# 8.
# Über die Bewegung eines Ellipsoïds in einer tropfbaren Flüssigkeit.

(Von dem Herrn Dr. phil. *Clebsch* zu Danzig.)

---

## §. 1.
### Einleitung.

Man stelle sich eine tropfbare Flüssigkeit, den Raum nach allen Seiten hin erfüllend vor. In der Flüssigkeit bewege sich ein Körper, dessen Gestalt vor der Hand nicht näher bestimmt werden mag; und alle Bewegung, welche die Flüssigkeit erhält, rühre von der Bewegung dieses Körpers her, so dafs man die unendlich entfernten Theilchen als in steter Ruhe betrachten kann.

Bei der Bestimmung des Widerstandes, welchen der Körper durch das ihn umgebende Medium erleidet, kommen mehrere Ursachen in Betracht, welche sich in zwei Classen theilen lassen. In die *erste* setze ich die *Druckkräfte,* welche mittels bekannter Hypothesen einer sichern mathematischen Schätzung unterworfen sind; in die *zweite* die *Reibung;* nebst andern ihr verwandten Ursachen, welche der mathematischen Behandlung noch weniger zugänglich sind, als die Reibung.

Ich werde mich im Folgenden nur mit dem *ersten* Theile beschäftigen, aus dessen Betrachtung sich einige, nicht uninteressante Folgerungen ziehen lassen werden. Eine derartige Aufgabe hat zuerst *Poisson* für die Bewegung eines Pendels in einer gasförmigen Flüssigkeit abgehandelt (Mém. de l'Acad. des sciences, tome XI.) Später hat *Dirichlet* für die Bewegung einer *Kugel* in einer tropfbaren Flüssigkeit die hauptsächlichsten Resultate angegeben (Monatsberichte der Berl. Akademie 1852), und zugleich auf die Möglichkeit hingewiesen, das Entsprechende für ein *Ellipsoïd* zu erreichen. Ich habe daher versucht, nachdem ich die allgemeinere Aufgabe in kurzen Umrissen angedeutet, im Speciellen die bei der Bewegung eines *Ellipsoïds* eintretenden Verhältnisse näher zu untersuchen.

Die erlangten Resultate mit der *Erfahrung* zu vergleichen, war wenig thunlich. Wo es möglich war, habe ich die Schrift von *Duchemin* (Experimental-Untersuchungen über den Widerstand von Flüssigkeiten, übersetzt von *Schnuse*) benutzt; doch konnte Dies um so seltener geschehen, als leider *Duchemin* grofsentheils mit Körpern operirt hat, deren Oberfläche einer analytischen Behandlung zu grofse Schwierigkeiten entgegensetzt.

Die Gleichungen, auf welchen das Problem beruht, sind die gewöhnlichen hydrodynamischen. Die Grenzbedingungen, welche zur Bestimmung der willkürlichen Functionen nöthig sind, erhält man, wenn man die im Unendlichen liegenden Flüssigkeitstheilchen als stets *ruhend*, diejenigen aber, welche den Körper berühren, als auf ihm *gleitend* betrachtet. Die Geschwindigkeiten eines Flüssigkeitstheilchens nach den Coordinaten-Axen stellen sich dabei, wie es in der Hydrodynamik zu geschehen pflegt, als Differentialquotienten *einer* Function dar. Soviel mag in der Einleitung erwähnt sein, um späteren Weitläufigkeiten vorzubeugen.

## §. 2.

### Allgemeine Gleichungen, die Einführung geeigneter Coordinaten betreffend.

Um die Gleichungen des Problems in geeigneter Form aufzustellen, sind einige allgemeine Formeln voranzuschicken.

Es seien $x_1$, $x_2$, $x_3$ die Coordinaten eines Puncts, bezogen auf ein *im Raume festes* Coordinatensystem. In demselben System habe ein Punct des festen Körpers, ich will sagen, sein *Schwerpunct*, die Coordinaten $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$. Man nehme ein zweites, *im Körper festes* Coordinatensystem $y$, $y'$, $y''$, an, dessen Anfangspunct der *Schwerpunct* ist, und dessen Axen die Haupt-Axen des Körpers sind. Die neuen Coordinaten hangen mit den alten durch Gleichungen von der Form

$$(1.)\quad \begin{cases} x-\xi = a_0^0 y + a_0' y' + a_0'' y'', & y-\eta = a_0^0 x + a_1^0 x_1 + a_2^0 x_2, \\ x_1-\xi_1 = a_1^0 y + a_1' y' + a_1'' y'', & y'-\eta' = a_0' x + a_1' x_1 + a_2' x_2, \\ x_2-\xi_2 = a_2^0 y + a_2' y' + a_2'' y'', & y''-\eta'' = a_0'' x + a_1'' x_1 + a_2'' x_2, \end{cases}$$

$$(2.)\quad \begin{cases} -\xi = a_0^0 \eta + a_0' \eta' + a_0'' \eta'', & -\eta = a_0^0 \xi + a_1^0 \xi_1 + a_2^0 \xi_2, \\ -\xi_1 = a_1^0 \eta + a_1' \eta' + a_1'' \eta'', & -\eta' = a_0' \xi + a_1' \xi_1 + a_2' \xi_2, \\ -\xi_2 = a_2^0 \eta + a_2' \eta' + a_2'' \eta'', & -\eta'' = a_0'' \xi + a_1'' \xi_1 + a_2'' \xi_2, \end{cases}$$

zusammen, wo zwischen den $a$ die bekannten Gleichungen Statt finden, und wo die $\eta$ die Coordinaten des alten Anfangspuncts im neuen System sind. Bei der Bewegung werden die $a$, $x$, $y$, $\xi$, $\eta$ zu Functionen der *Zeit;* doch bleiben die $y$ constant, für alle Puncte des Körpers.

Die Geschwindigkeiten des Puncts $x$, $x_1$, $x_2$ werden, wenn derselbe *in* die Flüssigkeit fällt, nach der obigen Annahme zu:

$$(3.)\quad \begin{cases} u = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \\[2mm] u_1 = \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \\[2mm] u_2 = \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}. \end{cases}$$

Die relativen Geschwindigkeiten, welche ein Theilchen der Flüssigkeit in dem selbst bewegten Systeme der $y$ annimmt, sind also:

$$(4.)\quad \begin{cases} v = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{d\eta}{dt} + \dfrac{x\,da_0^0 + x_1\,da_1^0 + x_2\,da_2^0}{dt}, \\[2mm] v' = \dfrac{dy'}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y'} + \dfrac{d\eta'}{dt} + \dfrac{x\,da_0' + x_1\,da_1' + x_2\,da_2'}{dt}, \\[2mm] v'' = \dfrac{dy''}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y''} + \dfrac{d\eta''}{dt} + \dfrac{x\,da_0'' + x_1\,da_1'' + x_2\,da_2''}{dt}, \end{cases}$$

oder, wenn man Alles durch die $a$ und die $y$ ausdrückt:

$$(5.)\quad \begin{cases} v = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - A - y''\overset{q}{A^{10}} + y'\overset{p}{A^{20}}, \\[2mm] v' = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y'} - A' - y\overset{r}{A^{21}} + y''A^{01}, \\[2mm] v'' = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y''} - A'' - y'\overset{p}{A^{02}} + yA^{12}, \end{cases}$$

wo die Gröfsen $A$ die Werthe

$$(6.)\quad \begin{cases} A\,dt = a_0^0\,d\xi + a_1^0\,d\xi_1 + a_2^0\,d\xi_2, \\ A'\,dt = a_0'\,d\xi + a_1'\,d\xi_1 + a_2'\,d\xi_2, \\ A''dt = a_0''d\xi + a_1''d\xi_1 + a_1''d\xi_2 \end{cases}$$

haben. Die übrigen $A$ sind die von ***Poisson*** (Mécan. tome II.) bei der Rotation eines Körpers durch $p$, $q$, $r$ bezeichneten Gröfsen

$$(7.)\quad \begin{cases} A^{10}dt = A^{01}dt = (a_0'\,da_0^0 + a_1'\,da_1^0 + a_2'\,da_2^0) = -(a_0^0\,da_0' + a_1^0\,da_1' + a_2^0\,da_2'), \\ A^{21}dt = A^{12}dt = (a_0''\,da_0' + a_1''da_1' + a_2''\,da_2') = -(a_0'\,da_0'' + a_1'\,da_1'' + a_2'\,da_2''), \\ A^{02}dt = A^{20}dt = (a_0^0\,da_0'' + a_1^0da_1'' + a_2^0\,da_2'') = -(a_0''da_0^0 + a_1''\,da_1^0 + a_2''da_2^0). \end{cases}$$

Man führe endlich statt der $y$, $y'$, $y''$ als Variabeln die drei Parameter eines Systems orthogonaler Oberflächen $\mu$, $\mu_1$, $\mu_2$ ein, welches mit dem Körper fest verbunden angenommen wird, so dafs

$$(8.)\quad \begin{cases} \mu = F(y\,y'\,y''), & y = f(\mu\,\mu_1\,\mu_2), \\ \mu_1 = F_1(y\,y'\,y''), & y' = f'(\mu\,\mu_1\,\mu_2), \\ \mu_2 = F_2(y\,y'\,y''), & y'' = f''(\mu\,\mu_1\,\mu_2) \end{cases} \text{ ist.}$$

Die Functionen $F$, $f$ sollen so bestimmt sein, dafs

$$(9.)\quad \mu = \mu_0$$

die *Oberfläche* des gegebenen Körpers giebt, und dafs man ferner, indem $\mu$ wächst, Oberflächen erhält, deren jede die vorhergehende einschliefst, so dafs endlich $\mu = \infty$ die unendlich entfernten Puncte darstellt.

Es ist bekannt, dafs die orthogonalen Oberflächen den Bedingungen

$$(10.)\quad \begin{cases} \frac{\partial\mu_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial\mu_h}{\partial y} + \frac{\partial\mu_i}{\partial y'}\cdot\frac{\partial\mu_h}{\partial y'} + \frac{\partial\mu_i}{\partial y''}\cdot\frac{\partial\mu_h}{\partial y''} = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial\mu_i}\cdot\frac{\partial y}{\partial\mu_h} + \frac{\partial y'}{\partial\mu_i}\cdot\frac{\partial y'}{\partial\mu_h} + \frac{\partial y''}{\partial\mu_i}\cdot\frac{\partial y''}{\partial\mu_h} = 0 \end{cases}$$

genügen, wenn $i$ und $h$ verschieden sind, und dafs dadurch die Gleichungen

$$(11.)\quad dy^i = \frac{\partial f^i}{\partial\mu}d\mu + \frac{\partial f^i}{\partial\mu_1}d\mu_1 + \frac{\partial f^i}{\partial\mu_2}d\mu_2$$

in folgende übergehen:

$$(12.)\quad \begin{cases} L^2 d\mu = \frac{\partial y}{\partial\mu}dy + \frac{\partial y'}{\partial\mu}dy' + \frac{\partial y''}{\partial\mu}dy'', \\ L_1^2 d\mu_1 = \frac{\partial y}{\partial\mu_1}dy + \frac{\partial y'}{\partial\mu_1}dy' + \frac{\partial y''}{\partial\mu_1}dy'', \\ L_2^2 d\mu_2 = \frac{\partial y}{\partial\mu_2}dy + \frac{\partial y'}{\partial\mu_2}dy' + \frac{\partial y''}{\partial\mu_2}dy'', \end{cases}$$

wo

$$(13.)\quad \begin{cases} L^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial\mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y''}{\partial\mu}\right)^2, & \frac{1}{L^2} = \left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial y''}\right)^2, \\ L_1^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial\mu_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial\mu_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y''}{\partial\mu_1}\right)^2, & \frac{1}{L_1^2} = \left(\frac{\partial\mu_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu_1}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu_1}{\partial y''}\right)^2, \\ L_2^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y''}{\partial\mu_2}\right)^2, & \frac{1}{L_2^2} = \left(\frac{\partial\mu_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu_2}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu_2}{\partial y''}\right)^2. \end{cases}$$

