lambda}\frac{\partial x_m}{\partial F_\lambda}\right),$$

$$u_{m,2}^{(k)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\left(\frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial F_\lambda}\frac{\partial x_m}{\partial f_\lambda}-\frac{\partial H_{n-k+2}}{\partial f_\lambda}\frac{\partial x_m}{\partial F_\lambda}\right),$$

. . . .

und demnach ergeben sich für (ψ) und $[\psi, H]$ folgende Ausdrücke:

$$(48.)\quad \begin{cases} (\psi) = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} F_\lambda\frac{\partial\psi}{\partial F_\lambda}, \\ [\psi, H] = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\left(\frac{\partial H}{\partial F_\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial f_\lambda}-\frac{\partial H}{\partial f_\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial F_\lambda}\right). \end{cases}$$

Diese beiden Formeln gestatten es sehr leicht, die Beziehungen zwischen den beiden Operationssymbolen zu ermitteln. Man erkennt in dem zweiten dieselbe Form, welche in der Theorie der Störungen und der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung eine so grosse Rolle spielt. In Bezug auf dieselbe hat *Jacobi* nachgewiesen, was leicht zu verificiren ist, dass, wenn φ, ψ, H drei ganz beliebige Functionen bedeuten, immer folgende identische Gleichung stattfindet:

$$(49.)\qquad [\varphi,[\psi,H]]+[\psi,[H,\varphi]]+[H,[\varphi,\psi]] = 0.$$

Es bleibt also nur übrig, zwischen den Operationen (φ) und $[\varphi, H]$ noch eine Beziehung aufzusuchen. In Folge der Gleichungen (48.) hat man offenbar, wenn ψ und H beliebige Functionen bedeuten:

$$[(\psi),H] = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\left\{\frac{\partial H}{\partial F_\lambda}\cdot F_\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial F_\mu\partial f_\lambda}-\frac{\partial H}{\partial f_\lambda}\cdot F_\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial F_\mu\partial F_\lambda}\right\}+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{\partial H}{\partial f_\lambda}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial F_\lambda}$$

$$[(H),\psi] = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial F_\lambda}\cdot F_\mu\frac{\partial^2 H}{\partial F_\mu\partial f_\lambda}-\frac{\partial\psi}{\partial f_\lambda}\cdot F_\mu\frac{\partial^2 H}{\partial F_\mu\partial F_\lambda}\right\}+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{\partial\psi}{\partial f_\lambda}\cdot\frac{\partial H}{\partial F_\lambda},$$

oder wenn man eine dieser Gleichungen von der anderen abzieht:

$$(50.)\qquad \begin{cases} [(\psi),H]-[(H),\psi] = -[\psi,H]+\sum_{\mu=1}^{\mu=n}F_\mu\frac{\partial}{\partial F_\mu}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial F_\lambda}\frac{\partial H}{\partial f_\lambda}-\frac{\partial\psi}{\partial f_\lambda}\frac{\partial H}{\partial F_\lambda}\right\} \\ \qquad = ([\psi,H])-[\psi,H]. \end{cases}$$

Dies ist die gesuchte Beziehung. Ueberträgt man die Gleichungen (50.) auf die ursprüngliche Form, in welcher die Operationen (ψ) und $[\psi, H]$ auszuführen sind, so gelangt man zu folgendem bemerkenswerthen

Theorem II.

Bezeichnet man durch φ, ψ, H ganz beliebige Functionen und durch (φ), $[\psi, H]$ die beiden Operationen:

$$(\varphi) = \frac{1}{R}\Sigma\Sigma X_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}R_{i,m},$$

$$[\psi,H] = \frac{1}{R}\Sigma\Sigma\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_m}R_{i,m},$$

so finden immer folgende identische Gleichungen Statt:

