14.
Ueber die Reduction der zweiten Variation auf ihre einfachste Form.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Berlin.)

Seit *Jacobi* durch seine im 17ten Bande dieses Journals erschienene Abhandlung über die zweite Variation der einfachen Integrale der Variationsrechnung neue Wege erschlofs, ist man vielfach damit beschäftigt gewesen, die dort gegebenen Resultate zu beweisen; und noch kürzlich hat eine schöne Abhandlung von *Hesse* (dieses Journal Bd. 54, p. 227) die Darstellung dieser Speculationen zum Gegenstande gehabt. Indefs hat man bis jetzt, soviel ich weifs, nicht daran gedacht, den Resultaten *Jacobis* diejenige Allgemeinheit zu geben, welche zur Vervollständigung der erwähnten Theorie erforderlich ist. Die Arbeit *Jacobis* bezieht sich nur auf einfache Integrale, bei welchen in die zu integrirende Function eine einzige abhängige Veränderliche eingeht. Die nothwendige Verallgemeinerung dieser Resultate würde einerseits vielfache Integrale in den Bereich ihrer Betrachtung ziehen, andrerseits den Fall einer gröfseren Anzahl abhängiger Variabeln berücksichtigen. Sie würde sich endlich mit dem Einflusse zu beschäftigen haben, welchen Bedingungsgleichungen zwischen den gesuchten Functionen auf die Gestaltung der zweiten Variation ausüben. Die folgenden Betrachtungen haben den Zweck, in diesen Richtungen einen Schritt weiter zu führen. Ich werde zunächst einfache Integrale betrachten, mit einer beliebigen Anzahl abhängiger Variabeln unter dem Integralzeichen, und begleitet von einer beliebigen Anzahl von Bedingungsgleichungen; ich werde dabei zunächst voraussetzen, dafs nur die ersten Ableitungen der abhängigen Variabeln in den Bedingungsgleichungen und unter dem Integralzeichen vorkommen, so aber, dafs in die Bedingungsgleichungen Variable eingehen können, welche die zu integrirende Function nicht enthält, und umgekehrt. Man wird sehen, wie hiedurch auch die allgemeine Aufgabe gelöst ist:

Die zweite Variation eines einfachen Integrals, welches eine beliebige Anzahl abhängiger Variabeln und beliebige Differentialquotienten derselben enthält, zwischen welchen eine beliebige Anzahl von Bedingungen gegeben ist, auf die kleinste Zahl von Variationen zurückzuführen.

Ein kleiner Abschnitt endlich wird sich mit der zweiten Variation vielfacher Integrale beschäftigen, unter der Voraussetzung, dafs nur eine einzige abhängige Variable und nur die ersten Ableitungen derselben in die zu integrirende Function eingehen.

Derjenige Abschnitt der Variationsrechnung, welcher sich mit der zweiten Variation der einfachen Integrale beschäftigt, darf somit als, in den Umrissen wenigstens, vollständig dargestellt betrachtet werden. Die Kriterien des Maximums und Minimums kommen zurück auf die Betrachtung einer gegebenen Function zweiter Ordnung, welche innerhalb der Grenzen weder ihr Zeichen ändern noch verschwinden darf; und auf die Betrachtung einer gewissen, aus partikulären Integralen der isoperimetrischen Gleichungen zusammengesetzten Determinante, welche innerhalb der Grenzen niemals verschwinden darf.

Die Behandlung vielfacher Integrale, abgesehen von dem betrachteten Falle, scheint noch grofsen Schwierigkeiten zu unterliegen *).

§. 1.

Es bezeichne f eine Function der Functionen $y_1, y_2, \dots y_n$ und ihrer ersten Differentialquotienten nach x, so wie der Gröfse x selbst; die Function, zwischen den Werthen $x=a$ und $x=b$ integrirt, soll ein Maximum oder Minimum werden. Die Functionen y seien in ihrer Unabhängigkeit von einander beschränkt durch die Gleichungen

$$(1.)\quad \varphi_1=0,\quad \varphi_2=0,\quad \dots\quad \varphi_\varkappa=0,$$

welche die Functionen y und deren erste Ableitungen enthalten; ohne dafs dabei die Beschränkung hinzugefügt werden soll, dafs nicht in einigen der φ, oder selbst in f gewisse der y und $\frac{dy}{dx}$ ganz fehlen könnten. Man bemerkt übrigens leicht, dafs Bedingungen, wie sie bei den isoperimetrischen Problemen vorkommen, welche erfordern, dafs ein gewisses anderes Integral einen gegebenen Werth habe, auf den Gang der folgenden Untersuchungen keinen wesentlichen Einflufs haben und daher übergangen werden können.

Man behandelt das vorliegende Problem nach dem Vorgange von *Lagrange* bekanntlich so, dafs man den Ausdruck

$$(2.)\quad V=\int_a^b (f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots)\,dx$$

*) Gegenwärtig, zur Zeit des Drucks der vorliegenden Abhandlung, ist es mir gelungen, diese Schwierigkeiten zu überwinden, und es wird eine spätere, bereits vollendete Abhandlung die Ausdehnung dieser Transformation auf vielfache Integrale zum Gegenstande haben.

in Bezug auf die in f eingehenden y zu einem Minimum macht, wo die λ gewisse Functionen von x sind. Das Verschwinden der ersten Variation von V giebt dann die Gleichungen:

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y_1}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_1}+\cdots = \dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{\partial f}{\partial \frac{dy_1}{dx}}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \frac{dy_1}{dx}}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \frac{dy_1}{dx}}+\cdots\right\} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_2}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_2}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_2}+\cdots = \dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{\partial f}{\partial \frac{dy_2}{dx}}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \frac{dy_2}{dx}}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \frac{dy_2}{dx}}+\cdots\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_n}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_n}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_n}+\cdots = \dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{\partial f}{\partial \frac{dy_n}{dx}}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \frac{dy_n}{dx}}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \frac{dy_n}{dx}}+\cdots\right\} \end{cases}$$

welche zusammen mit den Gleichungen (1.) hinreichen, um die y und die λ zu bestimmen, so wie gewisse Gleichungen, welche zur Bestimmung der Integrationsconstanten dienen.

Um aber zu entscheiden, ob die gefundenen Werthe der y das Integral V wirklich zu einem Minimum oder Maximum machen, ist es nöthig die zweite Variation zu untersuchen. Setzt man in dem Integral V an die Stelle von $y_1, y_2, \ldots$ die Ausdrücke $y_1+\varepsilon w_1$, $y_2+\varepsilon w_2$ etc., wo die w beliebige Functionen von x, ε aber eine sehr kleine Zahl bedeutet, so geht V über in

$$V+\varepsilon V_1+\varepsilon^2 V_2,$$

und nach dem Vorigen werden die y so bestimmt, dafs V_1 verschwindet. Es mufs dann, damit ein Minimum eintrete, V_2 für alle beliebigen Functionen w positiv, damit ein Maximum eintrete, für alle negativ sein; mit einem Worte, das Vorzeichen von V_2 ist zu discutiren.

