21.

Ueber diejenigen Probleme der Variationsrechnung, welche nur eine unabhängige Variable enthalten.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

Jacobi, in der Abhandlung über die Kriterien des Maximums und Minimums, welche sich im 17ten Bande dieses Journals befindet, macht die Bemerkung, dafs diejenigen isoperimetrischen Probleme, welche nur die ersten Differentialquotienten der abhängigen Functionen unter dem Integralzeichen enthalten, eine Behandlung in derselben Weise gestatten, wie sie von *Hamilton* und von *Jacobi* selbst auf die Probleme der Dynamik angewendet ist.

Man kann diesen Ausspruch verallgemeinern. In der That, auch die Aufgabe, ein einfaches Integral mit mehreren unbekannten Functionen zu einem Minimum zu machen, *während zwischen diesen Functionen noch gewisse Differentialgleichungen gelten sollen*, ist einer ähnlichen Behandlung fähig. Und da man zeigen kann, dafs sich jede auf einfache Integration bezügliche Aufgabe der Variationsrechnung auf diese Form zurückführen läfst, so ergiebt sich, dafs überhaupt auch jede solche Aufgabe jene Behandlung zuläfst. Es läfst sich dies so aussprechen:

Ein isoperimetrisches Problem, in welchem die Differentialquotienten der abhängigen Functionen unter dem Integralzeichen oder in etwaigen Bedingungsgleichungen respective bis zu den Graden a_1, a_2, ... a_n ansteigen, welches also $2(a_1 + a_2 \ldots a_n)$ willkürliche Constanten mit sich führt, ist immer auf die vollständige Lösung einer partiellen Differentialgleichung mit $a_1 + a_2 \ldots a_n + 1$ unabhängigen Variabeln zurückführbar, welche aufserdem die abhängige Function selbst nicht enthält; die vollständige Lösung also erfordert nur $a_1 + a_2 \cdots a_n$ willkürliche Constanten.

Die eigenthümliche Form, welche durch diese Betrachtungen die Integrale der isoperimetrischen Probleme annehmen, gestattet merkwürdige Anwendungen auf die zweite Variation. In einem frühern Aufsatze habe ich gezeigt (Band 55. dieses Journals, pag. 254), dafs die reducirte Form der zweiten Variation, wie sie zur Untersuchung der Kriterien des

Maximums und Minimums brauchbar ist, eine gewisse Anzahl von willkürlichen Constanten mit sich führt, zwischen denen noch Bedingungen bestehen, welche im Allgemeinen weder vollständig dargestellt werden können, noch viel weniger aber die Lösung der Aufgabe gestatten, die betreffenden Constanten durch eine passende Anzahl vollkommen unabhängiger Constanten zu ersetzen.

Dagegen zeigt es sich, dafs die Anwendung derjenigen Form der Integrale, auf welche die oben angedeutete Methode führt, nicht nur die vollständige Aufstellung der Bedingungsgleichungen möglich macht, sondern aufserdem fast von selbst auf solche Ausdrücke der eingehenden Constanten durch eine geringere Anzahl vollkommen unabhängiger führt, welche diese Bedingungsgleichungen identisch erfüllen. Wobei sich zugleich andere bedeutende Vereinfachungen der vorkommenden Ausdrücke ergeben.

Die Reduction der isoperimetrischen Gleichungen auf *eine* partielle Differentialgleichung wird den Anfang der folgenden Betrachtungen ausfüllen. Der letzte Theil wird der Untersuchung derjenigen Vortheile gewidmet sein, welche dieselbe für die zweite Variation gewährt.

§. 1.

Beschränkung der Aufgabe.

Bezeichnen wir durch $y_1, y_2, \dots y_n$ unbekannte Functionen von x, durch $F, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ aber Functionen von $x, y_1, y_2, \dots y_n$ und $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}, \dots \frac{dy_n}{dx}$; so läfst sich jede Aufgabe der Variationsrechnung, welche nur *eine* unabhängige Variable enthält, auf die folgende zurückführen:

Es soll das Integral

$$(1.)\qquad J = \int_{x^0}^{x'} F\,dx$$

ein Minimum oder Maximum werden, während zugleich eine gewisse Reihe von Differentialgleichungen

$$(2.)\qquad \varphi_1 = 0,\quad \varphi_2 = 0,\quad \dots\quad \varphi_\varkappa = 0$$

besteht; wo $\varkappa$ kleiner als n ist.

Dafs zunächst das Vorkommen höherer Differentialquotienten ohne Weiteres ein Zurückführen in diese Form gestattet, ist an sich deutlich; man hat nur nöthig, die niedrigeren Differentialquotienten als neue Variable einzuführen, und ihre Beziehungen als Bedingungsgleichungen φ zu betrachten. Aber auch die scheinbar allgemeinere Aufgabe, nämlich

eine Function V zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wenn zwischen ihr und andern unbestimmten Functionen $y_1, y_2, \dots y_n$ eine beliebige Zahl von Differentialgleichungen mit der unabhängigen Variabeln x gegeben sind,

kommt auf den vorigen Fall zurück. Denn man setze nur $J = \int_{x^0}^{x'} \frac{dV}{dx}\, dx$, man führe die Differentialgleichungen als Bedingungsgleichungen φ ein, und man gelangt dann durch die gewöhnlichen Methoden zu genau denselben Gleichungen, welche sonst auf einem ganz anderen Wege abgeleitet zu werden pflegen.

Ich werde mich daher im Folgenden nur mit derjenigen Form des Problems beschäftigen, welche in den Gleichungen (1.), (2.) dargestellt ist.

§. 2.

Zurückführung der Integrale der isoperimetrischen Probleme auf die Function V.

Bezeichnen wir mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\varkappa$ unbekannte Functionen von x, und mit Ω die Function

$$(3.)\qquad \Omega = F + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots \lambda_\varkappa\varphi_\varkappa,$$

so sind die Differentialgleichungen, auf welche das in den Gleichungen (1.), (2.) ausgesprochene Problem durch das Verschwinden der ersten Variation führt:

$$(4.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_1}{dx}} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1}, \\[2ex] \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_2}{dx}} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_2}, \\[2ex] \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\[2ex] \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_n}{dx}} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_n}, \end{cases}$$

zu welchen die Gleichungen (2.) selbst hinzutreten. Diese $n+\varkappa$ Gleichungen bestimmen die Functionen λ, y; die Integration derselben führt $2n$ willkürliche Constanten mit sich.

Bezeichnen wir nun durch $[\Omega]$ und $[F]$ die Functionen Ω und F und analog andere ebenso betrachtete Functionen, wenn in denselben die y.

λ, $\frac{dy}{dx}$ durch diese $2n$ Constanten und x selbst ausgedrückt sind; durch (Ω), (F) etc. aber dieselben Functionen, ausgedrückt durch x, die y, und durch die Constanten $y_1^0, y_2^0, \dots y_n^0$, welchen die y für $x = x^0$ gleich werden mögen, und welche bei der Bestimmung der erstgenannten Constanten mitwirken.

