14.
Über Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven vierter Ordnung.

(Von Herrn *Otto Hesse*, Professor an der Universität zu Königsberg.)

---

§. 1.

Wenn die Elemente dreier Determinanten;

$$A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \dots a_n^n, \qquad B = \Sigma \pm b_0^0 b_1^1 \dots b_n^n, \qquad C = \Sigma \pm c_0^0 c_1^1 \dots c_n^n$$

so mit einander verbunden sind, dafs

$$c_\varkappa^\lambda = a_0^\varkappa b_0^\lambda + a_1^\varkappa b_1^\lambda + \dots + a_n^\varkappa b_n^\lambda$$

ist, so ist bekanntlich:

$$(1.) \quad AB = C.$$

Ich werde zeigen, wie die partiellen Differentialquotienten der Determinante C nach ihren Elementen c genommen durch die partiellen Differentialquotienten der Factoren A und B nach ihren Elementen genommen sich ausdrücken lassen.

Zu diesem Zwecke differentiire man die Gleichung (1.) nach $a_p^\varkappa$. Da von den Elementen c nur $c_\varkappa^0$, $c_\varkappa^1$, ... $c_\varkappa^n$ Functionen dieser Gröfse sind, so ergiebt sich:

$$B \cdot \frac{\partial A}{\partial a_p^\varkappa} = \frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^0} b_p^0 + \frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^1} b_p^1 + \dots \frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^n} b_p^n.$$

Diese Gleichung multiplicire man mit $\frac{\partial B}{\partial b_p^\lambda}$ und addire alle Gleichungen, welche sich aus der angegebenen ergeben, indem man statt p nach einander die Zahlen 0, 1, 2, ... n setzt. Dadurch erhält man:

$$B \Sigma \frac{\partial A}{\partial a_p^\varkappa} \frac{\partial B}{\partial b_p^\lambda} = \frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^0} \Sigma \frac{\partial B}{\partial b_p^\lambda} b_p^0 + \frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^1} \Sigma \frac{\partial B}{\partial b_p^\lambda} b_p^1 + \dots \frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^n} \Sigma \frac{\partial B}{\partial b_p^\lambda} b_p^n.$$

Da aber die Summen $\Sigma \frac{\partial B}{\partial b_p^\lambda} b_p^q$ einzeln verschwinden, mit Ausnahme der Summe, in welcher q den Werth λ hat, welche den Werth B annimmt, so erhält man die Gleichung:

$$(2.)\quad \frac{\partial C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}} = \frac{\partial A}{\partial a^{\varkappa}_{0}}\frac{\partial B}{\partial b^{\lambda}_{0}} + \frac{\partial A}{\partial a^{\varkappa}_{1}}\frac{\partial B}{\partial b^{\lambda}_{1}} + \cdots \frac{\partial A}{\partial a^{\varkappa}_{n}}\frac{\partial B}{\partial b^{\lambda}_{n}}.$$

§. 2.

Um die zweiten partiellen Differentialquotienten von C durch die zweiten partiellen Differentialquotienten der Factoren A und B auszudrücken, differentiire man die Gleichung (2.) zuerst nach a^{μ}_{q} und dann nach b^{ν}_{q}, welches

$$\frac{\partial^3 C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}\partial a^{\mu}_{q}\partial b^{\nu}_{q}} = \frac{\partial^2 A}{\partial a^{\varkappa}_{0}\partial a^{\mu}_{q}}\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial b^{\lambda}_{0}\partial b^{\nu}_{q}} + \frac{\partial^2 A}{\partial a^{\varkappa}_{1}\partial a^{\mu}_{q}}\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial b^{\lambda}_{1}\partial b^{\nu}_{q}} + \cdots \frac{\partial^2 A}{\partial a^{\varkappa}_{n}\partial a^{\mu}_{q}}\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial b^{\lambda}_{n}\partial b^{\nu}_{q}}$$

giebt. Wenn man in dieser Gleichung statt q nach einander die Zahlen $0, 1, \ldots n$ setzt, so entstehen daraus $n+1$ Gleichungen. Addirt man dieselben, so läfst sich die Summe wie folgt bequem darstellen:

$$\Sigma\frac{\partial^3 C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}\partial a^{\mu}_{q}\partial b^{\nu}_{q}} = \Sigma\frac{\partial^2 A}{\partial a^{\varkappa}_{p}\partial a^{\mu}_{q}}\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial b^{\lambda}_{p}\partial b^{\nu}_{q}};$$

wo für p und q die Zahlen $0, 1, \ldots n$ zu nehmen sind.