Setzt man nun

$$(14.)\quad w = \frac{d\mu}{dt},\quad w_1 = \frac{d\mu_1}{dt},\quad w_2 = \frac{d\mu_2}{dt},$$

so erhält man aus den Gleichungen (5.):

$$(15.)\begin{cases} L^2 w = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu} - \left(A\dfrac{\partial y}{\partial\mu} + A'\dfrac{\partial y'}{\partial\mu} + A''\dfrac{\partial y''}{\partial\mu}\right)^2 + \left[A^{10}\left(y'\dfrac{\partial y'}{\partial\mu} - y\dfrac{\partial y'}{\partial\mu}\right) + \cdots\right], \\ L_1^2 w_1 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu_1} - \left(A\dfrac{\partial y}{\partial\mu_1} + A'\dfrac{\partial y'}{\partial\mu_1} + A''\dfrac{\partial y''}{\partial\mu_1}\right)^2 + \left[A^{10}\left(y'\dfrac{\partial y}{\partial\mu_1} - y\dfrac{\partial y'}{\partial\mu_1}\right) + \cdots\right], \\ L_2^2 w_2 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu_2} - \left(A\dfrac{\partial y}{\partial\mu_2} + A'\dfrac{\partial y'}{\partial\mu_2} + A''\dfrac{\partial y''}{\partial\mu_2}\right)^2 + \left[A^{10}\left(y'\dfrac{\partial y}{\partial\mu_2} - y\dfrac{\partial y'}{\partial\mu_2}\right) + \cdots\right]. \end{cases}$$

## §. 3.

### Gleichungen zur Bestimmung der Function $\varphi$.

Nach diesen Vorbereitungen lassen sich leicht die zur Bestimmung von $\varphi$ nöthigen Gleichungen angeben.

Die Function mufs bekanntlich der Gleichung

$$(16.)\qquad 0 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}$$

genügen. Dieselbe geht nach Einführung der $y$ in

$$(17.)\qquad 0 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y''^2}$$

über, und nach Einführung der $\mu$ (vgl. ***Jacobi's*** Math. Werke II. 43) in:

$$(18.)\qquad \frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{L_1 L_2}{L}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right] + \frac{\partial}{\partial\mu_1}\left[\frac{L_2 L}{L_1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1}\right] + \frac{\partial}{\partial\mu_2}\left[\frac{L L_1}{L_2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_2}\right] = 0.$$

Da ferner die an der Oberfläche des Körpers befindlichen Theilchen auf derselben nur ***gleiten*** sollen, so mufs $w$ für $\mu = \mu_0$ verschwinden; daher findet zweitens die Gleichung

$$(19.)\qquad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} - \left(A\frac{\partial y}{\partial\mu} + A'\frac{\partial y'}{\partial\mu} + A''\frac{\partial y''}{\partial\mu}\right) - \left\{A^{10}\left(y'\frac{\partial y}{\partial\mu} - y\frac{\partial y'}{\partial\mu}\right) + \cdots\right\}\right]_{\mu=\mu_0}$$

Statt.

Da endlich noch im Unendlichen überhaupt jede Bewegung fehlen soll, so mufs für $\mu = \infty$ der Ausdruck

$$u^2 + u_1^2 + u_2^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2$$

verschwinden, mithin, wenn man $\mu$, $\mu_1$, $\mu_2$ einführt, die Gleichung

$$(20.)\qquad \left[\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 + \frac{1}{L_1^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1}\right)^2 + \frac{1}{L_2^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_2}\right)^2 = 0\right]_{\mu=\infty}$$

erfüllt werden.

Es ist leicht zu sehen, dafs man in Folge der Gleichung (19.):

$$(21.)\qquad \varphi = W + UA + U'A' + U''A'' + U^{12}A^{12} + U^{20}A^{20} + U^{01}A^{01}$$

zu setzen hat, wo $W$ allein von der *Zeit*, die $U$ dagegen allein als von den *Coordinaten* $\mu$, $\mu_1$, $\mu_2$ abhängig zu betrachten sind. Die Gleichung (19.) zerfällt dann in folgende *sechs:*

$$(22.)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial U}{\partial \mu}=\dfrac{\partial y}{\partial \mu}, & \dfrac{\partial U^{12}}{\partial \mu}=-y''\dfrac{\partial y'}{\partial \mu}+y'\dfrac{\partial y''}{\partial \mu} \\ \dfrac{\partial U'}{\partial \mu}=\dfrac{\partial y'}{\partial \mu}, & \dfrac{\partial U^{20}}{\partial \mu}=-y\dfrac{\partial y''}{\partial \mu}+y''\dfrac{\partial y}{\partial \mu} \\ \dfrac{\partial U''}{\partial \mu}=\dfrac{\partial y''}{\partial \mu}, & \dfrac{\partial U^{01}}{\partial \mu}=-y'\dfrac{\partial y}{\partial \mu}+y\dfrac{\partial y'}{\partial \mu} \end{array}\right\}_{\mu=\mu_0}$$

$W$ bleibt unbestimmt, schwindet jedoch, wie sich zeigen wird, vollständig aus der Rechnung.

## §. 4.

### Von dem Druck.

Man betrachte nun den *Gesammtdruck*, welchen der Körper durch die Flüssigkeit erleidet, und stelle die Integrale auf, welche die Componenten und die Rotationsmomente des Körpers ausdrücken. Dieselben sind, in Bezug auf die Axen $y$, $y'$, $y''$ genommen:

$$(23.)\quad \left\{\begin{array}{l} \int p_0\cos(n,y)\,do, \quad \int p_0\cos(n,y')\,do, \quad \int p_0\cos(n,y'')\,do, \\ \int p_0(y'\cos(n,y'')-y''\cos(n,y'))\,do, \quad \int p_0(y''\cos(n,y)-y\cos(n,y''))\,do, \ldots, \end{array}\right.$$

wenn $p_0$ den Druck an der Oberfläche des Körpers bezeichnet ($\mu=\mu_0$), $n$ die Normale dieser Oberfläche, $do$ ein Element derselben. Die Richtung der Normale werde *positiv* genommen, indem man sich von der Oberfläche des Körpers in den Raum hinaus entfernt, so dafs also $\mu$ zugleich *wächst.*

Führt man nun unter dem Integralzeichen $\mu_1$, $\mu_2$ ein, und erwägt, dafs das Bogen-Element einer Curve auf der Oberfläche den Ausdruck

$$(24.)\quad ds^2 = L_1^2 d\mu_1^2 + L_2^2 d\mu_2^2$$

hat, so findet sich für $do$:

$$(25.)\quad do = L_1 L_2 d\mu_1 d\mu_2,$$

wo die Wurzelgröfsen $L_1$, $L_2$ *positiv* zu nehmen sind. Es ist ferner:

$$(26.)\quad \cos(n,y)=\pm\frac{1}{L}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial y},\quad \cos(n,y')=\pm\frac{1}{L}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial y'},\quad \cos(n,y'')=\pm\frac{1}{L}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial y''}.$$

Hier fragt sich, welches Zeichen zu nehmen sei; was leicht zu entscheiden ist. Denn es sei $\varDelta\nu$ (positiv) ein Element der Normale, so ist der nächste Punct der Normale, in ihrer positiven Richtung:

$$y+\cos(n,y).\varDelta\nu,\qquad y'+\cos(n,y').\varDelta\nu,\qquad y''+\cos(n,y'').\varDelta\nu,$$

und derselbe sollte auf der Oberfläche $\mu = \mu_0 + \varDelta\mu_0$ liegen, wo $\varDelta\mu_0$ eine *positive* Gröfse ist. Man erhält aber, wenn man links die Coordinaten des Puncts einführt:

$$(27.)\qquad \varDelta\mu_0 = \pm\frac{1}{L}\Big(\frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial y'}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y'}+\frac{\partial\mu}{\partial y''}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y''}\Big)\varDelta\nu = \pm L\varDelta\nu.$$

Ist daher auch $L$ stets, wie bei $L_1$, $L_2$ angenommen wurde, die positive Wurzel von $L_2$, so ist immer das *obere* Zeichen zu nehmen, damit man die Ausdrüke (23.) erhalte; und die Integrale nehmen dann die nachstehende Gestalt an:

$$(28.)\qquad \begin{cases} P\ = \int \frac{L_1L_2}{L}p_0\frac{\partial y}{\partial\mu}d\mu_1 d\mu_2, \\ P' = \int \frac{L_1L_2}{L}p_0\frac{\partial y'}{\partial\mu}d\mu_1 d\mu_2, \\ P'' = \int \frac{L_1L_2}{L}p_0\frac{\partial y''}{\partial\mu}d\mu_1 d\mu_2, \end{cases}$$

$$(29.)\qquad \begin{cases} P^{12} = \int \frac{L_1L_2}{L}p_0\Big(y'\frac{\partial y''}{\partial\mu}-y''\frac{\partial y'}{\partial\mu}\Big)d\mu_1 d\mu_2, \\ P^{20} = \int \frac{L_1L_2}{L}p_0\Big(y''\frac{\partial y}{\partial\mu}-y\frac{\partial y''}{\partial\mu}\Big)d\mu_1 d\mu_2, \\ P^{01} = \int \frac{L_1L_2}{L}p_0\Big(y\frac{\partial y'}{\partial\mu}-y'\frac{\partial y}{\partial\mu}\Big)d\mu_1 d\mu_2. \end{cases}$$

In den Integralen ist $\mu = \mu_0$ zu setzen, und es sind dieselben über die ganze Oberfläche auszudehnen.

Der Druck $p$ wird durch die bekannte Gleichung

$$30.\qquad -\frac{p}{q} = -gZ+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big)+\tfrac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big)^2\Big]$$

definirt, wenn $q$ die *Dichtigkeit* der Flüssigkeit, $+Z$ die Richtung der *Schwere* bezeichnet, wo

$$(31.)\qquad Z = \alpha x+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2,\qquad \alpha^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2 = 1\quad \text{ist.}$$

Führt man $\mu$, $\mu_1$, $\mu_2$ ein, so geht (30.) in

$$(32.)\qquad \begin{cases} -\frac{p}{q} = -gZ+\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1}\cdot\frac{\partial\mu_1}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_2}\cdot\frac{\partial\mu_2}{\partial t} \\ \qquad\qquad +\tfrac{1}{2}\Big[\frac{1}{L^2}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\Big)^2+\frac{1}{L_1^2}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1}\Big)^2+\frac{1}{L_2^2}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_2}\Big)^2\Big] \end{cases}$$

über, und die Gröfsen $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ $\frac{\partial\mu_x}{\partial t}$ erhalten ihre Bestimmung durch die Gleichungen

$$(33.)\quad \begin{cases} d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1}d\mu_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu_2}d\mu_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}d\mu, \\ d\mu_\varkappa = \frac{\partial\mu_\varkappa}{\partial t}dt + \frac{\partial\mu_\varkappa}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\mu_\varkappa}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\mu_\varkappa}{\partial x}dx. \end{cases}$$

Die zweite dieser Gleichungen, durch $dt$ dividirt, geht in

$$(34.)\quad w_\varkappa = \frac{\partial\mu_\varkappa}{\partial t} + \frac{1}{L_\varkappa^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_\varkappa}$$

über, und daher giebt die Vergleichung mit (15.):

$$(35.)\quad L_\varkappa^2\frac{\partial\mu_\varkappa}{\partial t} = -\left(A\frac{\partial y}{\partial\mu_\varkappa} + A'\frac{\partial y'}{\partial\mu_\varkappa} + A''\frac{\partial y''}{\partial\mu_\varkappa}\right) + \left[A^{10}\left(y'\frac{\partial y}{\partial\mu_\varkappa} - y\frac{\partial y'}{\partial\mu_\varkappa}\right) + \cdots\right].$$

Führt man Dies in den Ausdruck von $p$ ein, so zeigt sich, dafs jedes der Integrale (28. 29.) aus *drei* wesentlich verschiedenen Theilen besteht. Der *erste* derselben rührt von dem Gliede $gZ$ her, von der *Schwerkraft;* der *zweite* von $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, und ist ein lineärer Ausdruck der Gröfsen

$$\frac{dW}{dt},\quad \frac{dA^i}{dt},\quad \frac{dA^{h\varkappa}}{dt}.$$

Der *dritte* endlich ist eine homogene Function zweiter Ordnung aller Gröfsen $A^i$, $A^{h\varkappa}$. Man untersuche nun die letzten beiden noch genauer.