Es hat aber V_2 die Gestalt

$$(4.)\quad V_2=\int_a^b F\,dx,$$

wo F ebenso aus $f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2\ldots$ entsteht, wie V_2 aus V; so dafs sich also F als eine homogene Function zweiter Ordnung der w und ihrer ersten Differentialquotienten darstellt.

Kann man nun, wie dies in der That möglich ist, durch partielle Integration die Function F in V_2 zurückführen auf eine andere Function zweiter Ordnung mit nur n Argumenten, welche sich als lineare Functionen der w

und ihrer Differentialquotienten darstellen, nämlich auf die Function

$$(5.)\quad 2\mathrm{F} = c_{11}W_1^2 + c_{22}W_2^2 + 2c_{12}W_1W_2 + \cdots + c_{nn}W_n^2,$$

so haben die Functionen W vollständig dieselbe Willkürlichkeit wie die Functionen w; und wenn man den w jeden beliebigen Werth beilegen konnte, so kann man bei den W dasselbe thun. Man hat also dann nur das Integral

$$V_2 = \int_a^b \mathrm{F}\,dx$$

zu untersuchen, oder mit andern Worten, das Zeichen der Function F innerhalb der gegebenen Grenzen a, b, und für beliebige Argumente W. In der That, man kann dann nach bekannten Methoden stets F in ein Aggregat von Quadraten zerlegen, dessen Argumente abermals, statt der W, als unabhängige willkürliche Functionen betrachtet werden können; und damit V_2 stets positiv oder stets negativ sei, ist es nöthig und hinreichend, dafs die Coefficienten der Quadrate sämmtlich dasselbe Zeichen haben; wäre einer derselben für einen gewissen Werth von x entgegengesetzten Zeichens, so brauchte man nur die Argumente sämmtlich verschwinden zu lassen, bis auf das entsprechende, und diesem für diesen bestimmten Werth von x einen gewissen Werth beizulegen, um dem ganzen Integral V_2 das entgegengesetzte Zeichen zu geben.

Lassen wir für den Augenblick die Beziehung unserer Betrachtungen zu den Problemen des Maximums und Minimums ganz bei Seite, so kommt also die Aufgabe allein auf die Aufstellung der Function F hinaus.

Aber die w sind nicht vollständig von einander unabhängig; es bestehen nämlich zwischen ihnen die aus den Gleichungen (1.) hervorgehenden Relationen:

$$(6.)\quad \begin{cases} 0 = w_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} + w_2\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} + \cdots + \dfrac{dw_1}{dx}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\frac{dy_1}{dx}} + \dfrac{dw_2}{dx}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\frac{dy_2}{dx}} + \cdots = \Phi_1 \\[2ex] 0 = w_1\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} + w_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} + \cdots + \dfrac{dw_1}{dx}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\frac{dy_1}{dx}} + \dfrac{dw_2}{dx}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\frac{dy_2}{dx}} + \cdots = \Phi_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

Es ist daher nicht nöthig, dafs F unmittelbar die Gestalt annehme

$$F = \mathrm{F} + \frac{dB}{dx},$$

wie im Vorigen vorausgesetzt wurde; sondern es kann noch eine lineare Function der Φ hinzutreten, deren Coefficienten wiederum lineare Functionen der w sind; es kann also werden:

$$(7.)\quad F = \mathrm{F} + \frac{dB}{dx} + \Psi_1\Phi_1 + \Psi_2\Phi_2 + \cdots$$

wo die Ψ von der Form sind:

$$(8.)\quad \Psi_i = C_1^{(i)} w_1 + C_2^{(i)} w_2 + \cdots + C_n^{(i)} w_n.$$

Da es aber darauf ankommt, in der transformirten Function F die W unmittelbar statt der w gebrauchen zu können, so müssen auch die Bedingungsgleichungen (6.) in lineare Bedingungen zwischen den W übergehen; d. h. es mufs sein:

$$(9.)\quad \Phi_i = L_1^{(i)} W_1 + L_2^{(i)} W_2 + \cdots L_n^{(i)} W_n.$$

Endlich, da die Function F aus F durch partielle Integration entstanden sein soll, und also die Glieder, welche die Producte der Differentialquotienten enthalten, sich nicht verändert haben können, müssen die W die Gestalt haben:

$$(10.)\quad W_i = \frac{dw_i}{dx} + \alpha_1^{(i)} w_1 + \alpha_2^{(i)} w_2 + \cdots \alpha_n^{(i)} w_n.$$

Die Aufgabe ist nunmehr vollständig abgegränzt, und läfst sich so aussprechen:

Die Function F, welche homogen und zweiter Ordnung ist in Bezug auf die $2n$ Gröfsen $w_1, w_2, \ldots, \frac{dw_1}{dx}, \frac{dw_2}{dx}, \ldots$, soll in drei Theile zerlegt werden, deren einer eine homogene Function F *zweiter Ordnung mit den Argumenten* (10.) *ist, deren zweiter der vollständige Differentialquotient einer homogenen Function zweiter Ordnung der w ist, und deren dritter endlich eine lineare Function von $\varkappa$ gegebenen linearen Ausdrücken* (6.) *der w und ihrer Differentialquotienten ist; während diese Ausdrücke selbst in lineare Functionen der Argumente W übergehen.*

Die Unbekannten des Problems sind die $\frac{n.n+1}{2}$ Coefficienten von B, die n^2 Coefficienten α, welche in die W eingehen, die $n.\varkappa$ Coefficienten C in (8.), und die $n.\varkappa$ Coefficienten L in (9.); zusammen $\frac{n(3n+4\varkappa+1)}{2}$ unbekannte Gröfsen. Die Coefficienten in F sind als solche kaum zu rechnen, da sie unmittelbar den Coefficienten der Produkte $\frac{dw_i}{dx}.\frac{dw_\varkappa}{dx}$ gleich werden. Es sind aber dann vermöge der Gleichung (7.) noch $\frac{2n.2n+1}{2} - \frac{n.n+1}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}$, und wegen der Gleichungen (9.) $2n.\varkappa$ Gleichungen zu erfüllen. Die Zahl der Gleichungen ist also der Zahl der unbestimmten Gröfsen genau gleich, und die Aufgabe daher im allgemeinen möglich.

Unter den Gleichungen, welche aus (7.) entstehen, sind $\frac{n.n+1}{2}$ Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Aufgabe führt also $\frac{n.n+1}{2}$ willkürliche Constanten mit sich.

§. 2.

Die Bestimmung der Functionen F, B, Ψ, W hängt mit den Gleichungen (3.) aufs Genaueste zusammen, ebenso wie das Entsprechende bei einem Integrale, welches nur *eine* abhängige Variable enthält, lange bekannt ist. Dieser Zusammenhang soll nun dargestellt werden.