Der linkseitige Theil dieser Gleichung läfst sich als eine Function der Elemente c ausdrücken. In der That: differentiirt man $\frac{\partial C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}}$ nach a^{μ}_{q}, und berücksichtigt, dafs von den Elementen c nur $c^{0}_{\mu}, c^{1}_{\mu}, \ldots c^{n}_{\mu}$, Functionen von a^{μ}_{q} sind, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}\partial a^{\mu}_{q}} = \frac{\partial^2 C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}\partial c^{0}_{\mu}}b^{0}_{q} + \frac{\partial^2 C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}\partial c^{1}_{\mu}}b^{1}_{q} + \cdots \frac{\partial^2 C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}\partial c^{n}_{\mu}}b^{n}_{q}.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach b^{ν}_{q}, von welcher Gröfse wieder nur $c^{\nu}_{0}, c^{\nu}_{1}, \ldots c^{\nu}_{n}$ Functionen sind, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}\partial a^{\mu}_{q}\partial b^{\nu}_{q}} = \frac{\partial^2 C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}\partial c^{\nu}_{\mu}} &+ \left\{\frac{\partial^3 C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}\partial c^{0}_{\mu}\partial c^{\nu}_{0}}a^{0}_{q}b^{0}_{q} + \frac{\partial^3 C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}\partial c^{0}_{\mu}\partial c^{\nu}_{1}}a^{1}_{q}b^{0}_{q} + \cdots \frac{\partial^3 C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}\partial c^{0}_{\mu}\partial c^{\nu}_{n}}a^{n}_{q}b^{0}_{q}\right\}\\ &+ \left\{\frac{\partial^3 C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}\partial c^{1}_{\mu}\partial c^{\nu}_{0}}a^{0}_{q}b^{1}_{q} + \frac{\partial^3 C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}\partial c^{1}_{\mu}\partial c^{\nu}_{1}}a^{1}_{q}b^{1}_{q} + \cdots \frac{\partial^3 C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}\partial c^{1}_{\mu}\partial c^{\nu}_{n}}a^{n}_{q}b^{1}_{q}\right\}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+ \left\{\frac{\partial^3 C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}\partial c^{n}_{\mu}\partial c^{\nu}_{0}}a^{0}_{q}b^{n}_{q} + \frac{\partial^3 C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}\partial c^{n}_{\mu}\partial c^{\nu}_{1}}a^{1}_{q}b^{n}_{q} + \cdots \frac{\partial^3 C}{\partial c^{\lambda}_{\varkappa}\partial c^{n}_{\mu}\partial c^{n}_{n}}a^{n}_{q}b^{n}_{q}\right\}.\end{aligned}$$

Setzt man in dieser Gleichung für q die Zahlen $0, 1, \ldots n$ und addirt, so erhält man, mit Berücksichtigung der Gleichung

$$c^{\lambda}_{\varkappa} = a^{\varkappa}_{0}b^{\lambda}_{0} + a^{\varkappa}_{1}b^{\lambda}_{1} + \cdots a^{\varkappa}_{n}b^{\lambda}_{n},$$

folgende Gleichung:

$$\Sigma \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial a_q^\mu \partial b_q^\nu}$$

$$= (n+1)\frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu} - \left\{\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_0^0} c_0^0 + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_1^0} c_1^0 + \cdots \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_n^0} c_n^0\right\}$$

$$- \left\{\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_0^1} c_0^1 + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_1^1} c_1^1 + \cdots \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_n^1} c_n^1\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$- \left\{\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_0^n} c_0^n + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_1^n} c_1^n + \cdots \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_n^n} c_n^n\right\}.$$

Man bemerkt, dafs sich nicht genau diese Gleichung ergiebt, sondern dafs in sämmtlichen dritten Differentialquotienten der Determinante C des rechtseitigen Theiles der Gleichung zwei obere Indices der Elemente c mit einander vertauscht sind, und dafs zugleich das positive Vorzeichen jedes dritten Differentialquotienten von C in das negative verändert ist. Dieses ist aber erlaubt, weil eben die Determinante C ihr Vorzeichen wechselt, wenn man in allen ihren Gliedern zwei obere Indices mit einander vertauscht. Berücksichtigt man nun noch, dafs der Ausdruck:

$$\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_0^p} c_0^p + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_1^p} c_1^p + \cdots \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_n^p} c_n^p$$

gleich $\frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu}$ ist, ausgenommen wenn p gleich λ oder ν ist, in welchen Fällen der Ausdruck verschwindet, so stellt sich die zuletzt angegebene Gleichung wie folgt dar:

$$\Sigma \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial a_q^\mu \partial b_q^\nu} = 2 . \frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu}.$$