Den Integralen (23.) ist leicht anzusehen, dafs sie verschwinden, wenn $p_0$ einer Constanten gleich ist. Nun kommt aber $W$ in $p_0$ nicht anders vor, als in dem Gliede $\frac{dW}{dt}$, welches in Bezug auf die $\mu$ constant ist. Die Gröfse $W$ verschwindet also aus allen $P$.

Aber die Integrale $P$ vereinfachen sich sehr unter der weit umfassenden Annahme, dafs die Oberfläche des Körpers durch die Ebenen $y = 0$, $y' = 0$, $y'' = 0$ in *acht symmetrische Theile* zerfalle. In diesem Falle werden offenbar die $\mu$ zu Functionen, welche ungeändert bleiben, wenn die $y$ ihre Zeichen ändern. Ja, man sieht aus den Gleichungen in (§. 3.), dafs man dann der Function $\varphi$ die Form

$$(36.)\quad \varphi = W + VyA + V'y'A' + V''y''A'' + V^{12}y'y''A^{12} + V^{20}y''yA^{20} + V^{01}yy'A^{01}$$

geben kann, wo die $V$ dieselbe Eigenschaft haben und ferner die Gröfsen $L$ und die Gröfsen $\frac{\partial \log y^i}{\partial\mu_\varkappa} = \frac{1}{y^i}\cdot\frac{\partial y^i}{\partial\mu_\varkappa}$ sind.

Nun zeigt sich aus der Form der Ausdrücke (23.) unmittelbar die Richtigkeit folgender Behauptung:

Wenn $p_0$ die Form

$$(37.)\qquad p_0 = R^0 y + R' y' + R'' y'' + R^{12} y' y'' + R^{20} y'' y' + R^{01} y y'' + R$$

hat und die $R$ sind Functionen, welche sich nicht ändern, wenn sich die Vorzeichen der $y$ ändern, so bleibt von den 7 Gliedern, in welche jeder der Ausdrücke (23.) dadurch zerfällt, nur immer *Eins* stehen, und es ist:

$$(38.)\qquad \begin{cases} P\ = \int R\, y \cos(n,y) do, & P^{12} = \int R^{12} [y' \cos(n,y'') - y'' \cos(n,y')] do, \\ P'\ = \int R' y' \cos(n,y') do, & P^{20} = \int R^{20} [y'' \cos(n,y) - y \cos(n,y'')] do, \\ P'' = \int R'' y'' \cos(n,y'') do, & P^{01} = \int R^{01} [y \cos(n,y') - y' \cos(n,y)] do. \end{cases}$$

Im gegenwärtigen Falle hat nun $p_0$ *diese* Form; denn es nimmt die Gestalt

$$(39.)\qquad -\frac{p_0}{q} = -gZ + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Sigma(my + m'y' + m''y'' + m^{12}y'y'' + m^{20}y''y + m^{01}yy')$$
$$\times (ny + n'y' + n''y'' + n^{12}y'y'' + n^{20}y''y + n^{01}yy')$$

an, wo die $n$ und $m$ jene Eigenschaft haben; und zwar ist immer $m^i$ mit $A^i$, $m^{ix}$ mit $A^{ix}$ proportional; und eben so die $n$. Wendet man also den eben angeführten Satz an, so erhält man folgende Gleichungen, in welchen M die Masse eines dem bewegten Körper an Umfang gleichen Flüssigkeitsvolumen bedeuten soll:

$$(40.)\qquad \begin{cases} P\ = g\mathrm{M}\cos(g,y) + \varkappa\,\frac{dA}{dt} + \beta A' A^{10} + \gamma A'' A^{20}, \\ \qquad\qquad P^{12} = \varkappa^{12}\frac{dA^{12}}{dt} + \beta^{12} A' A'' + \gamma^{12} A^{10} A^{20}, \\ P'\ = g\mathrm{M}\cos(g,y') + \varkappa'\,\frac{dA'}{dt} + \beta' A'' A^{21} + \gamma' A^0 A^{01}, \\ \qquad\qquad P^{20} = \varkappa^{20}\frac{dA^{20}}{dt} + \beta^{20} A'' A^0 + \gamma^{20} A^{21} A^{01}, \\ P'' = g\mathrm{M}\cos(g,y'') + \varkappa''\frac{dA''}{dt} + \beta'' A^0 A^{02} + \gamma'' A' A^{12}, \\ \qquad\qquad P^{01} = \varkappa^{01}\frac{dA^{01}}{dt} + \beta^{01} A^0 A' + \gamma^{01} A^{02} A^{12}. \end{cases}$$

Die $\varkappa$, $\beta$, $\gamma$ sind Constanten; und zwar nehmen die $\varkappa$ folgende einfachen Werthe an:

$$(41.)\begin{cases} -\varkappa \;=q\int\frac{L_1L_2}{L}\,V y\,\frac{\partial y}{\partial\mu}\,d\mu_1\,d\mu_2, \\ \qquad -\varkappa^{12}=q\int\frac{L_1L_2}{L}V^{12}y'y''\left(y'\frac{\partial y''}{\partial\mu}-y''\frac{\partial y'}{\partial\mu}\right)d\mu_1\,d\mu_2, \\ -\varkappa' \;=q\int\frac{L_1L_2}{L}\,V'y'\,\frac{\partial y'}{\partial\mu}\,d\mu_1\,d\mu_2, \\ \qquad -\varkappa^{20}=q\int\frac{L_1L_2}{L}V^{20}y''y\left(y''\frac{\partial y}{\partial\mu}-y\,\frac{\partial y''}{\partial\mu}\right)d\mu_1\,d\mu_2, \\ -\varkappa'' =q\int\frac{L_1L_2}{L}V''y''\frac{\partial y''}{\partial\mu}\,d\mu_1\,d\mu_2, \\ \qquad -\varkappa^{01}=q\int\frac{L_1L_2}{L}\,V^{01}y\,y'\left(y\,\frac{\partial y'}{\partial\mu}-y'\,\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)d\mu_1\,d\mu_2. \end{cases}$$

Die Aufstellung der Werthe von $\beta$, $\gamma$ ist leicht, führt aber auf complicirte Ausdrücke, welche ich anzugeben unterlasse. Die Wichtigkeit der Gleichungen (40.) wird sogleich im Folgenden klarer werden.

Man kennt jetzt die Kräfte, welche, mit Übergehung der ***Reibung***, den Widerstand bilden, und kann zur Bewegung des Körpers selbst schreiten.

## §. 5.
### Gleichungen für die Bewegung des Körpers.

Man nenne $M$ die ***Masse*** des Körpers, $M^0$, $M'$, $M''$ seine ***Trägheitsmomente*** um die Axen $y$, $y'$, $y''$; und $Y$, $Y'$, $Y''$ die Componenten der an dem Punct $y$, $y'$, $y''$ des Körpers wirkenden äufsern Kräfte. Dann lassen sich die Bewegungsgleichungen für den Körper, abgesehen von den Widerstandskräften, in der Form

$$(42.)\begin{cases} M\frac{dA}{dt}=Q, & M^0\frac{dA^{12}}{dt}+(M''-M')A^{10}A^{20}=Q^{12}, \\ M\frac{dA'}{dt}=Q', & M'\frac{dA^{20}}{dt}+(M-M'')A^{21}A^{01}=Q^{20}, \\ M\frac{dA''}{dt}=Q'', & M''\frac{dA^{01}}{dt}+(M'-M)A^{02}A^{12}=Q^{01} \end{cases}$$

darstellen, wo die $Q$ folgende Werthe haben:

$$(43.)\begin{cases} Q\;=\Sigma Y\;+M\,\frac{d\xi.da_0^0+d\xi_1.da_1^0+d\xi_2.da_2^0}{dt^2}, & Q^{12}=\Sigma(y'Y''-y''Y'), \\ Q'\;=\Sigma Y'+M\frac{d\xi.da_0'+d\xi_1.da_1'+d\xi_2.da_2'}{dt^2}, & Q^{20}=\Sigma(y''Y-yY''), \\ Q''=\Sigma Y''+M\frac{d\xi.da_0''+d\xi_1.da_1''+d\xi_2.da_2''}{dt^2}, & Q^{01}=\Sigma(yY'-y'Y). \end{cases}$$

Berücksichtigt man nun auch die ***Druckkräfte***, so gehen die Gleichungen (42.) in die folgenden über:

$$(44.)\quad \begin{cases} M\dfrac{dA}{dt} = Q - P, & M^0\dfrac{dA^{12}}{dt} + (M'' - M')A^{10}A^{20} = Q^{12} - P^{12}, \\ M\dfrac{dA'}{dt} = Q' - P', & M'\dfrac{dA^{20}}{dt} + (M^0 - M'')A^{21}A^{01} = Q^{20} - P^{20}, \\ M\dfrac{dA''}{dt} = Q'' - P'', & M''\dfrac{dA^{01}}{dt} + (M' - M^0)A^{02}A^{12} = Q^{01} - P^{01}. \end{cases}$$

Die zweiten Differentialquotienten der $A$ sind hier nur in den sechs Gröfsen $\frac{dA^i}{dt}$ $\frac{dA^{h\varkappa}}{dt}$ enthalten; und um diese Gleichungen auf die gewöhnliche Form zu bringen, in welcher links allein zweite Differentialquotienten stehen, darf man sie nur nach diesen Gröfsen auflösen. Dieselben kommen rechts lineär vor; und zwar in denjenigen Theilen der $P$, welche von $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ herrühren. Es läfst sich demnach, mittels Auflösung lineärer Gleichungen, dem Systeme (44.) leicht eine Form geben, welche rechts keine zweiten Differentiale mehr enthält, nemlich die Form

$$(45.)\quad \begin{cases} (M + \varDelta M)\dfrac{dA}{dt} = Q + [Q], \\ \qquad (M^0 + \varDelta M^0)\dfrac{dA^{12}}{dt} + (M'' - M')A^{10}A^{20} = Q^{12} + [Q^{12}], \\ (M + \varDelta' M)\dfrac{dA'}{dt} = Q' + [Q'], \\ \qquad (M' + \varDelta M')\dfrac{dA^{20}}{dt} + (M^0 - M'')A^{21}A^{20} = Q^{20} + [Q^{20}], \\ (M + \varDelta'' M)\dfrac{dA''}{dt} = Q'' + [Q''], \\ \qquad (M'' + \varDelta M'')\dfrac{dA^{01}}{dt} + (M' - M^0)A^{02}A^{12} = Q^{01} + [Q^{01}]. \end{cases}$$

Die $\varDelta$ (welche die Correctionen der Masse und der Trägheitsmomente genannt werden können) und die eingeklammerten $Q$, sind von der Ordnung $q$, und verschwinden mit der Dichtigkeit der Flüssigkeit.