Da die Ausdrücke $[\varphi]$ identisch verschwinden müssen, so ist auch $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right]$ identisch Null, wenn a eine jener Integrationsconstanten bedeutet; mithin hat man

$$\left[\frac{\partial F}{\partial a}\right] = \left[\frac{\partial \Omega}{\partial a}\right] = \Sigma_i \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}\left[\frac{\partial y_i}{\partial a}\right] + \Sigma_i \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}}\left[\frac{d}{dx}\frac{\partial y_i}{\partial a}\right],$$

da auch die durch Differentiation nach λ entstehenden Terme fortfallen. Oder, indem man die Gleichungen (4.) zu Hülfe nimmt:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial a}\right] = \frac{d}{dx}\left\{\Sigma_i \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}}\left[\frac{\partial y_i}{\partial a}\right]\right\}.$$

Führt man nun eine neue Function V ein durch die Definition

$$(5.)\qquad [V] = \int_{x^0}^{x} [F]\,dx$$

(wodurch auch die Bedeutung von (V) vollkommen bestimmt ist), so geht die vorige Gleichung auch in diese über:

$$(6.)\qquad \left[\frac{\partial V}{\partial a}\right] = \Sigma_i \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}}\left[\frac{\partial y_i}{\partial a}\right] - \left\{\Sigma_i \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}}\left[\frac{\partial y_i}{\partial a}\right]\right\}_{x=x^0}.$$

Man erhält aber für $\left[\frac{\partial V}{\partial a}\right]$ auch sogleich den Ausdruck:

$$(7.)\qquad \left[\frac{\partial V}{\partial a}\right] = \Sigma_i\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\left[\frac{\partial y_i}{\partial a}\right] + \Sigma_i\left(\frac{\partial V}{\partial y_i^0}\right)\left[\frac{\partial y_i^0}{\partial a}\right].$$

Da nun offenbar $\left[\frac{\partial y_i^0}{\partial a}\right]$ und der Werth, welchen $\left[\frac{\partial y_i}{\partial a}\right]$ für $x = x^0$ annimmt, identische Ausdrücke sind, so zeigen die Gleichungen (6.), (7.) denselben Ausdruck $\left[\frac{\partial V}{\partial a}\right]$ als lineare Function der $2n$ Gröfsen $\left[\frac{\partial y_i}{\partial a}\right]$ und $\left[\frac{\partial y_i^0}{\partial a}\right]$ auf doppelte Weise dargestellt. Und solcher doppelt dargestellten Ausdrücke giebt es $2n$, da es $2n$ Constanten a giebt, und alle haben dieselben Coefficienten. Dies ist nicht anders möglich, als wenn die beiden Darstellungen an sich identisch sind, d. h. wenn

$$(8.)\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_i}{dx}} = \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right), \quad \left\{\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_i}{dx}}\right\}_{x=x^0} = -\left(\frac{\partial V}{\partial y_i^0}\right).$$

Die zweite Möglichkeit, dafs nämlich die Determinante der $(2n)^2$ Functionen $\left[\frac{\partial y_i}{\partial a}\right]$, $\left[\frac{\partial y_i^0}{\partial a}\right]$ verschwinde, wird dadurch aufgehoben, dafs sich die a nothwendig durch die y, y^0 müssen ausdrücken lassen, um ein vollständiges System von Integralen darzustellen.

Da nun die Gleichungen (8.) keine identischen sind, so sind sie die Integrale der Gleichungen (2.), (4.).

Denkt man sich in (V) statt der y^0 irgend welche Verbindungen derselben eingehend, welche durch $a_1, a_2, \dots a_n$ bezeichnet seien, so ist

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a_k}\right) = -\Sigma_i\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_i}{dx}}\left[\frac{\partial y_i}{\partial a_k}\right]\right\}_{x=x^0}$$

oder gleich einer neuen Constanten α_k. Hiernach ist es erlaubt, den Integralen (8.) die folgenden allgemeineren zu substituiren:

$$(9.)\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_i}{dx}} = \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right), \quad \alpha_i = \left(\frac{\partial V}{da_i}\right),$$

wo nunmehr (V) als Function von $x, y_1, y_2, \dots y_n, a_1, a_2, \dots a_n$ zu betrachten ist. Diese Gleichungen, zusammen mit den Gleichungen (2.), genügen, um die $2n+\varkappa$ Functionen y, $\frac{dy}{dx}$, λ durch x und die willkürlichen Constanten a, α auszudrücken.

§. 3.

Partielle Differentialgleichung für V.

Wenn sonach die Integrale der isoperimetrischen Probleme auf die Function (V) zurückgeführt sind, so bleibt nunmehr übrig, diese selbst zu finden. Dies geschieht, indem man die Gleichung (5.) nach derjenigen Variablen differentiirt, welche bisher noch nicht benutzt ist, nämlich nach x selbst. Dann aber erhält man einerseits direct F, dann aber auch

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right] = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \Sigma_i\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\frac{dy_i}{dx};$$

und man hat somit die neue Gleichung:

$$(10.)\quad F = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \Sigma_i\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\frac{dy_i}{dx}.$$

Wenn man hiezu die folgenden hinzufügt:

$$(11.)\quad \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}} = \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right), \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots \quad \varphi_x = 0,$$

so hat man die hinreichende Anzahl von Gleichungen, um daraus die λ und die $\frac{dy_i}{dx}$ zu eliminiren. Das Resultat der Elimination ist aber eine Gleichung zwischen x, y_1, y_2, ... y_n und $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)$, ... $\left(\frac{\partial V}{\partial y_n}\right)$; d. h. eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit $n+1$ unabhängigen Variabeln, in welcher die abhängige Variable selbst nicht mehr vorkommt.

Auf diese Gleichung ist also das isoperimetrische Problem zurückgeführt. Die vollständige Lösung derselben enthält $n+1$ Constanten; wir brauchen hier deren nur n, nämlich die a; aber in der That ist von jenen Constanten eine additiv, da (V) selbst in die Differentialgleichung nicht eingeht; und sonach stellt die Function (V), von der auch in den Integralen nur die Ableitungen gebraucht werden, wirklich eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung dar, und die a sind die willkürlichen Constanten derselben, mit Ausschlufs der additiven, welche, als *eines* der a benutzt, eine identische Gleichnng ergeben würde.

Man sieht, mit wie geringen Modificationen die sonst auf die Dynamik angewandte Methode hier ihre allgemeine Anwendung findet. Zugleich aber enthält das Obige die vollkommene Bestätigung des im Eingange angeführten Satzes; die Anwendung der vorliegenden Theorie auf Probleme, welche höhere Differentialquotienten der abhängigen Functionen enthalten, ergiebt sich ohne alles Weitere. Als Anwendung der vorliegenden Theorie sei es mir gestattet, die partielle Differentialgleichung für V in dem Falle anzugeben, wo das Integral eine einzige abhängige Variable und deren Differentialquotienten bis zum n^{ten} enthält. Ist dann y diese Variable, und $y^{(i)} = \frac{d^iy}{dx^i}$, so geht die gedachte Gleichung aus den Gleichungen

$$F\left(x, y, y', \dots y^{(n-1)}, \frac{dy^{(n-1)}}{dx}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + y'\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + y''\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right) + \cdots y^{(n-1)}\left(\frac{\partial V}{\partial y^{(n-2)}}\right) + \frac{dy^{(n-1)}}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}}\right)$$

und
$$\left(\frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}}\right) = \frac{\partial F}{\partial \frac{dy^{(n-1)}}{dx}}$$

hervor durch Elimination von $\frac{dy^{(n-1)}}{dx}$.