$$[\varphi,[\psi,H]]+[\psi,[H,\varphi]]+[H,[\varphi,\psi]] = 0,$$

$$([\psi,H])-[(\psi),H]+[(H),\psi]-[\psi,H] = 0.$$

§. 17.
Ueber die Integration des *Pfaff*schen Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Bei der bekannten Behandlungsweise des *Pfaff*schen Problems bildet die Integration des ersten *Pfaff*schen Systems, d. h. die vollständige Integration der Gleichung $(\varphi) = 0$, nur einen ersten Schritt zur Lösung des Problems. Bei der gegenwärtigen Auflösungsmethode kann man es als eine besonders ausgezeichnete Eigenschaft dieser Gleichung betrachten, dass ihre vollständige Integration nichts weiter verlangt als die Lösung des *Pfaff*schen Problems; indem die bei diesem vorzunehmenden Integrationen von niedrigerer Ordnung sind, als diejenigen, welche im Allgemeinen zur Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung mit $2n$ unabhängigen Veränderlichen nothwendig werden. In der That kann man, nachdem das *Pfaff*sche Problem gelöst worden, sämmtliche Integrale desjenigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen leicht angeben, auf welches die Gleichung $(\varphi) = 0$ führt. Nach dem, was in §. 3 entwickelt ist, sind erstlich die Gleichungen

$$\varphi_1 = c_1, \quad \varphi_2 = c_2, \quad \dots \quad \varphi_n = c_n, \quad \text{oder}$$
$$H_1 = c_1, \quad H_2 = c_2, \quad \dots \quad H_n = c_n$$

Integrale derselben. Sodann aber sind, wenn identisch

$$(51.) \qquad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2n} dx_{2n} = M_1 dH_1 + M_2 dH_2 + \dots + M_n dH_n$$

gefunden wird, die übrigen Integrale durch die Proportion gegeben:

$$(52.) \qquad M_1 : M_2 : \dots : M_n = \alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_n,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ neue willkürliche Constanten bedeuten. Denkt man sich etwa die Transformation (51.) dadurch hervorgebracht, dass man mittelst der Gleichungen

$$H_1 = c_1, \quad H_2 = c_2, \quad \dots \quad H_n = c_n$$

die Veränderlichen $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots x_{2n}$ durch $x_1, x_2, \dots x_n$ und $c_1, c_2, \dots c_n$ ausdrückt, so hat man an Stelle von (52.) die Gleichungen:

$$\sum_{i=n+1}^{i=2n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial c_1} = \lambda \alpha_1,$$
$$\sum_{i=n+1}^{i=2n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial c_2} = \lambda \alpha_2,$$
$$\dots\dots$$
$$\sum_{i=n+1}^{i=2n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial c_n} = \lambda \alpha_n,$$

wo λ einen willkürlichen Factor bedeutet. Will man diese Elimination nicht ausführen, so kann man die aus (52.) entspringenden Gleichungen

$$X_i = M_1\frac{\partial H_1}{\partial x_i}+M_2\frac{\partial H_2}{\partial x_i}+\cdots+M_n\frac{\partial H_n}{\partial x_i}$$

zu Grunde legen. Setzt man in diesen

$$M_1 = \lambda\alpha_1, \qquad M_2 = \lambda\alpha_2, \qquad \ldots$$

so gehen sie über in

$$X_i = \lambda\left\{\alpha_1\frac{\partial H_1}{\partial x_i}+\alpha_2\frac{\partial H_2}{\partial x_i}+\cdots+\alpha_n\frac{\partial H_n}{\partial x_i}\right\},$$

und irgend n von diesen $2n$ Gleichungen stellen dann die fehlenden Integrale dar.