Wir kommen nun auf den oben erwähnten Fall der Symmetrie gegen die drei Haupt-Ebenen zurück. Man sieht unmittelbar, dafs alsdann

Die Gleichungen (44.) schon in aufgelöseter Form gegeben sind.

Sie nehmen folgende Form an:

$$
(46.)\quad \begin{cases}
(M+\Delta M)\dfrac{dA}{dt}+\beta A' A^{10}+\gamma A'' A^{20}=Q \;-g\mathrm{M}\cos(g,y), \\
(M+\Delta' M)\dfrac{dA'}{dt}+\beta' A'' A^{21}+\gamma' A A^{01}=Q' \;-g\mathrm{M}\cos(g,y'), \\
(M+\Delta'' M)\dfrac{dA''}{dt}+\beta'' A A^{02}+\gamma'' A' A^{12}=Q'' \;-g\mathrm{M}\cos(g,y''),
\end{cases}
$$

$$
(47.)\quad \begin{cases}
(M^0+\Delta M^0)\dfrac{dA^{12}}{dt}+(M''-M'+\gamma^{12})A^{10}A^{20}+\beta^{12}A' A''=Q^{12}, \\
(M'+\Delta M')\dfrac{dA^{20}}{dt}+(M^0-M''+\gamma^{20})A^{21}A^{01}+\beta^{20}A'' A=Q^{20}, \\
(M''+\Delta M'')\dfrac{dA^{01}}{dt}+(M'-M^0+\gamma^{01})A^{02}A^{12}+\beta^{01}A A'=Q^{01},
\end{cases}
$$

und es ergiebt sich zugleich:

$$
(48.)\quad \begin{cases}
\Delta M=\varkappa, & \Delta' M=\varkappa', & \Delta'' M=\varkappa'', \\
\Delta M^0=\varkappa^{12}, & \Delta M'=\varkappa^{20}, & \Delta M''=\varkappa^{01}.
\end{cases}
$$

Hieraus sieht man, wenn man auf specielle Arten der Bewegung eingeht, dafs in einigen Fällen die $\beta$, $\gamma$ ganz aus der Rechnung wegfallen; wovon weiter unten noch die Rede sein wird. Ich bemerke nur noch, dafs wenn der Körper sich ohne fortschreitende Bewegung nur um seinen Schwerpunct dreht, die Gleichungen der Bewegung der Form nach ungeändert bleiben und nur ihre Coëfficienten Correctionen erfahren.

## §. 6.

### Von der Bewegung der Flüssigkeitstheilchen. Dieselbe geschieht in Fäden.

Die Bewegung eines Flüssigkeitstheilchens erhält man durch Integration der Differentialgleichungen

$$
(49.)\quad \frac{dx}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},
$$

deren willkürliche Constanten durch die Anfangslage des Theilchens bestimmt werden. Es ist indefs leichter, nicht die wirkliche Bewegung der Theilchen zu suchen, sondern diejenige, welche sie in Bezug auf das im Körper feste Axensystem annehmen. Die Gleichungen zu diesem Zwecke sind

$$
(50.)\quad \frac{d\mu}{dt}=w,\quad \frac{d\mu_1}{dt}=w_1,\quad \frac{d\mu_2}{dt}=w_2,
$$

wenn man die Werthe der $w$ aus denen (15.) nimmt.

Der alleinige Umstand indefs, dafs die fraglichen Differentialgleichungen von der ersten Ordnung sind, reicht hin, um zu beweisen:

Dafs die Bewegung der Flüssigkeit in ***Fäden*** geschieht.

Denn man kann sich die Integrale der Gleichungen (49.) in der Form

$$(51.)\quad \begin{cases} \alpha\; = f\;(x x_1 x_2 t), \\ \alpha' = f'\,(x x_1 x_2 t), \\ \alpha'' = f''(x x_1 x_2 t) \end{cases}$$

ausgedrückt vorstellen, wo $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ willkürliche Constanten sind. Diese Gleichungen bezeichnen offenbar drei Systeme von Oberflächen, mit einem veränderlichen Parameter $t$. Es ist aber eine Eigenschaft solcher Oberflächen, dafs sich zwei, ***einem und demselben*** System angehörige Flächen im Allgemeinen ***niemals schneiden*** können. Denn aus den Gleichungen

$$(52.)\quad \alpha = f(x, x_1, x_2, t), \qquad \beta = f(x, x_1, x_2, t)$$

folgt im Allgemeinen immer

$$(53.)\quad \alpha = \beta;$$

d. h. die Oberflächen ***fallen zusammen.*** Vermöge dieser Eigenschaft theilen also die Oberflächen den ganzen Raum in sehr kleine Parallelepipeda, welche mit der ***Zeit*** zwar ihre Gestalt, niemals aber ihre gegenseitige Lage ändern können: auf die Weise, dafs jedes Parallelepipedum jederzeit von ***denselben*** Theilchen umgeben ist. Die Bewegung in ***Fäden*** findet also Statt; und zwar nicht blofs in ***einer,*** sondern im Grunde in ***jeder*** beliebigen Richtung. Es versteht sich, dafs sich Dies nur ***im Allgemeinen*** sagen läfst. Denn nimmt $f$ die Form $\frac{0}{0}$ an, so kann vielleicht die Gleichung (53.) nicht nothwendig aus (54.) hervorgehen, und in diesem Falle wird das Zerreifsen eines Fadens erfolgen; was dann auch durch die besondern Umstände des Problems sich anderweitig erklären wird.

## Specielle Arten der Bewegung des Körpers.

### §. 7.

### Bewegung ohne Rotation.

Wenn man die aufgestellten Gleichungen auf besondere Arten der Bewegung anwenden will, so ist wohl zunächst die ***rein-translatorische*** Bewegung zu betrachten. In diesem Falle werden die $a$ constant; die $A^{ix}$ verschwinden und man erhält:

$$(54.)\quad A = -\frac{d\eta}{dt},\quad A' = -\frac{d\eta'}{dt},\quad A'' = -\frac{d\eta''}{dt};$$

$\varphi$ nimmt also die Form

$$(55.)\quad \varphi = -U\frac{d\eta}{dt} - U'\frac{d\eta'}{dt} - U''\frac{d\eta''}{dt}$$

an, und wenn der Körper gegen seine Haupt-Ebenen (oder, was hier gleichviel gilt, gegen irgend drei Ebenen, die in seinem Schwerpunct sich rechtwinklig schneiden) symmetrisch ist, so gehen die Gleichungen (46.) über in:

$$(56.)\quad \begin{cases} -(M+\varDelta M)\dfrac{d\eta}{dt} = \Sigma Y - gM\cos(g,y), \\ -(M+\varDelta' M)\dfrac{d\eta'}{dt} = \Sigma Y' - gM\cos(g,y'), \\ -(M+\varDelta'' M)\dfrac{d\eta''}{dt} = \Sigma Y'' - gM\cos(g,y''), \end{cases}$$

oder auch in:

$$(57.)\quad \begin{cases} (M+a_0^0\varDelta M+a_0'\varDelta' M+a_0''\varDelta'' M)\dfrac{d\xi}{dt} = \Sigma X - gM\cos(g,x), \\ (M+a_1^0\varDelta M+a_1'\varDelta' M+a_1''\varDelta'' M)\dfrac{d\xi_1}{dt} = \Sigma X_1 - gM\cos(g,x_1), \\ (M+a_2^0\varDelta M+a_2'\varDelta' M+a_2''\varDelta'' M)\dfrac{d\xi_2}{dt} = \Sigma X_2 - gM\cos(g,x_2). \end{cases}$$

In diesem Falle also wird durch die Berücksichtigung des ***Drucks allein,*** eine Correction der Masse (verschieden in verschiedenen Richtungen) bedingt, und rechts eine Verminderung der ***Schwerkraft;*** wie sie beim Eintauchen immer erfolgt.

Die Gleichung (35.) geht in

$$(58.)\quad L_\varkappa^2\frac{\partial\mu_\varkappa}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial\mu_\varkappa}\cdot\frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial y'}{\partial\mu_\varkappa}\cdot\frac{d\eta'}{dt} + \frac{\partial y''}{\partial\mu_\varkappa}\cdot\frac{d\eta''}{dt}$$

über, und die Bewegung der Flüssigkeit wird also ausgedrückt durch die Gleichungen

$$(59.)\quad L_\varkappa^2 d\mu_\varkappa = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_\varkappa} + L_\varkappa^2\frac{\partial\mu_\varkappa}{\partial t}\right)dt,\quad \text{d. h.}$$

$$(60.)\quad \begin{cases} L^2 d\mu = \dfrac{\partial(y-U)}{\partial\mu}d\eta + \dfrac{\partial(y'-U')}{\partial\mu}d\eta' + \dfrac{\partial(y''-U'')}{\partial\mu}d\eta'', \\ L_1^2 d\mu_1 = \dfrac{\partial(y-U)}{\partial\mu_1}d\eta + \dfrac{\partial(y'-U')}{\partial\mu_1}d\eta' + \dfrac{\partial(y''-U'')}{\partial\mu_1}d\eta'', \\ L_2^2 d\mu_2 = \dfrac{\partial(y-U)}{\partial\mu_2}d\eta + \dfrac{\partial(y'-U')}{\partial\mu_2}d\eta' + \dfrac{\partial(y''-U'')}{\partial\mu_2}d\eta'', \end{cases}$$

Man sieht dafs $t$ ganz weggefallen ist, und dafs die Verhältnisse $d\eta : d\eta' : d\eta''$ nur von der Gestalt der Curve abhangen, auf welcher der Schwerpunct sich bewegt. Daher ergiebt sich folgender Satz:

Die Gestalt der Curven auf denen die Flüssigkeitstheilchen sich relativ gegen den Schwerpunct des Körpers zu bewegen scheinen, ist allein von der Gestalt des Körpers und von der Curve, auf der sich sein Schwerpunct bewegt, abhängig.

Wird also der Körper auf einer gegebenen Curve fortgeführt, so lassen sich die Bahnen (rel.) der Flüssigkeitstheilchen bestimmen, ohne die auf den Körper wirkenden Kräfte zu berücksichtigen.

Es ist übrigens leicht zu sehen:

Dafs das obige Theorem auch noch gilt, wenn eine Rotation des Körpers Statt findet, sobald dieselbe an den Ort, wo sich der Körper befindet, gebunden ist.

Hierzu wird der zweite Fall der Bewegung des Körpers, die ***Pendelbewegung,*** zu der ich mich nun wende, ein Beispiel geben.