Setzt man diesen Werth der Summe in die eben angegebene Gleichung und dividirt durch 2, so erhält man für den gesuchten Ausdruck des zweiten partiellen Differentialquotienten von C:

$$(3.)\quad \frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu} = \frac{1}{1.2} \Sigma \frac{\partial^2 A}{\partial a_p^\varkappa \partial a_q^\mu} . \frac{\partial^2 B}{\partial b_p^\lambda \partial b_q^\nu}.$$

Bestimmt man auf dem angezeigten Wege durch Differentiation dieser Gleichung den dritten Differentialquotienten von C, so ergiebt sich:

$$(4.)\quad \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_\varrho^\sigma} = \frac{1}{1.2.3} \Sigma \frac{\partial^3 A}{\partial a_p^\varkappa \partial a_q^\mu \partial a_r^\varrho} \frac{\partial^3 B}{\partial b_p^\lambda \partial b_q^\nu \partial b_r^\sigma};$$

woraus das Bildungsgesetz für die höheren Differentialquotienten der Determinante C, nach ihren Elementen genommen, erhellet.

§. 3.

Das Product zweier Determinanten

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 \\ \gamma_2 - \gamma_1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}$$

läfst sich bekanntlich wieder auf die Form

$$\begin{vmatrix} u_{11}\alpha_2 - u_{12}\alpha_1 & u_{21}\alpha_2 - u_{22}\alpha_1 \\ u_{11}\gamma_2 - u_{12}\gamma_1 & u_{21}\gamma_2 - u_{22}\gamma_1 \end{vmatrix}$$

einer Determinante bringen.

Multiplicirt man diese Determinante noch einmal mit der ersten Determinante $\begin{vmatrix} -\alpha_2 & \alpha_1 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 \end{vmatrix}$, so erhält man, vorausgesetzt, dafs $u_{12} = u_{21}$ ist, eine Determinante $ac - b^2$, deren Componenten folgende Determinanten sind:

$$a = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix},$$

welches die identische Gleichung

$$(5.) \quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix}^2 = ac - b^2$$

giebt. Ich werde im Folgenden zeigen, welche Ausdehnung dieser Gleichung gegeben werden kann.

§. 4.

Es bedeute B die Determinante

$$B = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \beta \end{vmatrix},$$

in welcher jedes Element $u_{\varkappa\lambda}$ dem ihm entsprechenden $u_{\lambda\varkappa}$ gleich ist.

Man betrachte nun folgenden, der Determinante $ac - b^2$ des vorhergehenden Paragraphen analog gebildeten Ausdruck:

$$\left(\frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\alpha_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\alpha_2 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_3}\alpha_3\right)\left(\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\gamma_2 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_3}\gamma_3\right) - \left(\frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\gamma_2 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_3}\gamma_3\right)^2,$$

welcher sich als Determinante auch so darstellen läfst:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\alpha_1+\frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\alpha_2+\frac{\partial B}{\partial \gamma_3}\alpha_3 & \frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\alpha_1+\frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\alpha_2+\frac{\partial B}{\partial \alpha_3}\alpha_3 \\ \frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\gamma_1+\frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\gamma_2+\frac{\partial B}{\partial \gamma_3}\gamma_3 & \frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\gamma_1+\frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\gamma_2+\frac{\partial B}{\partial \alpha_3}\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist der partielle Differentialquotient des Products $MN=C$ zweier Determinanten

$$M=\begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_3} \\ \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_3} \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad N=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix},$$

nach $c_\varkappa^\lambda = m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3$ genommen. Sie läfst sich also nach der Gleichung (2.) in die Summe von Producten der Differentialquotienten der Factoren wie folgt zerlegen:

$$\frac{\partial M}{\partial m_1}\frac{\partial N}{\partial n_1}+\frac{\partial M}{\partial m_2}\frac{\partial N}{\partial n_2}+\frac{\partial M}{\partial m_3}\frac{\partial N}{\partial n_3}.$$

Um M eine bequeme Form zu geben, bemerke man, dafs

$$M.\frac{\partial B}{\partial \beta} = \begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_3} \\ \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_3} \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}$$

ist. Bringt man dieses Product *zweier* Determinanten auf die bekannte Weise auf die Form *einer* Determinante und bemerkt dabei, dafs