§. 4.

Anwendung auf die zweite Variation. Einleitung.

Ich wende mich nunmehr zu der Untersuchung derjenigen Vortheile, welche die in den Gleichungen (9.) enthaltene Form der Integrale der isoperimetrischen Probleme für die Reduction der zweiten Variation darbietet.

Bezeichnen wir durch Ω_1, Ω_2 folgende Functionen:

$$(12.)\quad \begin{cases} \Omega_1 = \Sigma_i u_i \cdot \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_i} + \Sigma_i \dfrac{du_i}{dx} \cdot \dfrac{\partial\Omega}{\partial\dfrac{dy_i}{dx}} + \Sigma_i \mu_i \dfrac{\partial\Omega}{\partial\lambda_i}, \\ 2\Omega_2 = \Sigma u_i \cdot \dfrac{\partial\Omega_1}{\partial y_i} + \Sigma_i \dfrac{du_i}{dx} \cdot \dfrac{\partial\Omega_1}{\partial\dfrac{dy_i}{dx}} + \Sigma_i \mu_i \dfrac{\partial\Omega_1}{\partial\lambda_i}, \end{cases}$$

so stellt, sobald wir u_i in δy_i, μ_i in $\delta\lambda_i$ übergehen lassen, Ω_1 die erste und Ω_2 die zweite Variation der Function Ω dar; und zugleich sind dann

$$\int_{x^0}^{x'} \Omega_1 dx, \quad \int_{x^0}^{x'} \Omega_2 dx$$

die erste und zweite Variation des vorgelegten Integrales. In einem frühern Aufsatz (Bd. 55 dieses Journals, p. 254) habe ich nun gezeigt, dafs sich die zweite Variation immer auf die Form zurückführen lasse:

$$(13.)\quad \delta^2 J = \tfrac{1}{2}\int_{x^0}^{x'} \Sigma_i \Sigma_k \frac{\partial^2\Omega}{\partial\dfrac{dy_i}{dx}\,\partial\dfrac{dy_k}{dx}} \cdot \frac{R_i R_k}{R^2} dx + B' - B^0.$$

Hier bedeuten die R_i lineare Functionen der δy_i, $\delta\dfrac{dy_i}{dx}$; und B', B^0 die Werthe welche eine homogene Function B zweiter Ordnung der δy_i für $x = x'$ und $x = x^0$ annimmt. Die R_i sind noch an einander gebunden durch $\varkappa$ lineare Gleichungen:

$$(14.)\quad \Sigma_i R_i \frac{\partial\varphi_1}{\partial\dfrac{dy_i}{dx}} = 0, \quad \Sigma_i R_i \frac{\partial\varphi_2}{\partial\dfrac{dy_i}{dx}} = 0, \ \ldots \ \Sigma_i R_i \frac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial\dfrac{dy_i}{dx}} = 0.$$

Aufserdem aber hängen die R, R_i, B von gewissen Integralen derjenigen Differentialgleichungen ab, welche das Integral $\int_{x^0}^{x'} \Omega_2 dx$ (12.) zu einem Minimum machen. Die Lösungen dieser Gleichungen kann man unmittelbar hinschreiben; sie sind, wenn a_1, a_2, ... a_{2n} die willkürlichen Constanten der y bezeichnen:

$$(15.)\quad \begin{cases} u_1 = \Sigma_k A_k\left[\frac{\partial y_1}{\partial a_k}\right], & \mu_1 = \Sigma_k A_k\left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial a_k}\right], \\ u_2 = \Sigma_k A_k\left[\frac{\partial y_2}{\partial a_k}\right], & \mu_2 = \Sigma_k A_k\left[\frac{\partial \lambda_2}{\partial a_k}\right] \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ u_n = \Sigma_k A_k\left[\frac{\partial y_n}{\partial a_k}\right], & \end{cases}$$

wo die A neue willkürliche Constanten bedeuten. Solcher Systeme von Lösungen bedarf man n, welche durch obere Indices bei den u und A unterschieden werden mögen; und dieselben werden dadurch particularisirt, dafs die $\frac{n.n-1}{2}$ Gleichungen bestehen sollen:

$$(16.)\quad \Sigma_i \left\{ u_i^r \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_i}{dx}}\right)^s - u_i^s \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_i}{dx}}\right)^r \right\} = 0,$$

wo r und s alle Werthe von 1 bis n annehmen können.

Endlich, wenn diese particularen Lösungen bestimmt sind, wird R die Determinante derselben

$$(17.)\quad R = \Sigma \pm u_1^1,\ u_2^2,\ \ldots\ u_n^n;$$

die R_i, ebenfalls Determinanten, haben die Gestalt

$$(18.)\quad R_i = R\delta\frac{dy_i}{dt} - \Sigma_h \Sigma_k \delta y_h \cdot \frac{du_i^k}{dx} \cdot \frac{\partial R}{\partial u_h^k}.$$

Die Function B aber, welche, wie oben gesagt, die Gestalt hat:

$$(19.)\quad 2B = \Sigma_i \Sigma_k \beta_{ik}\, \delta y_i \delta y_k$$

ist durch die Gleichung definirt:

$$(20.)\quad \beta_{1i} u_1^r + \beta_{2i} u_2^r + \cdots \beta_{ni} u_n^r = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \frac{du_i}{dx}}\right)^r,$$

welche für jeden Werth von i und r besteht.

Dies vorausgeschickt, können wir zur Transformation der vorliegenden Ausdrücke übergehen, indem wir die Constanten a_1, a_2, ... a_{2n} durch unsere Constanten a_1, a_2, ... a_n, α_1, α_2, ... α_n ersetzen, und überhaupt alles auf die Function V zurückzuführen suchen.

§. 5.

Bestimmung der particularen Integrale.

Gehen wir zunächst auf die Gleichungen (16.) näher ein, welche den Zusammenhang der particularen Lösungen u darstellen. Ehe dies aber geschehen kann, mufs die Form der Ausdrücke $\dfrac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_i}{dx}}$ entwickelt werden.

Der Definition (12.) zufolge ist unmittelbar

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_i}{dx}} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial \frac{dy_i}{dx}},$$

und wenn man aus (12.) für Ω_1, seinen Werth setzt und die Differentiation ausführt, so kommt:

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_i}{dx}} = \Sigma_h u_h \frac{\partial}{\partial y_h} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}} + \Sigma_h \frac{du_h}{dx} \cdot \frac{\partial}{\partial \frac{dy_h}{dx}} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}} + \Sigma_h \mu_h \frac{\partial}{\partial \lambda_h} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}}.$$

Aber wenn man hier für die u, μ aus (15.) ihre Werthe einführt, so zeigt sich, dafs dies nichts anderes ist, als

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_i}{dx}} = \Sigma_k A_k \left[\frac{\partial}{\partial a_k} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}} \right]$$

oder, wenn man die Gleichungen (9.) nunmehr zu Hülfe ruft:

$$(21.)\quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_i}{dx}} = \Sigma_k A_k \left[\frac{\partial}{\partial a_k} \left(\frac{\partial V}{\partial y_i} \right) \right];$$

eine mit der Form der u vollkommen analoge Gestalt. Diese können wir jetzt in die Gleichung (16.) einführen.