## §. 8.

### Bewegung um eine feste Axe.

Man nehme an, der Körper sei mit einer festen Axe fest verbunden, und dieselbe sei die Axe der $x$; der Schwerpunct bewege sich demnach in der $x_1\, x_2$ Ebene; der Radius des Kreises, welchen er beschreibt, sei $\varrho$. Der Winkel, welchen der nach dem Schwerpunct gezogene Radius mit der $X_1$-Axe bildet, soll $\psi$ heifsen. Dann ist zunächst:

$$(61.)\qquad \xi = 0,\qquad \xi_1 = \varrho\cos\psi,\qquad \xi_2 = \varrho\sin\psi.$$

Um die Gröfsen $a$ bequem durch $\psi$ auszudrücken, führe ich ein Coordinatensystem $z$, $z_1$, $z_2$ ein, welches mit dem Körper fest verbunden sein soll, und dessen Anfangspunct im Schwerpuncte liegen mag. Die Axe $z$ sei der $x$ parallel, die Axe $z_1$ verbinde die Anfangspuncte beider Systeme; ferner falle für $\psi = 0$, $z_1$ mit $x_1$, $z_2$ mit $x_2$ zusammen; für $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $z_2$ mit $-x_1$, $z_1$ mit $x_2$. Dann ergiebt sich:

$$(62.)\qquad \begin{cases} z = x, & x = z, \\ z_1 + \varrho = +x_1\cos\psi + x_2\sin\psi, & x_1 - \xi_1 = z_1\cos\psi - z_2\sin\psi, \\ z_2 = -x_1\sin\psi + x_2\cos\psi, & x_2 - \xi_2 = z_1\sin\psi + z_2\cos\psi. \end{cases}$$

Fügt man nun die Gleichungen

$$(63.)\quad \begin{cases} z\ = c_0^0 y + c_0' y' + c_0'' y'', \\ z_1 = c_1^0 y + c_1' y' + c_1'' y'', \\ z_2 = c_2^0 y + c_2' y' + c_2'' y'' \end{cases}$$

hinzu, so erhält man durch Vergleichung der Gleichungen (62. und 63.):

$$(64.)\quad \begin{cases} a_0^0 = c_0^0, & a_1^0 = c_1^0 \cos\psi - c_2^0 \sin\psi, & a_2^0 = c_1^0 \sin\psi + c_2^0 \cos\psi, \\ a_0' = c_0', & a_1' = c_1' \cos\psi - c_2' \sin\psi, & a_2' = c_1 \sin\psi + c_2' \cos\psi, \\ a_0'' = c_0'', & a_1'' = c_1'' \cos\psi - c_2'' \sin\psi, & a_2'' = c_1'' \sin\psi + c_2'' \cos\psi. \end{cases}$$

Durch Differentiation erhält man:

$$(65.)\quad \begin{cases} \dfrac{da_1^0}{dt} = -a_2^0 \dfrac{d\psi}{dt}, & \dfrac{da_2^0}{dt} = +a_1^0 \dfrac{d\psi}{dt}, \\ \dfrac{da_1'}{dt} = -a_2' \dfrac{d\psi}{dt}, & \dfrac{da_2'}{dt} = +a_1' \dfrac{d\psi}{dt}, \\ \dfrac{da_1''}{dt} = -a_2'' \dfrac{d\psi}{dt}, & \dfrac{da_2''}{dt} = +a_1'' \dfrac{d\psi}{dt}, \end{cases}$$

und daher mittels der bekannten Relationen zwischen den Coëfficienten der Coordinatentransformation:

$$(66.)\quad \begin{cases} A\ = \varrho c_2^0 \dfrac{d\psi}{dt}, & A^{12} = c_0^0 \dfrac{d\psi}{dt}, \\ A' = \varrho c_2' \dfrac{d\psi}{dt}, & A^{20} = c_0' \dfrac{d\psi}{dt}, \\ A'' = \varrho c_2'' \dfrac{d\psi}{dt}, & A^{01} = c_0'' \dfrac{d\psi}{dt}. \end{cases}$$

Die Gleichung für die *Bewegung* des Körpers erhält man, wenn man die Gleichungen (45.), der Reihe nach mit

$$\varrho c_2^0,\ \varrho c_2',\ \varrho c_2'';\quad c_0^0,\ c_0',\ c_0''$$

multiplicirt, addirt. Dann ergiebt sich offenbar eine Gleichung von der Form

$$(67.)\quad K\frac{d^2\psi}{dt^2} + L\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = R;$$

wo $R$, $K$, $L$ Constanten bedeuten. Es tritt also durch Berücksichtigung des *Druckes* ein Glied hinzu, welches mit dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit multiplicirt ist.

Man betrachte insbesondere den Fall, wo der Körper *symmetrisch* ist, und zugleich die Axen $z$ mit den $y$ zusammenfallen. Alsdann verschwinden alle $A$ bis auf

$$(68.)\quad A'' = \varrho \frac{d\psi}{dt},\quad A^{12} = \frac{d\psi}{dt},$$

und man erhält die ***Pendelgleichung,*** indem man die dritte der Gleichungen (46.), mit $\varrho$ multiplicirt, zu der ersten Gleichung (37.) hinzufügt, nämlich:

$$(69.)\quad [(M^0+\varDelta M^0)+\varrho^2(M+\varDelta''M)]\frac{d^2\psi}{dt^2}$$
$$= (Q'^2+\varrho Q'')+g\mathrm{M}\varrho\{\cos(g, x_1)\sin\psi-\cos(g, x_2)\cos\psi\}.$$

Es zeigt sich, dafs durch die Berücksichtigung des ***Drucks*** nur eine Veränderung der ***Schwerkraft*** und des Trägheitsmoments eingetreten ist; bei dem gewöhnlichen Pendel also nur eine Veränderung der ***Pendellänge;*** ohne sonstige Modification der Bewegung.

Geht man wieder zu dem allgemeinen Falle dieser Bewegung zurück, so ergiebt sich ferner:

$$(70.)\quad \varphi = U.\frac{d\psi}{dt},$$

wo $U$ von $t$ unabhängig ist; und die für die Bewegung der Flüssigkeit aufgestellten Gleichungen (15.) werden zu:

$$(71.)\quad \begin{cases} L^2\dfrac{d\mu}{d\psi} = \dfrac{\partial U}{\partial\mu}-\varrho\dfrac{\partial z_2}{\partial\mu}+\left(z_2\dfrac{\partial z_1}{\partial\mu}-z_1\dfrac{\partial z_2}{\partial\mu}\right), \\ L_1^2\dfrac{d\mu_1}{d\psi} = \dfrac{\partial U}{\partial\mu_1}-\varrho\dfrac{\partial z_2}{\partial\mu_1}+\left(z_2\dfrac{\partial z_1}{\partial\mu_1}-z_1\dfrac{\partial z_2}{\partial\mu_1}\right), \\ L_2^2\dfrac{d\mu_2}{d\psi} = \dfrac{\partial U}{\partial\mu_2}-\varrho\dfrac{\partial z_2}{\partial\mu_2}+\left(z_2\dfrac{\partial z_1}{\partial\mu_2}-z_1\dfrac{\partial z_2}{\partial\mu_2}\right); \end{cases}$$

wodurch unter anderm das am Ende des vorigen Paragraphen aufgestellte Theorem seine Bestätigung erhält, indem sich die relativen Bahncurven finden lassen, ohne die Bewegung des Körpers zu kennen.

## Anwendung der aufgestellten Gleichungen auf die Bewegung eines Ellipsoïds.

### §. 9.

#### Bestimmung der Function $\varphi$.

Der bewegte Körper sei nun ein ***Ellipsoïd,*** dessen Gleichung

$$(72.)\quad \frac{y^2}{a}+\frac{y'^2}{a'}+\frac{y''^2}{a''} = 1$$

ist. Über seine ***Dichtigkeits***-Verhältnisse braucht nichts weiter festzustehen, als dafs sein Schwerpunct und seine Haupt-Axen, jener mit dem mathematischen Mittelpunct, diese mit den Haupt-Axen zusammenfallen sollen.

Die $\mu$ werden hier offenbar mittels der Gleichungen

$$(73.)\quad \begin{cases} y^2 = \dfrac{a+\mu\,.\,a+\mu_1\,.\,a+\mu_2}{a-a'\,.\,a-a''}, \\[2mm] y'^2 = \dfrac{a'+\mu\,.\,a'+\mu_1\,.\,a'+\mu_2}{a'-a''\,.\,a'-a}, \\[2mm] y''^2 = \dfrac{a''+\mu\,.\,a''+\mu_1\,.\,a''+\mu_2}{a''-a\,.\,a''-a'} \end{cases}$$

eingeführt, nach welchen $\mu$, $\mu_1$, $\mu_2$ sich als die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$(74.)\quad \frac{y^2}{a+\mu}+\frac{y'^2}{a'+\mu}+\frac{y''^2}{a''+\mu} = 1$$

darstellen. Die Gröfsen $a$ mögen so auf einander folgen, dafs

$$(75.)\quad a > a' > a'' > 0$$

ist, und die $\mu$ sollen so liegen, dafs

$$(76.)\quad \begin{cases} +\infty > +\mu > -a'' > +\mu_1 > -a' > +\mu_2 > -a \quad \text{oder} \\ a > -\mu_2 > +a' > -\mu_1 > +a'' > -\mu > -\infty \end{cases}$$

ist. Die Oberfläche des Körpers wird dann durch die Gleichung

$$(77.)\quad \mu = 0$$

bestimmt.

Es ist nun bekannt, dafs die Gleichung zur Bestimmung von $\varphi$ die Gestalt

$$(78.)\quad 0 = (\mu_1-\mu_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+(\mu_2-\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1^2}+(\mu-\mu_1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2^2}$$

annimmt, wenn man

$$(79.)\quad \begin{cases} du = \dfrac{d\mu}{\sqrt{(a+\mu\,.\,a'+\mu\,.\,a''+\mu)}}, \\[2mm] du_1 = \dfrac{d\mu_1}{\sqrt{(a+\mu_1\,.\,a'+\mu_1\,.\,a''+\mu_1)}}, \\[2mm] du_2 = \dfrac{d\mu_2}{\sqrt{(a+\mu_2\,.\,a'+\mu_2\,.\,a''+\mu_2)}} \end{cases}$$

setzt. Es gehen ferner die Bedingungsgleichungen (22.), wenn man $\varphi$ in der Form (36.) annimmt, da das Ellipsoïd ein *symmetrischer* Körper ist, in

$$(80.)\quad \begin{cases} 2\left(\dfrac{\partial V}{\partial \mu}\right)_0 = \dfrac{1-V_0}{a}, & 2\left(\dfrac{\partial V^{12}}{\partial \mu}\right)_0 = \dfrac{1-V_0^{12}}{a''}-\dfrac{1+V_0^{12}}{a'}, \\[2mm] 2\left(\dfrac{\partial V'}{\partial \mu}\right)_0 = \dfrac{1-V_0'}{a'}, & 2\left(\dfrac{\partial V^{20}}{\partial \mu}\right)_0 = \dfrac{1-V_0^{20}}{a}-\dfrac{1+V_0^{20}}{a''}, \\[2mm] 2\left(\dfrac{\partial V''}{\partial \mu}\right)_0 = \dfrac{1-V_0''}{a''}, & 2\left(\dfrac{\partial V^{01}}{\partial \mu}\right)_0 = \dfrac{1-V_0^{01}}{a'}-\dfrac{1+V_0^{01}}{a} \end{cases}$$

über. Erwägt man endlich, dafs

$$(81.)\quad \begin{cases} 4L^2 = \dfrac{\mu-\mu_1.\mu-\mu_2}{a+\mu.a'+\mu.a''+\mu}, \\ 4L_1^2 = \dfrac{\mu_1-\mu_2.\mu_1-\mu}{a+\mu_1.a'+\mu_1.a''+\mu_1}, \\ 4L_2^2 = \dfrac{\mu_2-\mu.\mu_2-\mu_1}{a+\mu_2.a'+\mu_2.a''+\mu_2} \end{cases}$$

ist, so sind auch die Coëfficienten der letzten Bedingungsgleichung

$$(82.)\quad \left[\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 + \frac{1}{L_1^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1}\right)^2 + \frac{1}{L_2^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_2}\right)^2\right]_{\mu=\infty} = 0$$

hierdurch bekannt.