Sei c eine der Constanten, welche die Integration der Gleichungen (3.), (1.) im Allgemeinen mit sich führt, und sei

$$(11.)\qquad \frac{\partial y_i}{\partial c} = u_i, \qquad \frac{\partial \lambda_i}{\partial c} = \mu_i.$$

Dann gehen die Gleichungen (3.), (1.), nach c differentiirt, in die folgenden beiden Systeme über:

$$(12.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial u_1} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial \Omega}{\partial \frac{du_1}{dx}}, \\[2ex] \dfrac{\partial \Omega}{\partial u_2} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial \Omega}{\partial \frac{du_2}{dx}}, \\[2ex] \dots\dots\dots \\[1ex] \dfrac{\partial \Omega}{\partial u_n} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial \Omega}{\partial \frac{du_n}{dx}}, \end{cases}$$

$$(13.)\qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_\varkappa} = 0,$$

wo Ω diejenige homogene Function zweiter Ordnung der μ, u, $\frac{du}{dx}$ ist, welche entsteht, sobald in dem Ausdrucke $f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots$ an die Stelle von $y_1, y_2, \dots \lambda_1, \lambda_2, \dots$ die Functionen

$$y_1+\varepsilon u_1, \quad y_2+\varepsilon u_2, \quad \dots, \quad \lambda_1+\varepsilon\mu_1, \quad \lambda_2+\varepsilon\mu_2, \quad \dots$$

treten, und in der Entwickelung nach Potenzen von ε der Coefficient von ε^2 genommen wird; Gleichungen, welche man auch als einer Minimumsaufgabe angehörig betrachten kann. Setzt man statt der u die w, so gehen die Gleichungen (13.) in die Gleichungen (6.) über; setzt man die μ, welche in diese Gleichungen nicht eingehen, zugleich Null, so verwandelt sich Ω in F.

Die Gleichungen (12.), (13.) bilden ein System von Differentialgleichungen, dessen allgemeine Lösungen die Gestalt haben

$$(14.)\qquad u_i = \Sigma\gamma\frac{\partial y_i}{\partial c},\qquad \mu_i = \Sigma\gamma\frac{\partial\lambda_i}{\partial c},$$

wo die Summe über alle $2n$ Constanten c auszudehnen ist*), und die γ ebensoviel neue Integrationsconstanten bedeuten.

Durch verschiedene Wahl der γ kann man beliebig Systeme der u, μ bestimmen. Es soll im folgenden mit n verschiedenen solcher Systeme gleichzeitig operirt werden; und dieselben sollen durch obere Indices 1, 2, ... n unterschieden werden.

Es gilt zunächst der Satz:

dafs für irgend zwei Systeme

$$\begin{matrix} u_1^{(i)} & u_2^{(i)} & \dots & \mu_1^{(i)} & \mu_2^{(i)} & \dots \\ u_1^{(r)} & u_2^{(r)} & \dots & \mu_1^{(r)} & \mu_2^{(r)} & \dots \end{matrix}$$

der Ausdruck

$$\left\{u_1^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_1^{(r)}}{dx}}+u_2^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_2^{(r)}}{dx}}+\cdots+u_n^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_n^{(r)}}{dx}}\right\}$$
$$-\left\{u_1^{(r)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_1^{(i)}}{dx}}+u_2^{(r)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_2^{(i)}}{dx}}+\cdots+u_n^{(r)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_n^{(i)}}{dx}}\right\}$$

einer Constanten gleich wird.

In der That, nach den bekannten Eigenschaften der homogenen Functionen zweiter Ordnung, verändert sich der Ausdruck

$$u_1^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial u_1^{(r)}}+u_2^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial u_2^{(r)}}+\cdots u_n^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial u_n^{(r)}}+\frac{du_1^{(i)}}{dx}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_1^{(r)}}{dx}}+\frac{du_2^{(i)}}{dx}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_2^{(r)}}{dx}}+\cdots$$
$$+\mu_1^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial\mu_1^{(r)}}+\mu_2^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial\mu_2^{(r)}}+\cdots$$

nicht, wenn man die Indices i und r vertauscht. Zugleich verschwinden

*) Das System der Gleichungen (1.), (3.) giebt in der That nur $2n$ Constanten. Denn differentiirt man die Gleichungen (1.) nach x, so bilden diese, wie man leicht sieht, mit (3.) ein System, welches $2n+\varkappa$ Constanten verlangt. Die Gleichungen (1.) sind aber $\varkappa$ Integrale dieses Systems, deren Constanten den particularen Werth Null erhalten haben. Es bleiben also für die Gleichungen (1.), (3.) nur $2n$ Constanten übrig.

aber nach (13.) die Coefficienten der μ, und nach (12.) wird das Uebrige ein vollständiges Differential, indem man $\frac{\partial\Omega}{\partial u_1^{(r)}}$ etc. durch $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_1^{(r)}}{dx}}\right)$ etc. ersetzen kann. Man hat also die Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\left\{u_1^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_1^{(r)}}{dx}}+u_2^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_2^{(r)}}{dx}}+\cdots\right\}$$
$$=\frac{d}{dx}\left\{u_1^{(r)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_1^{(i)}}{dx}}+u_2^{(r)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_2^{(i)}}{dx}}+\cdots\right\}.$$

Durch Integration folgt hieraus unmittelbar der obige Satz.

Betrachten wir nun genauer diejenigen partikularen Systeme der u, μ, bei welchen diese Integrationsconstante gleich Null wird. Da für diese Systeme

$$(14.)\qquad u_1^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_1^{(r)}}{dx}}+u_2^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_2^{(r)}}{dx}}+\cdots=u_1^{(r)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_1^{(i)}}{dx}}+u_2^{(r)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_2^{(i)}}{dx}}+\cdots$$

so kann man immer $\frac{n.n+1}{2}$ Funktion β_{ir} so bestimmen, dafs

$$(15.)\qquad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_1^{(r)}}{dx}}=\beta_{11}u_1^{(r)}+\beta_{12}u_2^{(r)}+\cdots\beta_{1n}u_n^{(r)}\\[2ex]\dfrac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_2^{(r)}}{dx}}=\beta_{21}u_1^{(r)}+\beta_{22}u_2^{(r)}+\cdots\beta_{2n}u_n^{(r)}\\[2ex]\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\[2ex]\dfrac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_n^{(r)}}{dx}}=\beta_{n1}u_1^{(r)}+\beta_{n2}u_2^{(r)}+\cdots\beta_{nn}u_n^{(r)},\end{array}\right.$$

wo $\beta_{ir}=\beta_{ri}$. Denn die $\frac{n.n-1}{2}$ Beziehungen, welche nöthig sind, damit die $\frac{n.n+1}{2}$ Gröfsen β den n^2 Gleichungen (15.) genügen können, sind eben die $\frac{n.n-1}{2}$ Gleichungen (14.), welche, wie man unmittelbar sieht, durch die Gleichungen (15.), welches auch die Werthe der β seien, identisch erfüllt werden.