Indem man jedes Glied der Summe (16.) als eine Determinante betrachtet, und die Sätze über die Zerfällung einer Determinante in Summen von Producten berücksichtigt, erhält man dann für die Gleichung (16.) die folgende:

$$(22.)\; 0 = \Sigma_k \Sigma_m \Big\{ (A_k^r A_m^s - A_m^r A_k^s) \Sigma_i \Big(\Big[\frac{\partial y_i}{\partial a_k} \Big] \Big[\frac{\partial}{\partial a_m} \Big(\frac{\partial V}{\partial y_i} \Big) \Big] - \Big[\frac{\partial y_i}{\partial a_m} \Big] \Big[\frac{\partial}{\partial a_k} \Big(\frac{\partial V}{\partial y_i} \Big) \Big] \Big) \Big\}.$$

Die nach i genommene Summe mufs nothwendig einen constanten Werth annehmen, damit die vorliegende Gleichung nicht mehr als *eine* Gleichung zwischen den A gebe. Wir können aber sogar diesen constanten Werth wirklich bestimmen. Die nach i genommene Summe kann man nämlich auch so darstellen:

$$\left[\frac{\partial}{\partial a_m}\cdot\Sigma_i\frac{\partial y_i}{\partial a_k}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\right]-\left[\frac{\partial}{\partial a_k}\cdot\Sigma_i\frac{\partial y_i}{\partial a_m}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\right],$$

da sich die übrigen durch die Differentiation entstehenden Terme aufheben. Und ferner ist

$$\Sigma_i\left[\frac{\partial y_i}{\partial a_k}\right]\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)=\left[\frac{\partial V}{\partial a_k}\right]-\left(\frac{\partial V}{\partial a_k}\right);$$

und da sich die von dem ersten Theile dieses Ausdruckes herrührenden Terme wiederum zerstören, so bleibt:

$$\left[\frac{\partial}{\partial a_k}\left(\frac{\partial V}{\partial a_m}\right)\right]-\left[\frac{\partial}{\partial a_m}\left(\frac{\partial V}{\partial a_k}\right)\right].$$

Bedenkt man nun, dafs die $a_1, a_2, \dots a_{2n}$ die Integrationsconstanten $a_1, a_2, \dots a_n$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ repräsentiren, von denen (V) nur die erstern enthält; so sieht man, dafs, wenn $\left[\frac{\partial}{\partial a_k}\left(\frac{\partial V}{\partial a_m}\right)\right]$ einen von Null verschiedenen Werth haben soll, zunächst a_m eines der a sein mufs; dann aber geht der Ausdruck in $\left[\frac{\partial \alpha_m}{\partial a_k}\right]$ über, und man sieht, dafs a_k eben dies entsprechende α sein mufs, wodurch denn der Ausdruck den Werth 1 annimmt.

Bezeichnen wir nun die den α entsprechenden A durch den Buchstaben A, so dafs wir die einander entsprechenden Constantenreihen haben:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 & \dots & \mathrm{A}_n, \end{array}$$

so nimmt nunmehr die Gleichung (22.) die einfachere Gestalt an:

$$(23.)\quad 0=\Sigma_k(A_k^r\mathrm{A}_k^s-A_k^s\mathrm{A}_k^r),$$

die Summe jetzt nur von 1 bis n ausgedehnt.

Dies sind also diejenigen Gleichungen, welchen die Constanten zu genügen haben. Ich werde jetzt zeigen wie man sie identisch erfüllen kann.

Man kann im Allgemeinen immer n^2 Gröfsen c so bestimmen, dafs sie den Gleichungen genügen:

$$(24.)\quad\begin{cases} \mathrm{A}_m^1 = c_{1m}A_1^1+c_{2m}A_2^1+\cdots c_{nm}A_n^1 \\ \mathrm{A}_m^2 = c_{1m}A_1^2+c_{2m}A_2^2+\cdots c_{nm}A_n^2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{A}_m^n = c_{1m}A_1^n+c_{2m}A_2^n+\cdots c_{nm}A_n^n, \end{cases}$$

welche für alle Werthe von m bestehen sollen. Führt man nun diese Werthe in die Gleichung (23.) ein, so wird

$$0 = \Sigma_k \Sigma_h (A_k^r A_h^s - A_h^r A_k^s) c_{hk}.$$

Diese Gleichung kann sich aber nicht ändern, wenn man die Indices k, h vertauscht, und das Resultat der vorliegenden Gleichung hinzufügt. Dann erhält man:

$$0 = \Sigma_k \Sigma_h (A_k^r A_h^s - A_h^r A_k^s)(c_{hk} - c_{kh});$$

und aus dieser Form geht hervor, dafs man die $\frac{n.n-1}{2}$ Gleichungen (23.) ersetzen kann durch die $\frac{n.n-1}{2}$ Gleichungen

$$(25.) \qquad c_{hk} = c_{kh},$$

oder mit andern Worten:

Die willkürlichen Constanten A, A sind an einander gebunden durch ein beliebiges System linearer Gleichungen von symmetrischer Determinante.

Auf diese Weise sind also die $2n^2$ Constanten A, A zurückgeführt auf die $n^2 + \frac{n.n+1}{2}$ Constanten A, c, welche von einander vollständig unabhängig sind.

§. 6.

Erste Umformung der zweiten Variation.

Es wird sich zeigen, dafs die Constanten A überhaupt ganz aus der Rechnung herausgehen, und die c allein zurückbleiben. Dies hat in der That eine tiefere Bedeutung, denn der directe Weg zur Reduction der zweiten Variation führt auf ein System von $\frac{n.n+1}{2}$ simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung; die c sind die Integrationsconstanten dieses Systems. Auf dasselbe soll später noch einmal zurückgegangen werden. Untersuchen wir zunächst, in welcher Weise die vorliegende Bestimmung der Constanten die unter das Integralzeichen eingehenden Functionen R, R_i beeinflufst.

Wenn man in den Ausdrücken für die u, welche die Gleichungen (15.) geben, die Werthe der Constanten A aus (24.) einführt, so wird

$$u_i^r = \sum_{k=1}^{k=n} A_k^r \left\{ \left[\frac{\partial y_i}{\partial a_k}\right] + c_{1k}\left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1}\right] + c_{2k}\left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_2}\right] + \cdots c_{nk}\left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_n}\right] \right\},$$

oder die u nehmen die Gestalt an:

$$(26.) \qquad u_i^r = A_1^r v_i^1 + A_2^r v_i^2 + \cdots A_n^r v_i^n,$$

wenn nämlich gesetzt wird:

$$(27.)\quad v_i^k = \left[\frac{\partial y_i}{\partial a_k}\right] + c_{1k}\left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1}\right] + c_{2k}\left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_2}\right] + \cdots c_{nk}\left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_n}\right].$$

Bildet man jetzt die Determinante der v, so bemerkt man, dafs deren Elemente gerade die Form haben, welche die Zerfällung einer Determinante in zwei Factoren erlaubt; man erhält sogleich:

$$(28.)\quad R = A.S,$$

wenn A die Determinante der A_k und S die Determinante der v bedeutet.