Vorausgesetzt nun, die Gleichungen (78, 80, 82.) gestatten ***nur eine*** Lösung $\varphi$, welche allen zugleich genügt, so ist es leicht, dieselbe zu finden. Man darf nur, was der Erfolg rechtfertigt, die $V$ sämmtlich von $\mu_1$, $\mu_2$ unabhängig annehmen. Dann zerfällt die Gleichung (78.) in folgende sechs:

$$(83.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2V}{du^2}(a+\mu)+\dfrac{dV}{du}\cdot\dfrac{d(a+\mu)}{du}=0, \\ \qquad\qquad \dfrac{d^2V^{12}}{du^2}(a'+\mu.a''+\mu)+\dfrac{dV^{12}}{du}\cdot\dfrac{d(a'+\mu.a''+\mu)}{du}=0, \\ \dfrac{d^2V'}{du^2}(a'+\mu)+\dfrac{dV'}{du}\cdot\dfrac{d(a'+\mu)}{du}=0, \\ \qquad\qquad \dfrac{d^2V^{20}}{du^2}(a''+\mu.a+\mu)+\dfrac{dV^{20}}{du}\cdot\dfrac{d(a''+\mu.a+\mu)}{du}=0, \\ \dfrac{d^2V''}{du^2}(a''+\mu)+\dfrac{dV''}{du}\cdot\dfrac{d(a''+\mu)}{du}=0, \\ \qquad\qquad \dfrac{d^2V^{01}}{du^2}(a+\mu.a'+\mu)+\dfrac{dV^{01}}{du}\cdot\dfrac{d(a+\mu.a'+\mu)}{du}=0, \end{cases}$$

deren Lösungen

$$(84.)\quad \begin{cases} a+\mu\cdot\dfrac{dV}{du}=C, & a'+\mu\cdot a''+\mu\cdot\dfrac{dV^{12}}{du}=C^{12}, \\ a'+\mu\cdot\dfrac{dV'}{du}=C', & a''+\mu\cdot a+\mu\cdot\dfrac{dV^{20}}{du}=C^{20}, \\ a''+\mu\cdot\dfrac{dV''}{du}=C'', & a+\mu\cdot a'+\mu\cdot\dfrac{dV^{01}}{du}=C^{01} \end{cases}$$

und endlich

$$(85.)\quad \begin{cases} V\;\;=-C\displaystyle\int_\mu^\infty\frac{du}{a+\mu}=-CS_0, \\ \qquad\qquad V^{12}=-C^{12}\displaystyle\int_\mu^\infty\frac{du}{a'+\mu\,.\,a''+\mu}=C^{12}\frac{S'-S''}{a'-a''}, \\ V'\;=-C'\displaystyle\int_\mu^\infty\frac{du}{a'+\mu}=-C'S', \\ \qquad\qquad V^{20}=-C^{20}\displaystyle\int_\mu^\infty\frac{du}{a''+\mu\,.\,a+\mu}=C^{20}\frac{S''-S^0}{a''-a}, \\ V''=-C''\displaystyle\int_\mu^\infty\frac{du}{a''+\mu}=-C''S'', \\ \qquad\qquad V^{01}=-C^{01}\displaystyle\int_\mu^\infty\frac{du}{a+\mu\,.\,a'+\mu}=C^{01}\frac{S^0-S'}{a-a'}\quad\text{sind.} \end{cases}$$

Ich habe die obere Grenze des Integrals überall unendlich gesetzt, um der Gleichung (82.) zu genügen. Man erhält nämlich, in Folge der Entwicklung

$$(86.)\qquad -u=\int_\mu^\infty\frac{d\mu}{\sqrt{(a+\mu\,.\,a'+\mu\,.\,a''+\mu)}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\mu}}-\frac{a+a'+a''}{3\sqrt{\mu^3}}+\frac{(3a^2+a'^2+a''^2)+2(aa'+a'a''+a''a)}{20\sqrt{\mu^5}}+\cdots$$

durch Differentiation:

$$(87.)\quad \begin{cases} S\;\;=2\dfrac{\partial u}{\partial a}=\dfrac{2}{3\sqrt{\mu^3}}-\dfrac{3a+a'+a''}{5\sqrt{\mu^5}}+\cdots, \\ S'\;=2\dfrac{\partial u}{\partial a'}=\dfrac{2}{3\sqrt{\mu^3}}-\dfrac{3a'+a''+a}{5\sqrt{\mu^5}}+\cdots, \\ S''=2\dfrac{\partial u}{\partial a''}=\dfrac{2}{3\sqrt{\mu^3}}-\dfrac{3a''+a+a'}{5\sqrt{\mu^5}}+\cdots; \end{cases}$$

welche Entwicklungen gewifs convergiren, wenn $\mu$ sehr grofs ist. Hieraus sieht man, dafs die Ausdrücke $Vy$, $V'y'$, $V''y''$ mit der $-1$ten, $V^{12}y'y''$, $V^{20}y''y$ und $V^{01}yy'$ mit der $-\frac{3}{2}$ten Potenz von $\mu$ beginnen; ihre Differentialquotienten nach $\mu_1$, $\mu_2$ also desgleichen, und ihre Differentialquotienten nach $\mu$ respective mit der $-2$ten und der $-\frac{5}{2}$ten Potenz. Demnach beginnt $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2$ mit der $-4$ten, und $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1}\right)^2$, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_2}\right)^2$ mit der $-3$ten. Erwägt man hierzu, dafs wenn $\mu$ sehr grofs ist, $\frac{1}{L^2}$ mit $\mu$, $\frac{1}{L_1^2}$ und $\frac{1}{L_2^2}$ mit $\frac{1}{\mu}$ proportional sind, so verschwindet offenbar, wenn $\mu=\infty$ ist, jedes Glied der Gleichung (82.) für sich, und sie wird demnach erfüllt.

Es bleiben noch die $C$ zu bestimmen. Führt man die Gleichungen (84, 85.) in (80.) ein, so gehen dieselben in die folgenden über:

$$(88.)\quad \begin{cases} \dfrac{2C}{\sqrt{(aa'a'')}} = 1 + C\,S_0^0, & \dfrac{2C^{12}}{\sqrt{(aa'a'')}} = -\dfrac{(a'-a'')^2 + (a'+a'')(S'-S'')C^{12}}{a''-a'}, \\[2ex] \dfrac{2C'}{\sqrt{(aa'a'')}} = 1 + C'S_0', & \dfrac{2C^{20}}{\sqrt{(aa'a'')}} = -\dfrac{(a''-a)^2 + (a''+a)(S''-S)C^{20}}{a-a''}, \\[2ex] \dfrac{2C''}{\sqrt{(aa'a'')}} = 1 + C''S_0'', & \dfrac{2C^{01}}{\sqrt{(aa'a'')}} = -\dfrac{(a-a')^2 + (a+a')(S-S')C^{01}}{a'-a}; \end{cases}$$

oder, wenn man

$$(89.)\quad \begin{cases} \Sigma = S^0 + S' + S'' = \dfrac{2}{\sqrt{(a+\mu\,.\,a'+\mu\,.\,a''+\mu)}}, \\[2ex] \Sigma_0 = \dfrac{2}{\sqrt{(aa'a'')}} \end{cases}$$

setzt, in:

$$(90.)\quad \begin{cases} C = \dfrac{1}{\Sigma_0 - S_0^0}, & C^{12} = -\dfrac{(a''-a')^2}{(a''-a')\Sigma_0 + (a''+a')(S_0''-S_0')}, \\[2ex] C' = \dfrac{1}{\Sigma_0 - S_0'}, & C^{20} = -\dfrac{(a-a'')^2}{(a-a'')\Sigma_0 + (a+a'')(S_0-S_0'')}, \\[2ex] C'' = \dfrac{1}{\Sigma_0 - S_0''}, & C^{01} = -\dfrac{(a'-a)^2}{(a'-a)\Sigma_0 + (a'-a)(S_0'-S_0)}, \end{cases}$$

und die Function $\varphi$ nimmt somit folgenden Werth an:

$$(91.)\quad \varphi = -\left\{\frac{yS.A}{\Sigma_0 - S_0} + \frac{y'S'.A'}{\Sigma_0 - S_0'} + \frac{y''S''.A''}{\Sigma_0 - S_0''}\right\}$$
$$+\left\{\frac{(a'-a'')(S'-S'')y'y''.A^{12}}{(a'-a'')\Sigma_0 + (a'+a'')(S_0'-S_0'')} + \frac{(a''-a)(S''-S)y''y.A^{20}}{(a''-a)\Sigma_0 + (a''+a)(S_0''-S_0)}\right.$$
$$\left.+\frac{(a-a')(S-S')yy'.A^{01}}{(a-a')\Sigma_0 + (a+a')(S_0-S_0')}\right\}.$$

Wegen der Coëfficienten ist noch Einiges zu bemerken. Zunächst sind die $S$ sämmtlich *positiv*, und also auch $\Sigma$; dabei ist

$$(92.)\quad S < S' < S''.$$

Die $C$ sind also (mit Einem oberen Index) sämmtlich positiv; und zwar ist

$$(93.)\quad C < C' < C''.$$

Die übrigen $C$ lassen sich auch in der Form

$$
(94.)\quad \begin{cases}
-\dfrac{C^{12}}{a''-a'} = \dfrac{1}{S_0+2\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mu d\mu}{a'+\mu\,.\,a''+\mu}\cdot\frac{1}{\sqrt{(a+\mu\,.\,a'+\mu\,.\,a''+\mu)}}}, \\[2ex]
-\dfrac{C^{20}}{a-a''} = \dfrac{1}{S_0'+2\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mu d\mu}{a''+\mu\,.\,a+\mu}\cdot\frac{1}{\sqrt{(a+\mu\,.\,a'+\mu\,.\,a''+\mu)}}}, \\[2ex]
-\dfrac{C^{01}}{a'-a} = \dfrac{1}{S_0''+2\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mu d\mu}{a+\mu\,.\,a'+\mu}\cdot\frac{1}{\sqrt{(a+\mu\,.\,a'+\mu\,.\,a''+\mu)}}}
\end{cases}
$$

darstellen. Links stehen gerade die Coëfficienten, welche in der zweiten Parenthese der Gleichung (91.) vorkommen. Sie sind, wie man sieht, ebenfalls sämmtlich *positiv*.

Die Gröfsen $S$, $S'$, $S''$ lassen sich leicht auf die gewöhnliche Form der elliptischen Transcendenten bringen. Doch hat Dies, wie mir scheint, nur ein geringes Interesse, zumal da die Symmetrie der Formeln alsdann verloren geht.

## §. 10.

### Correctionen der Masse und der Trägheitsmomente.

Bei der Bewegung des Körpers kann man, da derselbe symmetrisch ist, auf die Gleichungen (46, 47.) zurückgehen. Da indefs die Bestimmung der $\beta$, $\gamma$ etwas weitläufig wird, so begnüge ich mich, die Werthe der mit $\Delta$ bezeichneten Correctionen anzugeben. Sie sind:

$$
(95.)\quad \begin{cases}
\Delta M = -qV_0 \int y \cos(n,y)\,do, \\
\qquad\qquad \Delta M^0 = -qV_0^{12} \int y'y''\{y'\cos(n,y'')-y''\cos(n,y')\}, \\
\Delta' M = -qV_0' \int y' \cos(n,y')\,do, \\
\qquad\qquad \Delta M' = -qV_0^{20} \int y''y\{y''\cos(n,y)-y\cos(n,y'')\}, \\
\Delta'' M = -qV_0'' \int y'' \cos(n,y'')\,do, \\
\qquad\qquad \Delta M'' = -qV_0^{01} \int yy'\{y\cos(n,y')-y'\cos(n,y)\};
\end{cases}
$$

wo die Integrale für die ganze Oberfläche des Ellipsoïds zu nehmen sind. Man kann dieselben aber durch dreifache Integrale ersetzen, die über das ganze Volumen des Ellipsoïds auszudehnen sind, und hat alsdann:

$$
(96.)\quad \begin{cases}
\Delta M = -qV_0 \int dy\,dy'\,dy'', & \Delta M^0 = -qV_0^{12}\int(y'y'-y''y'')\,dy\,dy'\,dy'', \\
\Delta' M = -qV_0' \int dy\,dy'\,dy'', & \Delta M' = -qV_0^{20}\int(y''y''-yy)\,dy\,dy'\,dy'', \\
\Delta'' M = -qV_0'' \int dy\,dy'\,dy'', & \Delta M'' = -qV_0^{01}\int(yy-y'y')\,dy\,dy'\,dy''.
\end{cases}
$$

Nennt man demnach M die Masse und $M^0$, $M'$, $M''$ die Trägheitsmomente eines dem gegebenen an Volumen gleichen Flüssigkeits-Ellipsoïds, so ergiebt sich:

$$(97.)\quad \begin{cases} \Delta M = -V_0 M = \dfrac{S_0 M}{\Sigma_0 - S_0} \\ \Delta' M = -V_0' M = \dfrac{S_0' M}{\Sigma_0 - S_0'}, \\ \Delta'' M = -V_0'' M = \dfrac{S_0'' M}{\Sigma_0 - S_0''}; \end{cases}$$

$$(98.)\quad \begin{cases} \Delta M^0 = V_0^{12}(M' - M'') = \dfrac{(a'-a'').(S_0'-S_0'')(M'-M'')}{(a'-a'')\Sigma_0 + (a'+a'')(S_0'-S_0'')}, \\ \Delta M' = V_0^{20}(M'' - M^0) = \dfrac{(a''-a).(S_0''-S_0)(M''-M^0)}{(a''-a)\Sigma_0 + (a''+a)(S_0''-S_0)}, \\ \Delta M'' = V_0^{01}(M^0 - M') = \dfrac{(a-a').(S_0-S_0')(M^0-M')}{(a-a')\Sigma_0 + (a+a')(S_0-S_0')}. \end{cases}$$

Da $M'' > M' > M^0 > 0$ ist, so sieht man aus diesen Gleichungen, in Verbindung mit dem oben Gesagten, dafs sämmtliche Correctionen *positiv* sind; wie das auch sogleich zu erwarten war.