Differentiirt man nun die Gleichungen (15.) mit Rücksicht auf die Gleichungen (12.), so erhält man ferner:

$$(16.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Omega}{\partial u_1^{(r)}} = \dfrac{d\beta_{11}}{dx}u_1^{(r)} + \dfrac{d\beta_{12}}{dx}u_2^{(r)} + \cdots + \beta_{11}\dfrac{du_1^{(r)}}{dx} + \beta_{12}\dfrac{du_2^{(r)}}{dx} + \cdots \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial u_2^{(r)}} = \dfrac{d\beta_{12}}{dx}u_1^{(r)} + \dfrac{d\beta_{22}}{dx}u_2^{(r)} + \cdots + \beta_{12}\dfrac{du_1^{(r)}}{dx} + \beta_{22}\dfrac{du_2^{(r)}}{dx} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial u_n^{(r)}} = \dfrac{d\beta_{1n}}{dx}u_1^{(r)} + \dfrac{d\beta_{2n}}{dx}u_2^{(r)} + \cdots + \beta_{1n}\dfrac{du_1^{(r)}}{dx} + \beta_{2n}\dfrac{du_2^{(r)}}{dx} + \cdots. \end{cases}$$

Es ist eine merkwürdige Eigenschaft dieses Systems, dafs sich aus den Gleichungen (15.), (16.) die u und μ vollständig eliminiren lassen, so dafs man ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung für die $\frac{n.n+1}{2}$ Gröfsen β erhält. Die Funktion Ω nämlich hat die folgende Gestalt:

$$(17.)\quad \begin{cases} 2\Omega = a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + 2a_{12}u_1u_2 + \cdots a_{nn}u_n^2 \\ \quad + 2\dfrac{du_1}{dx}(b_1^{(1)}u_1 + b_2^{(1)}u_2 + \cdots b_n^{(1)}u_n) \\ \quad + 2\dfrac{du_2}{dx}(b_1^{(2)}u_1 + b_2^{(2)}u_2 + \cdots b_n^{(2)}u_n) + \cdots \\ \quad + c_{11}\left(\dfrac{du_1}{dx}\right)^2 + c_{22}\left(\dfrac{du_2}{dx}\right)^2 + 2c_{12}\dfrac{du_1}{dx}\dfrac{du_2}{dx} + \cdots c_{nn}\left(\dfrac{du_n}{dx}\right)^2 \\ \quad + 2S\mu\left\{p_1u_1 + p_2u_2 + \cdots p_nu_n + q_1\dfrac{du_1}{dx} + q_2\dfrac{du_2}{dx} + \cdots q_n\dfrac{du_n}{dx}\right\}, \end{cases}$$

wo die Summe S sich auf die $\varkappa$ verschiedenen Systeme der μ, p, q bezieht. Bestimmen wir also n^2 Gröfsen α, welche den Gleichungen genügen:

$$(18.)\quad \begin{cases} \dfrac{du_1^{(r)}}{dx} = \alpha_1^{(1)}u_1^{(r)} + \alpha_2^{(1)}u_2^{(r)} + \cdots \alpha_n^{(1)}u_n^{(r)}, \\ \dfrac{du_2^{(r)}}{dx} = \alpha_1^{(2)}u_1^{(r)} + \alpha_2^{(2)}u_2^{(r)} + \cdots \alpha_n^{(2)}u_n^{(r)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{du_n^{(r)}}{dx} = \alpha_1^{(n)}u_1^{(r)} + \alpha_2^{(n)}u_2^{(r)} + \cdots \alpha_n^{(n)}u_n^{(r)}, \end{cases}$$

und $\varkappa.n$ Gröfsen M_r, welche den Gleichungen genügen:

$$(19.)\quad\begin{cases}\mu^{(1)} = M_1 u_1^{(1)} + M_2 u_2^{(1)} + \cdots M_n u_n^{(1)},\\ \mu^{(2)} = M_1 u_1^{(2)} + M_2 u_2^{(2)} + \cdots M_n u_n^{(2)},\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \mu^{(n)} = M_1 u_1^{(n)} + M_2 u_2^{(n)} + \cdots M_n u_n^{(n)},\end{cases}$$

so stellen sich die Gleichungen (15.), (16.) als lineare Funktionen der u, gleich Null gesetzt, dar; und wenn man also die Coefficienten dieser u verschwinden läfst, wird aus (15.):

$$(20.)\quad\begin{cases}b_i^{(1)} + c_{11}\alpha_i^{(1)} + c_{12}\alpha_i^{(2)} + \cdots c_{1n}\alpha_i^{(n)} + Sq_1 M_i = \beta_{i1},\\ b_i^{(2)} + c_{21}\alpha_i^{(1)} + c_{22}\alpha_i^{(2)} + \cdots c_{2n}\alpha_i^{(n)} + Sq_2 M_i = \beta_{i2},\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ b_i^{(n)} + c_{n1}\alpha_i^{(1)} + c_{n2}\alpha_i^{(2)} + \cdots c_{nn}\alpha_i^{(n)} + Sq_n M_i = \beta_{in},\end{cases}$$

während ganz ebenso aus (16.) die Gleichungen hervorgehen:

$$(21.)\quad\begin{cases}a_{i1} + (b_i^{(1)}\alpha_1^{(1)} + b_i^{(2)}\alpha_1^{(2)} + \cdots b_i^{(n)}\alpha_1^{(n)}) + Sp_i M_1\\ \qquad = \dfrac{d\beta_{i1}}{dx} + (\beta_{i1}\alpha_1^{(1)} + \beta_{i2}\alpha_1^{(2)} + \cdots),\\ a_{i2} + (b_i^{(1)}\alpha_2^{(1)} + b_i^{(2)}\alpha_2^{(2)} + \cdots b_i^{(n)}\alpha_2^{(n)}) + Sp_i M_2\\ \qquad = \dfrac{d\beta_{i2}}{dx} + (\beta_{i1}\alpha_2^{(1)} + \beta_{i2}\alpha_2^{(2)} + \cdots),\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ a_{in} + (b_i^{(1)}\alpha_n^{(1)} + b_i^{(2)}\alpha_n^{(2)} + \cdots b_i^{(n)}\alpha_n^{(n)}) + Sp_i M_n\\ \qquad = \dfrac{d\beta_{in}}{dx} + (\beta_{i1}\alpha_n^{(1)} + \beta_{i2}\alpha_n^{(2)} + \cdots).\end{cases}$$

Bemerken wir noch, dafs aus den Gleichungen (13.), d. h. aus der Gleichung

$$(22.)\quad p_1 u_1^{(r)} + p_2 u_2^{(r)} + \cdots + q_1\frac{du_1^{(r)}}{dx} + q_2\frac{du_2^{(r)}}{dx} + \cdots = 0,$$

welche $n.\varkappa$ Gleichungen darstellt, mit Hülfe der Gleichungen (18.) hervorgeht:

$$(23.)\quad\begin{cases}0 = p_1 + q_1\alpha_1^{(1)} + q_2\alpha_1^{(2)} + \cdots q_n\alpha_1^{(n)},\\ 0 = p_2 + q_1\alpha_2^{(1)} + q_2\alpha_2^{(2)} + \cdots q_n\alpha_2^{(n)},\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ 0 = p_n + q_1\alpha_n^{(1)} + q_2\alpha_n^{(2)} + \cdots q_n\alpha_n^{(n)},\end{cases}$$

so sieht man, dafs die n^2 Gleichungen (20.) und die $n.\varkappa$ Gleichungen (23.) genügen, um die Functionen M und α ohne Hülfe der μ und u durch die β auszudrücken. Denkt man sich alsdann diese Werthe in (21.) eingeführt, so erhält man Differentialgleichungen erster Ordnung für die β selbst.