Gehen wir nun zu den R_i über, welche durch die Gleichung (18.) gegeben sind. Hier ist der Coefficient von $\delta\frac{dy_i}{dt}$ eben R; aber auch der Coefficient von δy_h, nämlich

$$\frac{du_i^1}{dx}\cdot\frac{\partial R}{\partial u_h^1} + \frac{du_i^2}{dx}\cdot\frac{\partial R}{\partial u_h^2} + \cdots \frac{du_i^n}{dx}\cdot\frac{\partial R}{\partial u_h^n},$$

ist eine Determinante von derselben Natur wie R selbst, nur dafs an die Stelle der v_h die Functionen $\frac{dv_i}{dx}$ getreten sind. Auch dieser Ausdruck geht also in die Form über:

$$A\left\{\frac{dv_i^1}{dx}\cdot\frac{\partial S}{\partial v_h^1} + \frac{dv_i^2}{dx}\cdot\frac{\partial S}{\partial v_h^2} + \cdots \frac{dv_i^n}{dx}\cdot\frac{\partial S}{\partial v_h^n}\right\};$$

und somit nimmt R_i die Gestalt an:

$$(29.)\quad R_i = A.S_i,$$

wenn

$$(30.)\quad \begin{cases} S_i = S\delta\frac{dy_i}{dt} - \Sigma_h\Sigma_k\delta y_h\cdot\frac{dv_i^k}{dt}\cdot\frac{\partial S}{\partial v_h^k}, \\ S = \Sigma\pm v_1^1 v_2^2 \ldots v_n^n \end{cases}$$

gesetzt wird.

Hiernach kommen die A nur noch in der Verbindung ihrer Determinante vor. Aber die zweite Variation (13.) enthält auch nur die Verhältnisse $\frac{R_i}{R}$; es gehen also aus dem ersten Theile der zweiten Variation die A wirklich vollkommen heraus, und man erhält:

$$(31.)\quad \delta^2 J = \tfrac{1}{2}\int_{x^0}^{x'} \Sigma_i\Sigma_k \frac{\partial^2\Omega}{\partial\frac{dy_i}{dx}\,\partial\frac{dy_k}{dx}}\cdot\frac{S_i S_k}{S^2}\cdot dx + B' - B^0.$$

Diese Gleichung giebt uns für die v eine sehr einfache Bedeutung. Denn die S, S_i haben ganz dieselbe Form für die v, wie sie R, R_i für die u haben. Man kann daher sagen:

Statt sich der particularen Integrale u zu bedienen, genügt es, die particularen Integrale v zu benutzen, welche eine geringere Anzahl willkürlicher Constanten $\left(nur\ \frac{n.n+1}{2}\right)$ enthalten, ohne dafs dies die Allgemeinheit der Betrachtung vermindert.

Ehe wir aber diesen Satz vollständig zugeben können, ist es nöthig nachzuweisen, dafs die A sowohl auf die Bedingungsgleichungen (14.), welchen die R_i unterworfen sind, als auf die Function B gleichfalls ohne Einflufs sind.

Dies geschieht ohne Mühe. Die Gleichungen (14.) gehen durch Anwendung der Gleichung (29.) von selbst in die Form über:

$$(32.)\qquad \Sigma_i S_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial \frac{dy_i}{dx}} = 0, \qquad \Sigma_i S_i \frac{\partial \varphi_2}{\partial \frac{dy_i}{dx}} = 0, \qquad \dots \qquad \Sigma_i S_i \frac{\partial \varphi_x}{\partial \frac{dy_i}{dx}} = 0,$$

welche die A nicht mehr enthält.

Die Coefficienten der Function B endlich, welche von den Gleichungen (20.) abhängen, bedürfen noch der Aufstellung der Function $\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_k^r}{dx}}$. Diese Function hatte in (21.) eine Form angenommen, welche der Form der u ganz ähnlich war. Dies mufs daher auch noch der Fall bleiben, wenn man mit Hülfe der Gleichungen (24.) die c einführt; d. h. es mufs, analog mit (26.), (27.) die Gleichung stattfinden:

$$(33.)\qquad \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_i}{dx}}\right)^r = A_1^r \Omega_i^1 + A_2^r \Omega_i^2 + \cdots A_n^r \Omega_i^n,$$

wo

$$(34.)\ \Omega_i^k = \left[\frac{\partial}{\partial a_k}\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\right] + c_{1k}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\right] + c_{2k}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\right] + \cdots c_{nk}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_n}\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\right].$$

Hiedurch geht aber die für die β bestehende Gleichung (20.) in die folgende über:

$$0 = \Sigma_k A_k^r \{\beta_{1i} v_1^k + \beta_{2i} v_2^k + \cdots \beta_{ni} v_n^k - \Omega_i^k\},$$

welche für alle Werthe von r gelten soll, und welche daher das System fordert:

$$(35.)\qquad \beta_{1i} v_1^k + \beta_{2i} v_2^k + \cdots \beta_{ni} v_n^k = \Omega_i^k,$$

welches wiederum von den A ganz frei geworden ist. Aber auch die Bedeutung von Ω_i^k ist genau dieselbe, wie die des rechten Theils in (20.), nur die u durch die v ersetzt gedacht. Denn setzen wir die v an die Stelle der u, so heifst das mit andern Worten, es werde $A_k^r = 0$, und $A_r^r = 1$ gesetzt. Zugleich geht dann u_i^r in v_i^r über, und $\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_i}{dx}}\right)^r$ in $\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{dv_i}{dx}}\right)^r$; so dafs also aus (33.) die Bedeutung von Ω_i^r fliefst:

$$(36.)\quad \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{dv_i}{dx}}\right)^r = \Omega_i^r,$$

welche der Bedeutung des rechten Theils in (20.) vollkommen analog ist. Hieraus folgt endlich die Zulässigkeit des eben ausgesprochenen Satzes.

Durch die Gleichungen (27.), (30.), (31.), (32.), (35.), (36.) ist die neue Gestalt der zweiten Variation vollständig gegeben. Sie hat den Vorzug, nur die ihr zukommende Zahl willkürlicher Constanten zu zeigen, welche vollständig von einander unabhängig sind.

§. 7.

Zweite Umformung des Theils unter dem Integralzeichen.

Aber dafs auch die vorliegende Gestalt die wahre Form noch nicht sei, dafür spricht vor allem die Gestalt, in welcher die Function B gegeben ist. Denn es ist offenbar $\beta_{ik} = \beta_{ki}$; und dies ist aus den Gleichungen (35.) noch keinesweges ersichtlich. Man wird daher gedrängt, einen Schritt weiter zu gehen, und die Function (V) wirklich in die Betrachtung eingehen zu lassen.