## §. 11.

### Bewegung der Flüssigkeit.

Die ***Bewegung*** der Flüssigkeit möge in zwei Fällen, in welchen nach dem Obigen die Bahnen der Theilchen sich ermitteln lassen, ohne dafs man die Geschwindigkeit kennt, mit welcher das Ellipsoïd sich bewegt, etwas näher untersucht werden.

Man nehme erstlich an, das Ellipsoïd bewege sich längs einer seiner Haupt-Axen; und zwar mag diese Axe die gröfseste, $y$ sein; daraus erhält man die übrigen Fälle durch Vertauschung der Indices. In jenem Falle verschwinden alle $A$, bis auf $A$ selbst, und dieses $A$ wird zu

$$(99.)\quad A = \frac{d\xi}{dt},$$

wenn man annimmt, dafs die Axen $x$, $x_1$, $x_2$ den $y$, $y'$, $y''$ parallel gehen. Demnach ist

$$(100.)\quad \varphi = +\frac{d\xi}{dt}\cdot Vy = -\frac{d\xi}{dt}\cdot\frac{yS}{\Sigma_0 - S_0},$$

und aus den Gleichungen (15.) erhält man:

$$(101.)\quad \begin{cases} \dfrac{\mu-\mu_1\,.\,\mu-\mu_2}{a+\mu\,.\,a'+\mu\,.\,a''+\mu}\cdot\dfrac{d\mu}{d\xi} = -2y\left[\dfrac{1}{a+\mu}\left(1+\dfrac{S}{\Sigma_0-S_0}\right)+\dfrac{2\dfrac{\partial S}{\partial\mu}}{\Sigma_0-S_0}\right], \\ \dfrac{\mu_1-\mu_2\,.\,\mu_1-\mu}{a+\mu_1\,.\,a'+\mu_1\,.\,a''+\mu_1}\cdot\dfrac{d\mu_1}{d\xi} = -2y\cdot\dfrac{1}{a+\mu_1}\left(1+\dfrac{S}{\Sigma_0-S_0}\right), \\ \dfrac{\mu_2-\mu\,\,\mu_2-\mu_1}{a+\mu_2\,.\,a'+\mu_2\,.\,a''+\mu_2}\cdot\dfrac{d\mu_2}{d\xi} = -2y\cdot\dfrac{1}{a+\mu_2}\left(1+\dfrac{S}{\Sigma_0-S_0}\right). \end{cases}$$

Diesen Gleichungen läfst sich auch die Form

$$(102.)\quad \begin{cases} \mu_2-\mu\cdot d\Omega = \dfrac{d\mu_1}{a'+\mu_1\,.\,a''+\mu_1}, \\ \mu-\mu_1\cdot d\Omega = \dfrac{d\mu_2}{a'+\mu_2\,.\,a''+\mu_2}, \\ \mu_1-\mu_2\cdot d\Omega = \dfrac{d\mu}{a'+\mu\,.\,a''+\mu}\cdot\left\{1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}(\Sigma_0-S_0+S)\sqrt{(a+\mu\,.\,a'+\mu\,.\,a''+\mu)}}\right\} \end{cases}$$

geben. Multiplicirt man sie mit

$$a'+\mu_1,\quad a'+\mu_2,\quad a'+\mu,$$

oder mit

$$a''+\mu_1,\quad a''+\mu_2,\quad a''+\mu,$$

so erhält man unmittelbar die zwei vollständigen Differentiale:

$$(103.)\quad \begin{cases} 2\dfrac{dy''}{y''} = \dfrac{d\mu}{a''+\mu}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}(\Sigma_0-S_0+S)\sqrt{(a+\mu\,.\,a'+\mu\,.\,a''+\mu)}}, \\ 2\dfrac{dy'}{y'} = \dfrac{d\mu}{a+\mu}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}(\Sigma_0-S_0+S)\sqrt{(a+\mu\,.\,a'+\mu\,.\,a''+\mu)}}, \end{cases}$$

oder, durch Integration:

$$(104.)\quad \begin{cases} 2\log y'' = \displaystyle\int\dfrac{d\mu}{a''+\mu}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}(\Sigma_0-S_0+S)\sqrt{(a+\mu\,.\,a'+\mu\,.\,a''+\mu)}}, \\ 2\log y' = \displaystyle\int\dfrac{d\mu}{a'+\mu}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}(\Sigma_0-S_0+S)\sqrt{(a+\mu\,.\,a'+\mu\,.\,a''+\mu)}}. \end{cases}$$

Es sind also die Coordinaten des Theilchens durch den Parameter desjenigen *confocalen Ellipsoïds* ausgedrückt, auf welchem es sich gerade befindet.

Die Integrale allerdings sind wohl weiter nicht darstellbar; nicht einmal näherungsweise, mittels der in der Theorie der elliptischen Functionen angegebenen Entwicklungen. Wenn man indefs soweit in die Flüssigkeit hineingeht, dafs sich die *sechste* und höhere Potenzen von $\sqrt{\frac{a}{\mu}}\ \sqrt{\frac{a'}{\mu}}\ \sqrt{\frac{a''}{\mu}}$ vernachlässigen lassen, so kann man den Integralen (104.) folgende einfache

Form geben:

$$(105.)\quad \begin{cases} \log\frac{y''}{y''_0} = \frac{S''}{\Sigma_0 - S_0}, & y'' = y''_0\left(1+\frac{S''}{\Sigma_0 - S_0}\right)+\cdots, \\ \log\frac{y'}{y'_0} = \frac{S'}{\Sigma_0 - S_0}, & y' = y'_0\left(1+\frac{S'}{\Sigma_0 - S_0}\right)+\cdots. \end{cases}$$

Es zeigt sich hieraus, dafs im Anfange, bei abnehmendem $\mu$, die Bahncurve etwas von der $y$ Axe sich entfernt, um sich ihr dann auf dieselbe Weise wieder zu nähern, und endlich ihr parallel zu werden.

Vernachlässigt man auch die *vierten* Potenzen von $\sqrt{\frac{a}{\mu}}$, $\sqrt{\frac{a'}{\mu}}$, $\sqrt{\frac{a''}{\mu}}$, so erhält man:

$$106.)\quad \begin{cases} y'' = y''_0\left(1+\frac{2}{3(\Sigma_0 - S_0)\sqrt{\mu^3}}\right), \\ y' = y'_0\left(1+\frac{2}{3(\Sigma_0 - S_0)\sqrt{\mu^3}}\right), \end{cases}$$

Die Bahncurve liegt hier in einer *Ebene,* welche durch die Axe $y$ geht. Erwägt man hiezu, dafs zugleich die Gleichung (74.) in

$$(107.)\quad 1 = \frac{y^2+y'^2+y''^2}{\mu} = \frac{r^2}{\mu}$$

übergeht, so wird die Gleichung der Curve in ihrer Ebene, wenn $z$ den Abstand von der $y$ Axe und $r$ den Radiusvector bedeutet, zu:

$$(108.)\quad z = z_0\left(1+\frac{2}{3(\Sigma_0 - S_0)}\cdot\frac{1}{r^3}\right);$$

welche Curve, wie man sieht, schnell einer geraden Linie sich nähert.

Man betrachte *zweitens* den Fall, wo das Ellipsoïd um eine Haupt-Axe *rotirt.* Es sei wieder $y$ die Rotations-Axe. Es verschwinden alle $A$, aufser $A^{12}$, und $\varphi$ nimmt die Form

$$(109.)\quad \varphi = \varkappa(S'-S'')y'y''A^{12},\qquad \varkappa = \frac{a'-a''}{(a'-a'')\Sigma_0+(a'+a'')(S'_0-S''_0)}$$

an. Die Gleichungen (15.) geben alsdann:

$$(110.)\quad \begin{cases} L^2\frac{d\mu}{dt} = y'y''.\tfrac{1}{2}A^{12}\Big[\left(\frac{1}{a'+\mu}-\frac{1}{a''+\mu}\right)+\varkappa(S'-S'')\left(\frac{1}{a'+\mu}+\frac{1}{a''+\mu}\right) \\ \qquad\qquad + 2\varkappa\frac{\partial(S'-S'')}{\partial\mu}\Big], \\ L_1^2\frac{d\mu_1}{dt} = y'y''.\tfrac{1}{2}A^{12}\Big[\left(\frac{1}{a'+\mu_1}-\frac{1}{a''+\mu_1}\right)+\varkappa(S'-S'')\left(\frac{1}{a'+\mu_1}+\frac{1}{a''+\mu_1}\right)\Big], \\ L_2^2\frac{d\mu_2}{dt} = y'y''.\tfrac{1}{2}A^{12}\Big[\left(\frac{1}{a'+\mu_2}-\frac{1}{a''+\mu_2}\right)+\varkappa(S'-S'')\left(\frac{1}{a'+\mu_2}+\frac{1}{a''+\mu_2}\right)\Big], \end{cases}$$

welche sich auf folgende Form bringen lassen:

$$(111.)\quad \begin{cases} d\Omega(m+n\mu_1)(\mu_2-\mu) = \dfrac{d\mu_1}{a+\mu_1}, \\ d\Omega(m+n\mu_2)(\mu-\mu_1) = \dfrac{d\mu_2}{a+\mu_2}, \\ d\Omega(m+n\mu)(\mu_1-\mu_2) = \dfrac{d\mu}{a+\mu}\{1-M\}, \end{cases}$$

$$(112.)\quad M = \frac{2\varkappa(a''-a')}{2\varkappa(a''-a')-[(a''-a')+\varkappa(S'-S'')(a''+a'+2\mu)]\sqrt{(a+\mu.a'+\mu.a''+\mu)}},$$

So findet man also *ein* Integral, indem man die Gleichungen (111.) addirt, nämlich:

$$(113.)\quad 2\log y = \int\frac{M d\mu}{a+\mu}.$$

Man kann hiebei wie oben näherungsweise verfahren; doch ist Dies um so weniger von Interesse, als über das zweite Integral nichts festzustehen scheint.

## §. 12.

### Von Rotations-Ellipsoïden.

Der Fall eines Rotations-Ellipsoïds führt auf eine besondere Vereinfachung der angegebenen Formeln; aufser dafs sich die Gröfsen $S$, $S'$, $S''$ durch log. und arc. tg. ausdrücken lassen.