Es ist auch leicht die Gleichungen (21.) so umzugestalten, dafs sie sich unmittelbar, wie es nöthig ist, auf $\frac{n.n+1}{2}$ Gleichungen reduciren. Denn man braucht nur die Gleichungen (20.) mit $\alpha_r^{(1)}, \alpha_r^{(2)}, \dots \alpha_r^{(n)}$ zu multipliciren, und von der r^{ten} Gleichung (21.) abzuziehen, indem man die Gleichungen (23.) berücksichtigt, um die für i und r symmetrische Gleichung zu erhalten:

$$(24.)\qquad a_{ir}-\Sigma_\varrho\Sigma_\sigma c_{\varrho\sigma}\alpha_i^{(\varrho)}\alpha_r^{(\sigma)}+S(p_iM_r+p_rM_i)=\frac{d\beta_{ir}}{dx},$$

welche die $\frac{n.n+1}{2}$ gesuchten Gleichungen darstellt.

Da sich die α und M als lineare Functionen der β darstellen, so erhält man also $\frac{d\beta_{ir}}{dx}$ ausgedrückt durch eine bis zur zweiten Ordnung ansteigende Function zweiter Ordnung der β. Die Lösungen dieser Gleichungen aber erhält man, wenn man aus (20.) die β durch die M und α, diese selbst aber aus (18.), (19.) durch jene particularen Lösungen der Gleichungen (12.), (13.) ausdrückt, welche den Bedingungsgleichungen (14.) genügen. Man kann dies auch als Eigenschaft des particularen Systems in folgendem Theorem aussprechen:

Die Bestimmung des particularen Systems der n^2 Gröfsen u führt auf die Lösung eines Systems von $\frac{n.n+1}{2}$ Differentialgleichungen erster Ordnung (24.), *nach dessen Auflösung n getrennte Systeme von je n Differentialgleichungen* (18.) *zu behandeln sind.*

§. 3.

Die Gleichungen (24.) aber sind es, welche zugleich das in §. 1 vorgelegte Problem absolviren.

Multipliciren wir die Gleichungen (24.) mit w_iw_r und summiren nach i und r, so finden wir:

$$(25.)\qquad \Sigma_i\Sigma_r a_{ir}w_iw_r-\Sigma_\varrho\Sigma_\sigma c_{\varrho\sigma}(\alpha_1^{(\varrho)}w_1+\alpha_2^{(\varrho)}w_2+\cdots)(\alpha_1^{(\sigma)}w_1+\alpha_2^{(\sigma)}w_2+\cdots)$$
$$+2S(p_1w_1+p_2w_2+\cdots)(M_1w_1+M_2w_2+\cdots)=\Sigma_i\Sigma_r w_iw_r\frac{d\beta_{ir}}{dx}.$$

Die Gleichungen (20.) geben zugleich:

$$(26.)\quad\begin{cases} 2\Sigma_r \dfrac{dw_r}{dx}(b_1^{(r)}w_1+b_2^{(r)}w_2+\cdots b_n^{(r)}w_n) \\ +\Sigma_\varrho\Sigma_\sigma c_{\varrho\sigma}\left\{\dfrac{dw_\varrho}{dx}(\alpha_1^{(\sigma)}w_1+\alpha_2^{(\sigma)}w_2+\cdots)+\dfrac{dw_\sigma}{dx}(\alpha_1^{(\varrho)}w_1+\alpha_2^{(\varrho)}w_2+\cdots)\right\} \\ +2S\left(q_1\dfrac{dw_1}{dx}+q_2\dfrac{dw_2}{dx}+\cdots\right)(M_1w_1+M_2w_2+\cdots) \\ =2\left\{\dfrac{dw_1}{dx}(\beta_{11}w_1+\beta_{12}w_2+\cdots)+\dfrac{dw_2}{dx}(\beta_{21}w_1+\beta_{22}w_2+\cdots)+\cdots\right\}. \end{cases}$$

Nimmt man nun noch die identische Gleichung hinzu:

$$(27.)\quad \Sigma_i\Sigma_r c_{ir}\frac{dw_i}{dx}\frac{dw_r}{dx}-\Sigma_\varrho\Sigma_\sigma c_{\varrho\sigma}\frac{dw_\varrho}{dx}\frac{dw_\sigma}{dx}=0$$

und addirt die Gleichungen (25.), (26.), (27.), so erhält man aus den ersten Gliedern der linken Seite gerade die Function F, und es wird:

$$(28.)\quad 2F-\Sigma_\varrho\Sigma_\sigma c_{\varrho\sigma}W_\varrho W_\sigma$$
$$+2S(M_1w_1+M_2w_2+\cdots)\left(p_1w_1+p_2w_2+\cdots+q_1\frac{dw_1}{dx}+q_2\frac{dw_2}{dx}+\cdots\right)$$
$$=\frac{d}{dx}(\Sigma_i\Sigma_r\beta_{ir}w_iw_r),$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$(29.)\quad W_\varrho=\frac{dw_\varrho}{dx}-(\alpha_1^{(\varrho)}w_1+\alpha_2^{(\varrho)}w_2+\cdots\alpha_n^{(\varrho)}w_n).$$

Die Gleichung (28.) stimmt, wie man sieht, mit der Gleichung (7.) genau überein, sobald man setzt:

$$(30.)\quad\begin{cases} -\Psi=M_1w_1+M_2w_2+\cdots M_nw_n \\ 2B=\Sigma_i\Sigma_r\beta_{ir}w_iw_r; \end{cases}$$

denn der Ausdruck Φ, welcher aus einer Bedingungsgleichung φ entstand, wenn man für die y_i den Ausdruck $y_i+\varepsilon w_i$ setzte und den Coefficienten von ε nahm, ist offenbar kein anderer als:

$$(31.)\quad \Phi=p_1w_1+p_2w_2+\cdots p_nw_n+q_1\frac{dw_1}{dx}+q_2\frac{dw_2}{dx}+\cdots+q_n\frac{dw_n}{dx}.$$

Aber diese Function Φ sollte sich nach (9.) als lineare Function der W darstellen. Nun braucht man endlich nur noch die Gleichungen (23.), (18.) zu beachten, um sogleich zu sehen, dafs Φ die Gestalt annimmt:

$$(32.)\quad \Phi=q_1W_1+q_2W_2+\cdots q_nW_n=0.$$

Man hat demnach folgendes Theorem bewiesen:

Die zweite Variation $\int F\,dx$ läfst sich immer zurückführen auf die Form $\int \mathrm{F}\,dx$, wo F diejenige Function ist, welche aus den Termen höchster Ordnung in F hervorgeht, wenn man darin die Differentialquotienten der w durch neue Functionen W ersetzt. Zwischen diesen W bestehen dann noch lineare Beziehungen (32.) *in gleicher Zahl mit den vorhandenen Bedingungsgleichungen, während sie übrigens willkürlich sind.*

Die Untersuchung des Vorzeichens der zweiten Variation ist so auf die Untersuchung des Zeichens einer homogenen Function zweiter Ordnung zurückgeführt, zwischen deren Argumenten gewisse lineare Beziehungen obwalten.