Hiezu wird es vor Allem nothwendig die Werthe der $\left[\frac{\partial y_i}{\partial a_k}\right]$, $\left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k}\right]$ zu bestimmen. Dies mufs mit Hülfe derjenigen Gleichungen geschehen, welche die y durch die Constanten ausdrücken, nämlich:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\right) = \alpha_1,\quad \left(\frac{\partial V}{\partial a_2}\right) = \alpha_2,\ \dots\ \left(\frac{\partial V}{\partial a_n}\right) = \alpha_n.$$

Die Differentiation dieser Gleichungen nach den a ergiebt nun folgendes System:

$$(37.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial y_1}\right)\left[\frac{\partial y_1}{\partial a_k}\right] + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial y_2}\right)\left[\frac{\partial y_2}{\partial a_k}\right] + \cdots \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial y_n}\right)\left[\frac{\partial y_n}{\partial a_k}\right] = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_k}\right), \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial y_1}\right)\left[\frac{\partial y_1}{\partial a_k}\right] + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial y_2}\right)\left[\frac{\partial y_2}{\partial a_k}\right] + \cdots \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial y_n}\right)\left[\frac{\partial y_n}{\partial a_k}\right] = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_k}\right); \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial y_1}\right)\left[\frac{\partial y_1}{\partial a_k}\right] + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial y_2}\right)\left[\frac{\partial y_2}{\partial a_k}\right] + \cdots \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial y_n}\right)\left[\frac{\partial y_n}{\partial a_k}\right] = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial a_k}\right). \end{cases}$$

Hätten wir, statt nach a_k, nach α_k differentiirt, so würde auf der rechten Seite überall Null gekommen sein, und nur bei der k^{ten} Gleichung 1.

Bezeichnet man nun die Determinante der $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial \gamma_i}\right)$ mit p und mit p_i^k den Differentialquotienten derselben nach jenem Elemente, so wird nach dem Obigen:

$$(38.)\qquad -p\left[\frac{\partial y_i}{\partial a_k}\right] = p_i^1\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_k}\right) + p_i^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_k}\right) + \cdots p_i^n\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial a_k}\right)$$

und

$$(39.)\qquad p\left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k}\right] = p_i^k.$$

Dies giebt den Functionen v eine neue Gestalt, und zwar eine analoge mit derjenigen, welche die u durch die v selbst ausgedrückt zeigt; denn die Gleichung (27.) geht nunmehr über in:

$$(40.)\qquad p\,v_i^k = p_i^1 w_{1k} + p_i^2 w_{2k} + \cdots p_i^n w_{nk},$$

wo die Functionen w_{hk} die einfache Gestalt annehmen:

$$(41.)\qquad w_{hk} = c_{hk} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_h \partial a_k}\right),$$

so dafs die Determinante der w eine symmetrische ist.

Untersuchen wir, welche Gestalt in Folge dessen die Functionen S, S_i annehmen. Die erste derselben zerfällt offenbar wiederum in zwei Factoren; der eine derselben ist die Determinante der Functionen $\frac{p_i^k}{p}$, d. h. $\frac{1}{p}$; der andere aber ist die Determinante der w, welche durch W bezeichnet sei; so dafs man die Gleichungen hat:

$$(42.)\qquad S = \frac{1}{p}\cdot W,\qquad W = \Sigma \pm w_{11} w_{22} \ldots w_{nn}.$$

Um nun den Ausdruck S_i zu bilden, betrachten wir zunächst den Ausdruck

$$\delta y_1 \frac{\partial S}{\partial v_1^k} + \delta y_2 \frac{\partial S}{\partial v_2^k} + \cdots \delta y_n \frac{\partial S}{\partial v_n^k}.$$

Auch dieser ist eine Determinante, nur dafs an die Stelle der v^k die δy getreten sind. Könnten wir nun auch den δy die Form geben:

$$(43.)\qquad p\,\delta y_h = w_1 p_h^1 + w_2 p_h^2 + \cdots w_n p_h^n,$$

so würde diese Determinante gleichfalls in zwei Factoren zerfallen, genau wie S, nämlich in:

$$\frac{1}{p}\left(w_1 \frac{\partial W}{\partial w_{1k}} + w_2 \frac{\partial W}{\partial w_{2k}} + \cdots w_n \frac{\partial W}{\partial w_{nk}}\right).$$

Eine solche Bestimmung der w_k ist natürlich immer möglich. Sie führt aber in dem vorliegenden Falle zu einem sehr einfachen Resultat. Denn aus der Bedeutung der p ergiebt sich sofort, indem man die w durch die δy ausdrückt:

$$\begin{aligned} w_k &= \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial y_1}\right)\delta y_1 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial y_2}\right)\delta y_2 + \cdots \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial y_n}\right)\delta y_n, \\ &= \delta\left(\frac{\partial V}{\partial a_k}\right); \end{aligned}$$

oder wenn man sich die Veränderungen der y dadurch entstanden denkt, dafs man den α kleine veränderliche Incremente $\delta\alpha$ ertheilt hat:

$$(44.)\qquad w_k = \delta\alpha_k.$$

Und so geht der betrachtete Ausdruck über in:

$$\frac{1}{p}\left(\frac{\partial W}{\partial w_{1k}}\delta\alpha_1 + \frac{\partial W}{\partial w_{2k}}\delta\alpha_2 + \cdots \frac{\partial W}{\partial w_{nk}}\delta\alpha_n\right).$$

Führen wir dies nun in den Ausdruck von S_i ein (30.), und setzen auch für $\frac{d.\delta y_i}{dt}$ aus (43.), (44.), und für $\frac{dv_i^k}{dt}$ aus (40.) die Werthe ein, so erhalten wir:

$$S = \frac{1}{p}\left\{W\frac{d}{dx}\,\frac{p_i^1\delta\alpha_1 + p_i^2\delta\alpha_2\ldots p_i^n\delta\alpha_n}{p} - \Sigma_k\left(\frac{\partial W}{\partial w_{1k}}\delta\alpha_1 + \frac{\partial W}{\partial w_{2k}}\delta\alpha_2\cdots\frac{\partial W}{\partial w_{nk}}\delta\alpha_n\right)\frac{d}{dx}\,\frac{w_{1k}p_i^1 + w_{2k}p_i^2\cdots}{p}\right\}.$$

Hier übersieht man leicht, dafs die von der Differentiation der p herrührenden Terme sich gegenseitig zerstören; denn $\frac{d}{dx}\frac{p_i^r}{p}$ ist multiplicirt mit

$$W\delta\alpha_r - \Sigma_k\left(\frac{\partial W}{\partial w_{1k}}\delta\alpha_1 + \frac{\partial W}{\partial w_{2k}}\delta\alpha_2\cdots\frac{\partial W}{\partial w_{nk}}\delta\alpha_n\right)w_{rk},$$

was identisch verschwindet. So nimmt denn S_i die folgende Gestalt an:

$$(45.)\qquad S_i = \frac{1}{p^2}(p_i^1 T_1 + p_i^2 T_2 + \cdots p_i^n T_n),$$

wo

$$(46.)\qquad T_h = W\frac{d\delta\alpha_h}{dx} - \Sigma_k\Sigma_m\,\delta\alpha_m.\frac{dw_{hk}}{dx}.\frac{\partial W}{\partial w_{mk}}.$$

Auch T_h ist eine Determinante, und zwar von ganz derselben Form wie R_i, S_i; an die Stelle der δy sind die $\delta\alpha$ getreten, an die Stelle der u, v aber die w, wodurch ein Theil jener Determinante eine symmetrische Form angenommen hat; die Determinantenform der Function T_h ist die folgende:

$$(47.)\quad T_h = \begin{vmatrix} \frac{d\delta\alpha_h}{dx} & \delta\alpha_1 & \delta\alpha_2 & \dots & \delta\alpha_n \\ \frac{dw_{1h}}{dx} & w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ \frac{dw_{2h}}{dx} & w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dw_{nh}}{dx} & w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{vmatrix}.$$