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1}u_{11}+\frac{\partial B}{\partial \gamma_2}u_{12}+\frac{\partial B}{\partial \gamma_3}u_{13}+\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_1 &= 0, \\ \frac{\partial B}{\partial \gamma_1}u_{21}+\frac{\partial B}{\partial \gamma_2}u_{22}+\frac{\partial B}{\partial \gamma_3}u_{23}+\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_2 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial B}{\partial \alpha_1}u_{11}+\frac{\partial B}{\partial \alpha_2}u_{12}+\frac{\partial B}{\partial \alpha_2}u_{13}+\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_1 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

so stellt sich das Product $M\frac{\partial B}{\partial \beta}$ wie folgt dar:

$$M.\frac{\partial B}{\partial \beta} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_1 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_2 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_3 \\ -\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_1 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_2 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_3 \\ u_{11}m_1+u_{12}m_2+u_{13}m_3 & u_{21}m_1+u_{22}m_2+u_{23}m_3 & u_{31}m_1+u_{32}m_2+u_{33}m_3 \end{vmatrix}$$

und mit Weglassung des gleichen Factors $\frac{\partial B}{\partial \beta}$ auf beiden Seiten der Gleichung erhält man:

$$M = \frac{\partial B}{\partial \beta}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ u_{11}m_1+u_{12}m_2+u_{13}m_3 & u_{21}m_1+u_{22}m_2+u_{23}m_3 & u_{31}m_1+u_{32}m_2+u_{33}m_3 \end{vmatrix}.$$

Setzt man nun:

$$P = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ u_{11}m_1+u_{12}m_2+u_{13}m_3 & u_{21}m_1+u_{22}m_2+u_{23}m_3 & u_{31}m_1+u_{32}m_2+u_{33}m_3 \end{vmatrix},$$

so wird:

$$M = \frac{\partial B}{\partial \beta}.P$$

und wenn man diesen Werth von M in den obigen Ausdruck substituirt, so geht derselbe in

$$\frac{\partial B}{\partial \beta}\left\{\frac{\partial P}{\partial m_1}\frac{\partial N}{\partial n_1}+\frac{\partial P}{\partial m_2}\frac{\partial N}{\partial n_2}+\frac{\partial P}{\partial m_3}\frac{\partial N}{\partial n_3}\right\}$$

über. Dieses Product ist also gleich der betrachteten Determinante, oder es ist:

$$(6.)\quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}.U = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \gamma_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \end{vmatrix},$$

wo U die Bedeutung

$$U = \left\{\frac{\partial P}{\partial m_1}\frac{\partial N}{\partial n_1}+\frac{\partial P}{\partial m_2}\frac{\partial N}{\partial n_2}+\frac{\partial P}{\partial m_3}\frac{\partial N}{\partial n_3}\right.$$

hat. Setzt man in diesen Ausdruck von U die angegebenen Werthe von P und N, so findet sich

$$(7.)\quad U = u_{11}(\alpha_2\gamma_3-\alpha_3\gamma_2)^2+u_{22}(\alpha_3\gamma_1-\alpha_1\gamma_3)^2+u_{33}(\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1)^2$$
$$+(u_{23}+u_{32})(\alpha_3\gamma_1-\alpha_1\gamma_3)(\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1)+(u_{31}+u_{13})(\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1)(\alpha_2\gamma_3-\alpha_3\gamma_2)$$
$$+(u_{12}+u_{21})(\alpha_2\gamma_3-\alpha_3\gamma_2)(\alpha_3\gamma_1-\alpha_1\gamma_3).$$

§. 5.

Es bezeichne B die Determinante:

$$B = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \beta \end{vmatrix},$$

in welcher wie oben $u_{\varkappa\lambda} = u_{\lambda\varkappa}$ angenommen werden soll.