Die neuen Argumente W drücken sich vermittelst der ursprünglichen w und unserer particularen Integrale in Determinantenform aus. Es wird nämlich aus (18.), (29.):

$$(31.)\qquad W_\varrho = \frac{1}{R}\begin{vmatrix} \frac{dw_\varrho}{dx} & w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ \frac{du_\varrho^{(1)}}{dx} & u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \dots & u_n^{(1)} \\ \frac{du_\varrho^{(2)}}{dx} & u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \dots & u_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{du_\varrho^{(n)}}{dx} & u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \dots & u_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

wo R die Determinante der Functionen u bezeichnet. Aus dieser Form sieht man, dafs für die Anwendbarkeit der vorliegenden Transformation die Bedingung auftritt: *dafs sich die in den u enthaltenen willkürlichen Constanten so müssen bestimmen lassen, dafs R innerhalb der Grenzen nicht verschwindet, wenn nicht zugleich sämmtliche Zähler der W verschwinden.*

§. 4.

Die in dem Vorigen angestellten Betrachtungen lassen sich nun unmittelbar auf diejenigen Integrale ausdehnen, welche nicht blos die ersten, sondern beliebig hohe Differentialquotienten der abhängigen Functionen unter dem Integralzeichen enthalten. Denn setzen wir:

$$(32.)\qquad \frac{dy_i}{dx} = y_i^{(1)},\quad \frac{d^2 y_i}{dx^2} = \frac{dy_i^{(1)}}{dx} = y_i^{(2)} \quad \text{etc.},$$

so können wir annehmen, dafs die Function unter dem Integralzeichen nur die y selbst und ihre ersten Differentialquotienten enthalte, während die Gleichungen (32.) als Bedingungsgleichungen hinzutreten. Und so können wir wenigstens zu *einer* Reduction die obigen Betrachtungen anwenden. Es zeigt sich aber, dafs diese Reduction bereits alles Erforderliche leistet.

An die Stelle der u treten in diesem Falle die y mit ihren sämmtlichen Differentialquotienten, bis zu dem zweithöchsten, welcher vorkommt. Betrachten wir also den Ausdruck W_ϱ in (31.), so sehen wir, dafs er wegen Gleichheit zweier Vertikalreihen identisch verschwindet, wenn nicht $\frac{dw_\varrho}{dx}$ den höchsten, w_ϱ selbst den zweithöchsten Differentialquotienten eines y repräsentirt. Wir sehen also, dafs die neue Function F, da ein grofser Theil ihrer Argumente verschwindet, sich reducirt auf eine homogene Function zweiter Ordnung der übrig bleibenden n Argumente W, während die Coefficienten dieselben sind, welche sich in der Function F in die zweiten Dimensionen der jedesmaligen höchsten Differentialquotienten multiplicirt finden. Zwischen den Argumenten aber bestehen noch die den Gleichungen (32.) entsprechenden, die von etwaigen Bedingungsgleichungen herrühren.

Sind die höchsten vorkommenden Differentialquotienten respective die r_1^{ten}, r_2^{ten}, etc. r_n^{ten}, so bedarf man

$$n(r_1 + r_2 + \cdots r_n)$$

verschiedener Systeme der den u entsprechenden Functionen, welche sich hier aus den Gröfsen

$$\frac{\partial}{\partial c}\,\frac{d^\varkappa y_i}{dx^\varkappa}$$

auf lineare Weise zusammensetzen. Die Art und Weise wie man diese Systeme zu partikularisiren hat, ergiebt sich unmittelbar aus den Gleichungen (14.).

Als ein Beispiel ergiebt sich der von *Jacobi* behandelte Fall. In der That, sei das Integral gegeben:

$$(33.)\qquad V = \int_a^b f\left(y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\ \frac{d^n y}{dx^n}\right) dx,$$

so kann man dasselbe zurückführen auf das folgende:

$$(34.)\quad V = \int_a^b \Big\{ f\Big(y, y_1, \dots y_{n-1}, \frac{dy_{n-1}}{dx}\Big) \\ + \lambda_1\Big(\frac{dy}{dx} - y_1\Big) + \lambda_2\Big(\frac{dy_1}{dx} - y_2\Big) + \cdots \lambda_{n-1}\Big(\frac{dy_{n-2}}{dx} - y_{n-1}\Big)\Big\} dx,$$

wo die y als verschiedene Variable zu betrachten sind, die den Gleichungen unterliegen:

$$(35.)\quad \frac{dy}{dx} - y_1 = 0, \quad \frac{dy_1}{dx} - y_2 = 0, \quad \dots \quad \frac{dy_{n-2}}{dx} - y_{n-1} = 0.$$

Die Gleichungen, welche die erste Variation von V verschwinden machen, sind nunmehr:

$$(36.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{d\lambda_1}{dx}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_1} - \lambda_1 = \dfrac{d\lambda_2}{dx}, \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_{n-2}} - \lambda_{n-2} = \dfrac{d\lambda_{n-1}}{dx}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_{n-1}} - \lambda_{n-1} = \dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{\partial f}{\partial \frac{dy_{n-1}}{dx}}\right\}, \end{cases}$$

aus denen auch durch Elimination der λ unmittelbar die Gleichung hervorgeht:

$$(37.)\quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{df}{dy_2} - + \cdots = 0,$$

welches die gewöhnliche Form ist.

Ist nun c eine der $2n$ Integrationsconstanten der Gleichungen (36.), und

$$(38.)\quad u_i = \Sigma\gamma\frac{\partial y_i}{\partial c}, \quad \mu_i = \Sigma\gamma\frac{\partial \lambda_i}{\partial c},$$

so folgen aus (35.), (36.) die Gleichungen:

$$(39.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u} = \dfrac{d\mu_1}{dx}, & \dfrac{du}{dx} = u_1, \\ \dfrac{\partial F}{\partial u_1} - \mu_1 = \dfrac{d\mu_2}{dx}, & \dfrac{du_1}{dx} = u_2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial F}{\partial u_{n-2}} - \mu_{n-2} = \dfrac{d\mu_{n-1}}{dx}, & \dfrac{du_{n-2}}{dx} = u_{n-1}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial u_{n-1}} - \mu_{n-1} = \dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{\partial F}{\partial \frac{du_{n-1}}{dx}}\right\}, \end{cases}$$

wo nämlich

$$(40.)\quad 2F = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}u^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y_1}u_1 u + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}u_1^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial\frac{dy_{n-1}}{dx}\,\partial\frac{dy_{n-1}}{dx}}\left(\frac{du_{n-1}}{dx}\right)^2$$

gesetzt worden.