Von den sechs Gliedern der Function $\varphi$ verschwindet dasjenige, welches der Rotation um die ungleiche Axe entspricht. Der *Theorie* nach würde also durch alleinige Rotation um diese Axe *keine* Bewegung in der Flüssigkeit hervorgebracht. Der Fehler der *Theorie* war vorauszusehen, weil bei der Aufstellung der Grundgleichungen des Problems die *Reibung* zwischen der Flüssigkeit und der Wand des Körpers, welche in diesem Fall allein die Ursache einer Bewegung sein kann, vernachlässigt ist.

## §. 13.

### Bewegung einer Kugel; zumal unter verhinderter Rotation.

Die Gleichungen für die Bewegung einer *Kugel* will ich noch kurz angeben, obgleich die hauptsächlichsten davon in der oben erwähnten Abhandlung von *Dirichlet* zu finden sind.

Setzt man im Obigen

$$(114.)\quad a = a' = a'' = c^2, \quad c^2+\mu = r^2,$$

so ergiebt sich

$$(115.)\qquad S = S' = S'' = \frac{2}{3r^2} \quad \text{und}$$

$$(116.)\qquad \varphi = -\frac{c^3}{2r^3}(Ay + A'y' + A''y''),$$

indem die der Rotation entsprechenden Glieder, wie zu erwarten, verschwinden. Eben so verschwinden die Correctionen der Trägheitsmomente, und die Correction der Masse wird nach allen Richtungen dieselbe, nämlich:

$$(117.)\qquad \varDelta M = \tfrac{1}{2}\mathrm{M}.$$

Die ***Kugel*** bewegt sich also, als folgte ihr eine Flüssigkeitsmasse nach, welche ihrem halben Volumen gleichkommt.

Setzt man endlich

$$(118.)\qquad \begin{cases} y = r\cos\vartheta, \\ y' = r\sin\vartheta.\cos\omega, \\ y'' = r\sin\vartheta.\sin\omega, \end{cases}$$

und betrachtet $r$, $\vartheta$, $\omega$ als die Parameter der orthogonalen Oberflächensysteme, so nehmen die Gleichungen für die Bewegung der Flüssigkeit folgende Form an:

$$(119.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{r^3-c^3}{r^3}[A\cos\vartheta + \sin\vartheta(A'\cos\omega + A''\sin\omega)], \\[2ex] r^2\dfrac{d\vartheta}{dt} = -\dfrac{2r^3+c^3}{2r^2}[-A\sin\vartheta + \cos\vartheta(A'\cos\omega + A''\sin\omega)] \\ \qquad\qquad + r^2(A^{20}\sin\omega - A^{10}\cos\omega), \\[2ex] r^2\sin^2\vartheta\dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{2r^3+c^3}{2r^2}[-A'\sin\omega + A''\cos\omega]\sin\vartheta \\ \qquad\qquad + r^2\sin\vartheta\cos\vartheta(A^{20}\cos\omega + A^{10}\sin\omega) - A^{21}r^2\sin^2\vartheta. \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen läfst sich ein Integral angeben, sobald $A$, $A^{10}$, $A^{20}$ verschwinden, d. h. wenn der Mittelpunct der Kugel sich in einer ***Ebene*** bewegt, und eine Rotation der Kugel nur um die ***Normale*** dieser Ebene gestattet ist. Denn, dividirt man in diesem Falle die ersten beiden Gleichungen durch einander, so erhält man:

$$(120.)\qquad \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r^3-c^3}{2r^3+c^3}.2r\,\mathrm{tg}\,\vartheta$$

oder, wenn man integrirt:

$$(121.)\qquad (r^3-c^3)\cos^2\vartheta = \alpha^2 r, \quad \text{oder} \quad (r^3-c^3)y^2 = \alpha^2 r^3;$$

wo $\alpha$ eine willkürliche Constante ist und den Werth von $y$ für $r = \infty$ angiebt.

Bewegt sich die Kugel geradlinig, *ohne* Rotation, längs der $y$-Axe, so erhält man, durch blofse Vertauschung der Coordinaten, aus der Gleichung (121.) die *zwei* Integrale:

$$(122.)\quad \begin{cases} (r^3-c^3)\sin^2\vartheta\cos^2\omega = \beta^2 r, \\ (r^3-c^3)\sin^2\vartheta\sin^2\omega = \gamma^2 r, \end{cases}$$

oder

$$(123.)\quad \begin{cases} \omega = \text{Const.} \\ (r^3-c^3)\sin^2\vartheta = \varkappa^2 r. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen sagt nur aus, dafs die Bewegung in einer Ebene vorsichgeht; die zweite giebt die Gleichung der Bahncurve in ihrer Ebene.

Die Curven, welche durch diese Gleichung dargestellt werden, nähern sich, unter wachsendem $\varkappa$, sehr bald geraden Linien, und schon die Curve für welche $\varkappa = 2c$ ist, ist von einer geraden Linie nur noch wenig verschieden. In der That findet man für diejenige Curve, welche an der Stelle der höchsten Erhebung ($\vartheta = \frac{1}{2}\pi$) um den doppelten Radius $c$ von dem Mittelpuncte der Kugel absteht, $\varkappa = 1{,}87\ldots.\, c$, so dafs die ganze Erhebung der Curve etwa *ein Zehntheil* des Kugelradius beträgt. Dies wird gewissermafsen durch eine Beobachtung von *Duchemin* bestätigt, welcher die entsprechenden Curven bei der Bewegung eines Rotationscylinders längs seiner Axe von einer geraden Linie nicht mehr merklich verschieden fand, wenn man sich um den Radius der Cylinderbasis von der Wand des Cylinders entfernte.

Von den Puncten dieser Curven, welche *Duchemin*, der in ihnen besonders starken Krümmung wegen, *Inflexionspuncte* nennt, habe ich allerdings keine Spur entdecken können.

## §. 14.

### Pendelbewegung.

Die Gleichung für die *Pendelbewegung* des Körpers wird im gegenwärtigen Falle: (69).

$$(124.)\quad [M^0+\varrho^2(M+\tfrac{1}{2}\mathrm{M})]\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\varrho g(M-\mathrm{M})\sin\psi,$$

wenn man aufser der *Schwere* keine Kraft, und diese in der Richtung $x_1$ wirksam annimmt; und es ist hier:

$$(125.)\quad M^0 = q_1\cdot\frac{8\pi c^5}{15},\quad M = \frac{4\pi c^3}{3}\cdot q_1,\quad \mathrm{M} = \frac{4\pi c^3}{3}\cdot q,$$

wenn $q_1$ die *Dichtigkeit* der Kugel bezeichnet.

Nennt man nun $\lambda$ die Länge eines einfachen Pendels, welches im leeren Raum eben so schwingt wie das gegebene Pendel in der Flüssigkeit, und $\lambda'$ die Länge desjenigen, welches wie das gegebene im leeren Raume schwingt, so ist:

$$(126.)\qquad \lambda' = \frac{M^0 + \varrho M}{\varrho M}, \qquad \lambda = \frac{M^0 + \varrho^2(M + \frac{1}{2}\mathrm{M})}{\varrho(M - \mathrm{M})},$$

und demnach, unter Vernachlässigung höherer Potenzen von $\frac{\mathrm{M}}{M}$:

$$(127.)\qquad \lambda = \lambda'\left\{1 + \frac{\mathrm{M}}{M}\left(1 + \frac{\varrho}{2\lambda'}\right)\right\} = \lambda'\left\{1 + n\frac{\mathrm{M}}{M}\right\}.$$

Dies ist die Form, welche man für diese Pendellänge anzunehmen pflegt; der Coëfficient $n$ ist, wie es sein mufs, von den Dichtigkeiten frei; auch nimmt er mit wachsendem $\varrho$ zu, und ab mit wachsendem $c$. Aber erstlich ist dabei keine unbedeutende Gröfse vernachlässigt; und ferner ist es klar, dafs dieser theoretische Werth von $n$ stets kleiner sein wird als $\frac{3}{2}$, während er in den Beobachtungen, welche ***Duchemin*** anführt, gröfstentheils zwischen 1,6 und 1,7 liegt (p. 181 etc.). Es macht sich also hier abermals eine Differenz zwischen Theorie und Erfahrung bemerkbar, welche auch durch Berücksichtigung der ***Reibung*** nicht so unmittelbar scheint beseitigt werden zu können.

Die ***Bewegung*** der Flüssigkeit wird, da

$$(128.)\qquad \varphi = -\tfrac{1}{2}c^3\varrho\cdot\frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{y''}{r^3} \qquad (\S. 8.)$$

ist, dargestellt durch die Differentialgleichungen

$$(129.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{d\psi} = -\dfrac{r^3 - c^3}{r^3}\varrho\sin\vartheta\sin\omega, \\ r^2\dfrac{d\vartheta}{d\psi} = -\dfrac{2r^3 + c^3}{2r^2}\varrho\cos\vartheta\sin\omega, \\ r^2\sin^2\vartheta\dfrac{d\omega}{d\psi} = -\dfrac{2r^3 + c^3}{2r^2}\varrho\sin\vartheta\cos\omega + r^2\sin^2\vartheta. \end{cases}$$

Man erhält *ein* Integral nach dem Obigen unmittelbar, nämlich:

$$(130.)\qquad (r^3 - c^3)\cos^2\vartheta = \alpha^2 r;$$

ferner aber aus der ersten und dritten Gleichung:

$$(131.)\qquad 0 = \frac{d\omega}{dr}\sin\omega - \frac{2r^3 + c^3}{2r(r^3 - c^3 - \alpha^2 r)}\cos\omega + \frac{r^3}{(r^3 - c^3)\varrho\sin\vartheta}.$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{r^3-c^3-\alpha^2 r}{r}}$ multiplicirt, und giebt alsdann

$$(132.)\qquad \cos\omega.\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\alpha\varrho}\int\frac{r^3 dr}{\sqrt{(r(r^3-c^3))}}.$$

Das Integral rechts ist durch *elliptische Functionen* ausdrückbar. Denn zunächst ist

$$(133.)\qquad \int\frac{r^3 dr}{\sqrt{(r(r^3-c^3))}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(r(r^3-c^3))} + \tfrac{1}{4}c^3\int\frac{dr}{\sqrt{(r(r^3-c^3))}}.$$

Setzt man nun

$$(134.)\qquad r = \frac{c}{1-\sqrt{3}.\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi} = c.\frac{1+\cos\varphi}{(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})\cos\varphi},$$

so erhält man

$$(135.)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_c^r\frac{dr}{\sqrt{(r(r^3-c^3))}} = \frac{1}{c\sqrt[4]{3}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})\sin^2\varphi)}} = \frac{u}{c\sqrt[4]{3}}, \\ \displaystyle r = c.\frac{1+\cos\operatorname{am}u}{(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})\cos\operatorname{am}u},\quad \varkappa^2 = \tfrac{1}{4}(2+\sqrt{3}) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2, \end{cases}$$

und endlich

$$(136.)\qquad \sqrt{(r(r^3-c^3))} = c\sqrt[4]{3}.\frac{dr}{du} = \frac{2c^2\sqrt{(3\sqrt{3})}\sin\operatorname{am}\Delta\operatorname{am}u}{[(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})\cos\operatorname{am}u]^2},$$

so dafs die Gleichung (132.) die Gestalt

$$(137.)\qquad \cos\omega\operatorname{tg}\vartheta = \text{Const.} + \frac{c^2 u}{\sqrt[4]{3}} + \frac{c^2\sqrt{(3\sqrt{3})}\sin\operatorname{am}\Delta\operatorname{am}u}{[(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})\cos\operatorname{am}u]^2}$$

annimmt, durch welche die Bahnen der Flüssigkeitstheilchen nunmehr vollständig bestimmt sind.

Danzig, im August 1854.