Aber aus den Gleichungen (49.), (50.) des vorigen §. geht ein Satz hervor, welcher, wenn es sich nur um die Integration des ersten *Pfaff*schen Systems handelt, die Operationen noch bedeutend abkürzt. Denn bezeichnen wir durch φ, ψ, H irgend drei Lösungen der Gleichung

$$(\varphi) = 0,$$

d. h. irgend drei Integrale des entsprechenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, so hat man nach (50.) folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}([\varphi,\psi])-[\varphi,\psi] &= 0,\\ ([\psi,H])-[\psi,H] &= 0,\\ ([H,\varphi])-[H,\varphi] &= 0,\end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned}[\psi,H]([\varphi,\psi])-[\varphi,\psi]([\psi,H]) &= 0,\\ [H,\varphi]([\psi,H])-[\psi,H]([H,\varphi]) &= 0,\\ [\varphi,\psi]([H,\varphi])-[H,\varphi]([\varphi,\psi]) &= 0,\end{aligned}$$

oder endlich

$$\left(\frac{[\varphi,\psi]}{[\psi,H]}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{[\psi,H]}{[H,\varphi]}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{[H,\varphi]}{[\varphi,\psi]}\right) = 0.$$

Die drei Quotienten

$$\frac{[\varphi,\psi]}{[\psi,H]}, \qquad \frac{[\psi,H]}{[H,\varphi]}, \qquad \frac{[H,\varphi]}{[\varphi,\psi]}$$

sind also neue Lösungen der Gleichung $(\varphi) = 0$, oder neue Integrale des ersten *Pfaff*schen Systems; sie reduciren sich auf zwei von einander unabhängige, und diese beiden können, wenn α, β, γ willkürliche Constanten, λ einen unbestimmten Factor bezeichnet, durch die drei Gleichungen

$$[\varphi, \psi] = \lambda\alpha, \quad [\psi, H] = \lambda\beta, \quad [H, \varphi] = \lambda\gamma$$

dargestellt werden. Auf diese Weise erhält man aus drei Integralen des Systems zwei neue durch blosse Differentiationen; und indem man wieder diese neuen Integrale mit den ursprünglichen verbindet, im Allgemeinen das ganze System von Integralen, welches das System erfordert.

Aber in der That ist bereits aus zwei Integralen im Allgemeinen das ganze System der Integrale durch Differentiation abzuleiten. Denn sind $\varphi = \text{Const.}$, $\psi = \text{Const.}$ irgend zwei gegebene Integrale, deren linke Theile die rechts vorkommenden Constanten nicht mehr enthalten, so ist nach (50.), da $(\varphi) = 0$ und $(\psi) = 0$ ist,

$$(53.) \qquad 0 = ([\varphi, \psi]) - [\varphi, \psi].$$

Aber wenn man ferner in der Gleichung (50.) $[\varphi, \psi]$ an die Stelle von ψ, ψ an die Stelle von H setzt, kommt:

$$[([\varphi, \psi]), \psi] = ([[\varphi, \psi], \psi]) - [[\varphi, \psi], \psi]$$

oder, indem man auf der linken Seite (53.) benutzt:

$$(54.) \qquad 0 = ([[\varphi, \psi], \psi]) - 2[[\varphi, \psi], \psi].$$

Multiplicirt man endlich (53.) mit $2[[\varphi, \psi], \psi]$, (54.) mit $[\varphi, \psi]$, so kann man der Differenz die Form geben:

$$\left(\frac{[[\varphi, \psi], \psi]}{[\varphi, \psi]^2}\right) = 0.$$

Es ist also auch

$$\frac{[[\varphi, \psi], \psi]}{[\varphi, \psi]^2} = \text{Const.}$$

ein Integral des Systems, und also auch ebenso:

$$\frac{[[\varphi, \psi], \varphi]}{[\varphi, \psi]^2} = \text{Const.}$$

ein weiteres Integral. So kann man also aus zwei bekannten Integralen im Allgemeinen immer zwei weitere, und so allmälig das ganze System von Integralen ableiten.

In besonderen Fällen kann es allerdings eintreten, dass die neu gewonnenen Integrale entweder illusorisch werden, oder nur in Combinationen der ursprünglichen übergehen. In diesem Fall ist es dann nicht möglich, sämmtliche Integrale des Systems aus den gegebenen abzuleiten. Aber dann zeigen sich häufig andere Vortheile, die man aus den gegebenen Integralen ziehen kann, indem dieselben eben dann zur Reduction des *Pfaffschen Problems* besonders geschickt sind. Ich begnüge mich hier auf diese bemerkenswerthen Verhältnisse, welche eine nähere Ausführung verdienen, hingewiesen zu haben, und fasse nur noch die oben entwickelten Resultate in folgendes Theorem zusammen:

Theorem III.