Zwischen n verschiedenen Systemen $u_i^{(h)}$, $\mu_i^{(h)}$ bestehen dann $\frac{n.n-1}{2}$ Relationen, welche in der Gleichung enthalten sind:

$$(41.)\quad \left\{u^{(h)}\frac{\partial\Omega^{(r)}}{\partial\frac{du^{(r)}}{dx}} + u_1^{(h)}\frac{\partial\Omega^{(r)}}{\partial\frac{du_1^{(r)}}{dx}} + \cdots + u_{n-1}^{(h)}\frac{\partial\Omega^{(r)}}{\partial\frac{du_{n-1}^{(r)}}{dx}}\right\}$$
$$-\left\{u^{(r)}\frac{\partial\Omega^{(h)}}{\partial\frac{du^{(h)}}{dx}} + u_1^{(r)}\frac{\partial\Omega^{(h)}}{\partial\frac{du_1^{(h)}}{dx}} + \cdots + u_{n-1}^{(r)}\frac{\partial\Omega^{(h)}}{\partial\frac{du_{n-1}^{(h)}}{dx}}\right\} = \text{Const.},$$

wenn

$$(42.)\quad \Omega = F + \mu_1\left(\frac{du}{dx} - u_1\right) + \mu_2\left(\frac{du_1}{dx} - u_2\right) + \cdots \mu_{n-1}\left(\frac{du_{n-2}}{dx} - u_{n-1}\right),$$

und welche in diesem speciellen Falle die folgenden werden:

$$(43.)\quad \left(u^{(h)}\mu_1^{(r)} + u_1^{(h)}\mu_2^{(r)} + \cdots u_{n-2}^{(h)}\mu_{n-1}^{(r)} + u_{n-1}^{(h)}\frac{\partial F^{(r)}}{\partial\frac{du_{n-1}^{(r)}}{dx}}\right)$$
$$-\left(u^{(r)}\mu_1^{(h)} + u_1^{(r)}\mu_2^{(h)} + \cdots u_{n-2}^{(r)}\mu_{n-1}^{(h)} + u_{n-1}^{(r)}\frac{\partial F^{(h)}}{\partial\frac{du_{n-1}^{(h)}}{dx}}\right) = \text{Const.}$$

Für das gesuchte partikulare System hat man nur Const. $=0$ zu setzen. Dann sind die $2n^2$ Constanten der u auf $\frac{n.n+1}{2}$ zurückgeführt; und nunmehr können wir aus den früheren Betrachtungen die neue Form der zweiten Variation unmittelbar hinschreiben, nämlich:

$$(44.)\quad V_2 = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\left(\partial\frac{dy_{n-1}}{dx}\right)^2}\cdot\frac{W^2}{R^2}dx = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\left(\partial\frac{d^n y}{dx^n}\right)^2}\cdot\frac{W^2}{R^2}dx,$$

wo

$$(45.)\quad R = \begin{vmatrix} u^{(1)} & u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \dots & u_{n-1}^{(1)} \\ u^{(2)} & u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \dots & u_{n-1}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(n)} & u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \dots & u_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u^{(1)} & \frac{du^{(1)}}{dx} & \dots & \frac{d^{n-1}u^{(1)}}{dx^{n-1}} \\ u^{(2)} & \frac{du^{(2)}}{dx} & \dots & \frac{d^{n-1}u^{(2)}}{dx^{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(n)} & \frac{du^{(n)}}{dx} & \dots & \frac{d^{n-1}u^{(n)}}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$(46.)\quad W = \begin{vmatrix} w & w_1 & w_2 & \dots & \frac{dw_{n-1}}{dx} \\ u^{(1)} & u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \dots & \frac{du_n^{(1)}}{dx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(n)} & u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \dots & \frac{du_n^{(n)}}{dx} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} w & \frac{dw}{dx} & \frac{d^2w}{dx^2} & \dots & \frac{d^nw}{dx^n} \\ u^{(1)} & \frac{du^{(1)}}{dx} & \frac{d^2u^{(1)}}{dx^2} & \dots & \frac{d^nu^{(1)}}{dx^n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(n)} & \frac{du^{(n)}}{dx} & \frac{d^2u^{(n)}}{dx^2} & \dots & \frac{d^nu^{(n)}}{dx^n} \end{vmatrix},$$

was die gewöhnliche Form ist.

§. 5.

Ich wende mich nun zu der Betrachtung eines $n$fachen Integrals mit Einer abhängigen Variable. Sei also:

$$(47.)\quad V = \int^{(n)} f\left(y,\ \frac{\partial y}{\partial x_1},\ \frac{\partial y}{\partial x_2},\ \dots\ \frac{\partial y}{\partial x_n},\ x_1,\ \dots\right) dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

Die Aufgabe, V zu einem Minimum zu machen, erfordert zunächst das Verschwinden der ersten Variation, welches die bekannte partielle Differentialgleichung giebt:

$$(48.)\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial \frac{\partial y}{\partial x_1}} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial \frac{\partial y}{\partial x_2}} + \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial \frac{\partial y}{\partial x_n}}.$$

Die zweite Variation aber, d. h. der Coefficient von ε^2 in der Entwickelung des Ausdrucks von V, wenn statt y darin $y + \varepsilon w$ gesetzt wird, nimmt dann die Gestalt an:

$$(49.)\quad 2V_2$$

$$= \int^{(n)} \left(a_{00} w^2 + 2a_{01} w \frac{\partial w}{\partial x_1} + 2a_{02} w \frac{\partial w}{\partial x_2} + \dots + a_{11}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \dots\right) dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

wo:

$$(49\text{ a.})\quad a_{00} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial y},\quad a_{01} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial \frac{\partial y}{\partial x_1}},\quad a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial \frac{\partial y}{\partial x_1}\, \partial \frac{\partial y}{\partial x_1}},\quad \text{etc.}$$

Es ist die Aufgabe den Ausdruck V_2 auf eine möglichst wenig umfangreiche Form zu reduciren, wozu die partielle Integration das Mittel bietet.