Wenn wir nun dies in die Form (31.) der zweiten Variation einführen, so erhalten wir unter dem Integralzeichen eine homogene Function zweiter Ordnung der $\frac{T_h}{W}$; und die Coefficienten derselben sind die Ausdrücke:

$$(48.)\qquad \Sigma_i \Sigma_k \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}\, \partial \frac{dy_k}{dx}} \cdot \frac{p_i^h p_i^r}{p^2}.$$

Auch diese Coefficienten haben eine einfache Bedeutung. Denken wir uns, wie oben, die Variationen der y durch kleine Variationen der α hervorgerufen, so wird man zunächst sich die y, $\frac{dy}{dx}$, λ in Ω ausgedrückt denken können durch die Functionen α, $\frac{d\alpha}{dx}$ (welches letztere nach vorgenommener Variation Null zu setzen), und zwar mit Hülfe der Gleichungen:

$$(49.)\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_k}\right) = \alpha_k, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_k}\right) = \frac{d\alpha_k}{dx}.$$

In diesem Sinne mag die Function Ω mit $\overline{\Omega}$ bezeichnet werden. Dann wollen wir, dem Coefficienten $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}\, \partial \frac{dy_k}{dx}}$ entsprechend, den Ausdruck $\frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial \frac{d\alpha_h}{dx}\, \partial \frac{d\alpha_r}{dx}}$ bilden; es wird sich zeigen, dafs der Coefficient (48.) sich immer durch diesen Ausdruck ersetzen läfst.

Da sich die y mittelst der ersten Gleichung (49.) ausdrücken, welche die $\frac{dy}{dx}$ nicht enthalten, so folgt, dafs die Differentialquotienten

$$\left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k}\right], \qquad \frac{\overline{\partial y_i}}{\partial \alpha_k}$$

identisch sind. Aber da sich die $\frac{dy_i}{dx}$ aus der zweiten Gleichung (49.) bestimmen, welche nur der Differentialquotient der ersten nach x ist, so folgt, dafs auch

$$\frac{\partial \frac{\overline{dy_i}}{dx}}{\partial \frac{d\alpha_k}{dx}} = \left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k}\right],$$

oder, nach den Gleichungen (39.), gleich $\frac{p_i^k}{p}$.

Bemerkt man ferner, dafs sowohl diese Ausdrücke als die y selbst nur von den α, nicht aber von den $\frac{d\alpha_k}{dx}$ abhängen; und dafs ferner Ω eine lineare Function der λ ist, so hat man:

$$\frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial \frac{d\alpha_h}{dx}\, \partial \frac{d\alpha_r}{dx}} = \Sigma_i \Sigma_k \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}\, \partial \frac{dy_k}{dx}} \cdot \frac{p_i^r p_k^h}{p^2}$$
$$+ 2\Sigma_i \Sigma_k \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \frac{dy_k}{dx}\, \partial \lambda_i} \cdot \frac{p_k^r}{p} \cdot \frac{\partial \overline{\lambda_i}}{\partial \frac{d\alpha_h}{dx}} + \Sigma_i \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial^2 \overline{\lambda_i}}{\partial \frac{d\alpha_h}{dx}\, \partial \frac{d\alpha_r}{dx}}.$$

Auch der letzte Term dieses Ausdrucks verschwindet noch, weil $\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_i}$ nichts Anderes ist als φ_i, mithin Null; und der zweite Term rechts nimmt sofort die Gestalt an:

$$2\Sigma_i \frac{\partial \overline{\lambda_i}}{\partial \frac{d\alpha_h}{dx}} \cdot \frac{\partial \overline{\varphi_i}}{\partial \frac{d\alpha_r}{dx}}.$$

Und wenn wir jetzt den vorliegenden Ausdruck mit $\frac{T_h T_r}{W^2}$ multipliciren und die Summe nach h, r nehmen, so erhalten wir für den unter dem Integralzeichen der zweiten Variation stehenden Ausdruck:

$$(50.)\quad \Sigma_i \Sigma_k \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}\, \partial \frac{dy_k}{dx}} \cdot \frac{S_i S_k}{S^2} = \Sigma_r \Sigma_h \frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial \frac{d\alpha_r}{dx}\, \partial \frac{d\alpha_h}{dx}} \cdot \frac{T_h T_r}{W^2}$$
$$- \frac{2}{W^2} \Sigma_i \left(\frac{\partial \overline{\lambda_i}}{\partial \frac{d\alpha_1}{dx}} T_1 + \frac{\partial \overline{\lambda_i}}{\partial \frac{d\alpha_2}{dx}} T_2 + \cdots \right) \left(\frac{\partial \overline{\varphi_i}}{\partial \frac{d\alpha_1}{dx}} T_1 + \frac{\partial \overline{\varphi_i}}{\partial \frac{d\alpha_2}{dx}} T_2 + \cdots \right).$$

Aber erinnern wir uns jetzt derjenigen linearen Gleichungen, welche zwischen den S bestanden (32.), nämlich der Gleichungen:

$$\Sigma_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial \frac{dy_k}{dx}} \cdot S_k = 0;$$

dieselbe nimmt durch die Einführung der T die Gestalt an:

$$\Sigma_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial \frac{dy_k}{dx}} \cdot \frac{p_k^1 T_1 + p_k^2 T_2 + \cdots p_k^n T_n}{p},$$

oder endlich, nach der eben eingeführten Differentiationsweise:

$$(51.)\quad \frac{\partial \overline{\varphi_i}}{\partial \frac{d\alpha_1}{dx}} \cdot T_1 + \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \frac{d\alpha_2}{dx}} \cdot T_2 + \cdots \frac{\partial \overline{\varphi_i}}{\partial \frac{d\alpha_n}{dx}} \cdot T_n = 0.$$

Dies zeigt, dafs der zweite Term auf der rechten Seite von (50.) verschwindet. So kann man jetzt der zweiten Variation die Form geben:

$$(52.)\quad \delta^2 J = \tfrac{1}{2} \int_{x^0}^{x'} \frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial \frac{d\alpha_r}{dx} \partial \frac{d\alpha_h}{dx}} \cdot \frac{T_r T_h}{W^2} \cdot dx + B' - B^0.$$

Der Term unter dem Integralzeichen hat hier die einfachste Form angenommen, deren er durch die gegenwärtigen Betrachtungen fähig ist, indem Alles darin durch die Function V ausgedrückt ist. Die Bedeutung der darin eingehenden Gröfsen ist durch die Gleichungen (41.), (42.), (47.) bestimmt.

Es bleibt übrig, dafs wir nun endlich die entsprechenden Betrachtungen auf die Function B anwenden, um dieser ihre definitive Gestalt zu geben.

§. 8.

Darstellung der Function aufserhalb des Integralzeichens.