Wenn man irgend drei Integrale des ersten Pfaffschen Systems kennt,

$$\varphi=\alpha,\quad \psi=\beta,\quad H=\gamma,$$

wo α, β, γ willkürliche Constante sind, welche in φ, ψ, H nicht vorkommen, so geben im Allgemeinen die Gleichungen

$$[\psi, H]:[H,\varphi]:[\varphi,\psi] = a:b:c$$

zwei neue Integrale des Systems; und durch Combination derselben mit den gegebenen kann man im Allgemeinen sämmtliche Integrale des Systems aus den gegebenen drei Integralen ableiten. Aber schon wenn zwei Integrale $\varphi=Const.$, $\psi=Const.$ gegeben sind, finden sich, freilich minder einfach, zwei neue Integrale

$$\frac{[[\varphi,\psi],\psi]}{[\varphi,\psi]^2} = \text{Const.},$$

$$\frac{[[\varphi,\psi],\varphi]}{[\varphi,\psi]^2} = \text{Const.},$$

und aus denselben im Verein mit den gegebenen im Allgemeinen alle Integrale des Systems.

Dieses merkwürdige und wichtige Theorem ist offenbar eine Verallgemeinerung des berühmten Satzes, welchen *Poisson* in der Störungstheorie gefunden, und dessen Bedeutung *Jacobi* gewissermassen entdeckt hat, um ihn in der Dynamik zu verwerthen.

Noch vollständiger aber findet sich die Eigenschaft des dynamischen Systems wieder bei der zweiten Form von Gleichungen, auf welche die vorliegenden Untersuchungen geführt haben. Bezeichnen wir durch U eine ganz beliebige Function, und bilden den Ausdruck

$$[\varphi, U] = 0,$$

so stellt diese Gleichung eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung dar, von welcher eine Lösung bekannt ist, nämlich

$$\varphi = U.$$

Kennt man aber zwei weitere Integrale derselben, ψ und H, und benutzt man die identische Gleichung (50.) in der Form:

$$[[\psi, U], H]+[[U, H], \psi]+[[H, \psi], U] = 0,$$

welche sich der Voraussetzung gemäss auf

$$[[H, \psi], U] = 0$$

reducirt, so erkennt man, dass auch $[H, \psi]$ eine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung ist; und indem man diese neue Lösung mit den ursprünglich gegebenen verbindet, um abermals neue Lösungen darzustellen, gewinnt man das folgende

Theorem IV.

Ist U eine beliebige Function, und kennt man irgend zwei Lösungen ψ, H der Gleichung

$$[\varphi, U] = 0,$$

so kann man aus diesen im Allgemeinen alle Lösungen dieser Gleichung ableiten, indem man zunächst den Ausdruck

$$[\psi, H],$$

sodann ähnlich Combinationen dieses Ausdrucks mit ψ und H bildet u. s. w.; sämmtliche Ausdrücke, welche man auf diese Weise erhält, sind Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung.

Man sieht, wie die Gleichung $[\varphi, U]=0$ trotz ihrer sehr allgemeinen Form dennoch vollkommen denjenigen Charakter bewahrt, welchen man in dem speciellen Falle der dynamischen Gleichungen seit langer Zeit erkannt hat. Es mag genügen, an diesem Orte auf diese merkwürdigen Beziehungen hingewiesen zu haben, durch welche die bisher speciell gefassten Resultate der Dynamik mit einem sehr allgemeinen Probleme in Verbindung gesetzt werden. Aber es lässt sich auf dieselben auch eine neue und eigenthümliche Lösung des *Pfaff*schen Problems gründen, deren Darstellung der Gegenstand einer zweiten Abhandlung sein wird.

Carlsruhe, den 28. September 1860.