Man kann die Function f, welche unter dem Integralzeichen von V_2 steht, und welche wir $2F$ nennen wollen, immer unter der folgenden Gestalt darstellen:

$$(50.)\quad 2F = \left\{ a_{11}\left(\frac{\partial \frac{w}{m}}{dx_1}\right)^2 + a_{22}\left(\frac{\partial \frac{w}{m}}{dx_2}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial \frac{w}{m}}{\partial x_1}\frac{\partial \frac{w}{m}}{\partial x_2} + \cdots \right\} m^2$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_1}(v_1 w^2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(v_2 w^2) + \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}(v_n w^2),$$

wo $m, v_1, v_2, \dots v_n$ zu bestimmende Functionen sind. Da nun die letzten Glieder sämmtlich einmal integrirt werden können, so reducirt sich dann der ein $n$faches Integral enthaltende Theil von V_2, der uns hier allein interessirt, auf

$$(51.)\quad (V_2)$$
$$= \int^{(n)} \left\{ a_{11}\left(\frac{\partial \frac{w}{m}}{\partial x_1}\right)^2 + a_{22}\left(\frac{\partial \frac{w}{m}}{\partial x_2}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial \frac{w}{m}}{\partial x_1}\frac{\partial \frac{w}{m}}{\partial x_2} + \cdots \right\} m^2\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n,$$

also wiederum auf das Aggregat der höchsten Terme mit verändertem Argument. Diese Reduction geschieht wiederum mit Hülfe der Differentialgleichung (48.), genau so wie bei einfachen Integralen.

In der That, wenn man die Gleichungen aufsucht, welche in der Gleichung (50.) enthalten sind, so werden dies folgende:

$$(52.)\quad \begin{cases} a_{00} = \frac{1}{m^2}\left(a_{11}\left(\frac{\partial m}{\partial x_1}\right)^2 + a_{22}\left(\frac{\partial m}{\partial x_2}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial m}{\partial x_1}\frac{\partial m}{\partial x_2} + \cdots a_{nn}\left(\frac{\partial m}{\partial x_n}\right)^2\right) \\ \qquad\qquad + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \\ a_{01} = -\frac{1}{m}\left(a_{11}\frac{\partial m}{\partial x_1} + a_{21}\frac{\partial m}{\partial x_2} + \cdots a_{n1}\frac{\partial m}{\partial x_n}\right) + v_1 \\ a_{02} = -\frac{1}{m}\left(a_{12}\frac{\partial m}{\partial x_1} + a_{22}\frac{\partial m}{\partial x_2} + \cdots a_{n2}\frac{\partial m}{\partial x_n}\right) + v_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{0n} = -\frac{1}{m}\left(a_{1n}\frac{\partial m}{\partial x_1} + a_{2n}\frac{\partial m}{\partial x_2} + \cdots a_{nn}\frac{\partial m}{\partial x_n}\right) + v_n. \end{cases}$$

Wenn man nun die v mit Hülfe der letzten Gleichungen aus der ersten eliminirt, so verschwinden zugleich die zweiten Dimensionen der Differentialquotienten von m, und man erhält einfach:

$$(53.)\quad m\left(a_{00} - \frac{\partial a_{01}}{\partial x_1} - \frac{\partial a_{02}}{\partial x_2} \dots - \frac{\partial a_{0n}}{\partial x_n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i1}\frac{\partial m}{\partial x_1} + a_{i2}\frac{\partial m}{\partial x_2} + \cdots a_{in}\frac{\partial m}{\partial x_n}\right).$$

Wir erhalten aber dieselbe Gleichung auch, wenn wir die Gleichung (48.) nach irgend einer darin enthaltenen Integrationsconstante c differentiiren und dann

$$m = \frac{\partial y}{\partial c}$$

setzen. Der allgemeine Werth von m hat also die Form:

$$(54.)\quad m = \Sigma\gamma\frac{\partial y}{\partial c},$$

wo die Summe auszudehnen ist über alle Integrationsconstanten c, und wo die γ neue Constanten bedeuten.

Die Constanten c in ihrer Gesammtheit bilden die ganze in der Function y auftretende Willkürlichkeit, und dieselbe wird im Allgemeinen derjenigen Unbestimmtheit gleichkommen, welche durch zwei willkürliche Functionen von je $n-1$ Argumenten bedingt wird. Da indefs über die Art und Weise, wie diese Willkürlichkeiten in der Lösung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung auftreten, nichts bekannt ist, so steht ebensowenig etwas über die Rolle fest, welche die Constanten γ in der Function m spielen. Enthält y eine willkürliche Funktion Π, mit beliebigen Differentialquotienten Π' etc. derselben, welche also einen Theil der Constanten c in sich vereinigt, so geht der entsprechende Theil von m über in

$$\Omega\frac{\partial y}{\partial \Pi} + \Omega'\frac{\partial y}{\partial \Pi'} + \cdots,$$

wo die Ω' wieder die Ableitungen der neuen willkürlichen Function Ω sind, wie Π' die Ableitungen von Π, und wo die Function Ω dieselben Argumente wie Π selber enthält.

Die Grenzen des Integrals müssen so eingeschränkt werden, dafs man im Stande ist, die Constanten γ in einer Weise zu bestimmen, welche die Function m innerhalb der Grenzen niemals verschwinden läfst, da sonst die zu integrirende Function durch das Unendliche gehen würde. Man kann den Sinn dieser Bedingung an dem folgenden Beispiele verdeutlichen.

Es sei $n=2$. Dann können wir y als die dritte Coordinate eines Punktes betrachten, dessen andere Coordinaten x_1, x_2 sind. Das Integral ist auszudehnen über die Projection eines Theils einer Oberfläche, welche durch die Gleichung:

$$y = f(x_1, x_2, c_1, c_2, \ldots)$$

ausgedrückt ist, und für welche zwei Grenzcurven gegeben sein mögen, durch welche sie hindurchzugehen gezwungen ist. Irgend eine Oberfläche, welche gleichfalls der Gleichung (48.) genügt, und welche der obigen sehr nahe kommt, hat dann die Gleichung:

$$\overline{y} = f(x_1, x_2, c_1 + \varepsilon\gamma_1, c_2 + \varepsilon\gamma_2, \ldots),$$

wo ε eine sehr kleine Gröfse ist, und die γ beliebige Constanten; oder, wenn man nach Potenzen von ε entwickelt:

$$\overline{y} = y + \varepsilon\left\{\gamma_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + \gamma_2 \frac{\partial y}{\partial c_2} + \cdots\right\}.$$

Diese nächste Oberfläche kann sehr verschieden gewählt werden, da die Constanten γ sehr verschiedene Werthe erhalten können. Sie schneidet die erste Oberfläche in einer Curve, welche durch die Gleichungen dargestellt ist:

$$y = f(x_1, x_2, c_1, c_2, \ldots), \qquad \gamma_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + \gamma_2 \frac{\partial y}{\partial c_2} + \cdots = 0,$$

und welche im Allgemeinen zum Theil innerhalb, zum Theil aufserhalb desjenigen Oberflächentheils liegen wird, über welchen die Integration sich ausdehnt. Damit nun das Integral V_2 einen Sinn habe, ist es nöthig, dafs es eine Combination der γ gebe, für welche der Ausdruck:

$$\gamma_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + \gamma_2 \frac{\partial y}{\partial c_2} + \cdots$$

innerhalb des bezeichneten Raumes niemals verschwinde; d. h. es mufs unter allen möglichen nächsten Oberflächen wenigstens *eine* geben, deren Schnittcurve mit der betrachteten Oberfläche ganz aufserhalb des Raumes der Integration liegt.

Berlin, den 5. November 1857.