Die Gleichungen (35.) sind es, aus welchen die Functionen β sich bestimmen. Betrachten wir zunächst die rechten Theile dieser Gleichungen. Wenn wir in (34.) die Differentiation ausführen, und uns zugleich an die Bedeutung der v aus (27.) erinnern, so wird sogleich:

$$\Omega_i^k = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial y_i}\right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_1}\right) v_1^k + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_2}\right) v_2^k + \cdots \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_n}\right) v_n^k.$$

Werfen wir also die letzten Terme dieses Ausdrucks auf die linke Seite der Gleichung (35.) hinüber, so haben wir:

$$\left(\beta_{1i} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_1}\right)\right) v_1^k + \left(\beta_{2i} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_2}\right)\right) v_2^k + \cdots \left(\beta_{ni} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_n}\right)\right) v_n^k = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial y_i}\right).$$

Multipliciren wir jetzt diese Gleichung mit δy_i und bilden die Summe nach i, so wird, indem offenbar

$$\left(\beta_{h1} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_h \partial y_1}\right)\right) \delta y_1 + \left(\beta_{h2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_h \partial y_2}\right)\right) \delta y_2 + \cdots = \frac{\partial (B - \delta^2 V)}{\partial \delta y_h},$$

die folgende erhalten:

$$\frac{\partial(B-(\delta^2V))}{\partial\delta y_1}v_1^k+\frac{\partial(B-(\delta^2V))}{\partial\delta y_2}v_2^k+\cdots\frac{\partial(B-(\delta^2V))}{\partial\delta y_n}v_n^k = \delta\alpha_k.$$

Und wenn man nun diese Gleichungen auflöst, so kommt

$$S\frac{\partial(B-(\delta^2V))}{\partial\delta y_h} = \delta\alpha_1\frac{\partial S}{\partial v_h^1}+\delta\alpha_2\frac{\partial S}{\partial v_h^2}+\cdots\delta\alpha_n\frac{\partial S}{\partial v_h^n}.$$

Endlich multipliciren wir diese Gleichung mit δy_h und summiren nach h. Auf der linken Seite erscheint dann

$$2S(B-(\delta^2V));$$

auf der rechten aber die Summe

$$\Sigma_k\delta\alpha_k\Big(\frac{\partial S}{\partial v_1^k}\delta y_1+\frac{\partial S}{\partial v_2^k}\delta y_2+\cdots\frac{\partial S}{\partial v_n^k}\delta y_n\Big).$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck ist bereits früher behandelt worden, bei Gelegenheit der Gleichungen (42.) bis (45.); wo er sich gleich

$$\frac{1}{p}\Big(\frac{\partial W}{\partial w_{1k}}\delta\alpha_1+\frac{\partial W}{\partial w_{2k}}\delta\alpha_2+\cdots\frac{\partial W}{\partial w_{nk}}\delta\alpha_n\Big)$$

fand. Bemerken wir noch dafs $S=\frac{W}{p}$ (42.), so nimmt hienach die Function B folgende Gestalt an:

$$(53.)\qquad B = (\delta^2V)+\frac{1}{2W}\Sigma_i\Sigma_k\frac{\partial W}{\partial w_{ik}}\delta\alpha_i\delta\alpha_k,$$

wodurch endlich die Form der Function B vollständig angegeben wird. Der letzte Theil derselben ist wiederum eine Determinante, und zwar eine symmetrische; indem man derselben ihre Form giebt, und zugleich für (δ^2V) seinen Werth einsetzt, erhält man den folgenden Ausdruck:

$$(54.)\quad 2B=\Sigma_i\Sigma_k\Big(\frac{\partial^2V}{\partial y_i\partial y_k}\Big)\delta y_i\delta y_k-\frac{1}{\Sigma\pm w_{11}w_{22}\dots w_{nn}}\cdot\begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} & \delta\alpha_1 \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} & \delta\alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} & \delta\alpha_n \\ \delta\alpha_1 & \delta\alpha_2 & \dots & \delta\alpha_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Aufstellung der Function B ist auch insofern von Interesse, als gerade der unmittelbarste Weg, zu einer Reduction der zweiten Variation zu gelangen, dieselbe von einem Systeme von $\frac{n.n+1}{2}$ Differentialgleichungen erster Ordnung abhängig macht, welche sehr verwickelter Natur sind, und als deren abhängige Variabeln sich die Coefficienten der Function B darstellen. Die Gleichung (54.) enthält die vollständige Lösung jener Differentialgleichungen. Die Gleichungen selbst sind in den Formeln (20.), (23.), (24.) des bereits angeführten Aufsatzes enthalten. Indem man dort alle Hülfsgröfsen entfernt, und sodann die Gleichung (54.) hinzuzieht, gelangt man zu folgendem Theorem, in welchem, wie in der citirten Abhandlung, die Bezeichnungen

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i \partial y_k} = a_{ik}, \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i \partial \frac{dy_k}{dx}} = b_i^{(k)}, \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx} \partial \frac{dy_k}{dx}} = c^{ik},$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} = p_i^{(m)}, \qquad \frac{\partial \varphi_m}{\partial \frac{dy_i}{dx}} = q_i^{(m)}$$

angewandt sind:

Die Integralgleichungen des Systems simultaner Differentialgleichungen:

$$0 = \begin{vmatrix}
a_{ik} - \frac{d\beta_{ik}}{dx} & b_i^{(1)} - \beta_{i1} & b_i^{(2)} - \beta_{i2} & \dots & b_i^{(n)} - \beta_{in} & p_i^{(1)} & p_i^{(2)} & \dots & p_i^{(\varkappa)} \\
b_k^{(1)} - \beta_{k1} & c^{11} & c^{12} & \dots & c^{1n} & q_1^{(1)} & q_1^{(2)} & \dots & q_1^{(\varkappa)} \\
b_k^{(2)} - \beta_{k2} & c^{12} & c^{22} & \dots & c^{2n} & q_2^{(1)} & q_2^{(2)} & \dots & q_2^{(\varkappa)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
b_k^{(n)} - \beta_{kn} & c^{1n} & c^{2n} & \dots & c^{nn} & q_n^{(1)} & q_n^{(2)} & \dots & q_n^{(\varkappa)} \\
p_k^{(1)} & q_1^{(1)} & q_2^{(1)} & \dots & q_n^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
p_k^{(2)} & q_1^{(2)} & q_2^{(2)} & \dots & q_n^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
p_k^{(\varkappa)} & q_1^{(\varkappa)} & q_2^{(\varkappa)} & \dots & q_n^{(\varkappa)} & 0 & 0 & \dots & 0
\end{vmatrix}$$

sind die folgenden:

$$0 = \begin{vmatrix}
\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_k}\right) - \beta_{ik} & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial y_i}\right) & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial y_i}\right) & \dots & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial y_i}\right) \\
\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial y_k}\right) & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_1}\right) - c_{11} & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_1}\right) - c_{21} & \dots & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial a_1}\right) - c_{n1} \\
\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial y_k}\right) & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_2}\right) - c_{12} & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_2}\right) - c_{22} & \dots & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial a_2}\right) - c_{n2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial y_k}\right) & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_n}\right) - c_{1n} & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_n}\right) - c_{2n} & \dots & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial a_n}\right) - c_{nn}
\end{vmatrix}$$

wo die c willkürliche Constanten bedeuten und $c_{ik} = c_{ki}$ ist.

Berlin, den 21. Februar 1858.