Der der Determinante $ac - b^2$ analog gebildete Ausdruck

$$\left(\frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\alpha_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\alpha_2 + \cdots \frac{\partial B}{\partial \gamma_4}\alpha_4\right)\left(\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\gamma_2 + \cdots \frac{\partial B}{\partial \alpha_4}\gamma_4\right)$$
$$-\left(\frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\gamma_2 + \cdots \frac{\partial B}{\partial \gamma_4}\gamma_4\right)^2$$

läfst sich als eine Determinante wie folgt darstellen:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\alpha_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\alpha_2 + \cdots & \frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\alpha_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\alpha_2 + \cdots \\ \frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\gamma_2 + \cdots & \frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\gamma_2 + \cdots \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante läfst sich wieder als der zweite Differentialquotient des Products zweier Determinanten

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_3} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_4} \\ \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_4} \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{vmatrix}, \qquad N = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 \end{vmatrix},$$

nach den Elementen

$$c_\varkappa^\lambda = m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3 + m_4\mu_4,$$
$$c_\mu^\nu = n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + n_3\nu_3 + n_4\nu_4$$

genommen, betrachten. Es läfst sich also diese Determinante nach der Gleichung (3.) in folgende Summe von Producten zerlegen:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma \frac{\partial^2 M}{\partial m_p \partial n_q} \cdot \frac{\partial^2 N}{\partial \mu_p \partial \nu_q}.$$

Um die Determinante M zu transformiren, bilde man das Product:

$$M.\frac{\partial B}{\partial\beta} = \begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial\gamma_1} & \frac{\partial B}{\partial\gamma_2} & \frac{\partial B}{\partial\gamma_3} & \frac{\partial B}{\partial\gamma_4} \\ \frac{\partial B}{\partial\alpha_1} & \frac{\partial B}{\partial\alpha_2} & \frac{\partial B}{\partial\alpha_3} & \frac{\partial B}{\partial\alpha_4} \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix}.$$

Drückt man dieses Product zweier Determinanten als eine Determinante aus und berücksichtiget, dafs

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial\gamma_1}u_{11}+\frac{\partial B}{\partial\gamma_2}u_{12}+\frac{\partial B}{\partial\gamma_3}u_{13}+\frac{\partial B}{\partial\gamma_4}u_{14}+\frac{\partial B}{\partial\beta}\alpha_1 &= 0, \\ \frac{\partial B}{\partial\gamma_1}u_{21}+\frac{\partial B}{\partial\gamma_2}u_{22}+\frac{\partial B}{\partial\gamma_3}u_{23}+\frac{\partial B}{\partial\gamma_4}u_{24}+\frac{\partial B}{\partial\beta}\alpha_2 &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial B}{\partial\alpha_1}u_{11}+\frac{\partial B}{\partial\alpha_2}u_{12}+\frac{\partial B}{\partial\alpha_3}u_{13}+\frac{\partial B}{\partial\alpha_4}u_{14}+\frac{\partial B}{\partial\beta}\gamma_1 &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

so erhält man

$$M.\frac{\partial B}{\partial\beta}$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{\partial B}{\partial\beta}\alpha_1 & -\frac{\partial B}{\partial\beta}\alpha_2 & -\frac{\partial B}{\partial\beta}\alpha_3 & -\frac{\partial B}{\partial\beta}\alpha_4 \\ -\frac{\partial B}{\partial\beta}\gamma_1 & -\frac{\partial B}{\partial\beta}\gamma_2 & -\frac{\partial B}{\partial\beta}\gamma_3 & -\frac{\partial B}{\partial\beta}\gamma_4 \\ u_{11}m_1+u_{12}m_2+\cdots & u_{21}m_1+u_{22}m_2+\cdots & u_{31}m_1+u_{32}m_2+\cdots & u_{41}m_1+u_{42}m_2+\cdots \\ u_{11}n_1+u_{12}n_2+\cdots & u_{21}n_1+u_{22}n_2+\cdots & u_{31}n_1+u_{32}n_2+\cdots & u_{41}n_1+u_{42}n_2+\cdots \end{vmatrix}.$$

Setzt man daher der Kürze wegen:

$$P = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ u_{11}m_1+u_{12}m_2+\cdots & u_{21}m_1+u_{22}m_2+\cdots & u_{31}m_1+u_{32}m_2+\cdots & u_{41}m_1+u_{42}m_2+\cdots \\ u_{11}n_1+u_{12}n_2+\cdots & u_{21}n_1+u_{22}n_2+\cdots & u_{31}n_1+u_{32}n_2+\cdots & u_{41}n_1+u_{42}n_2+\cdots \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich

$$M = P.\frac{\partial B}{\partial\beta}.$$

Die für die betrachtete Determinante gefundene Summe geht nun, wenn man den oben angegebenen Werth von M substituirt, in

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial \beta} \,\Sigma \frac{\partial^2 P}{\partial m_p \partial n_q} \cdot \frac{\partial^2 N}{\partial \mu_p \partial \nu_q}$$

über. Setzt man endlich diese Summe gleich der betrachteten Determinante, so erhält man die identische Gleichung:

$$(8.)\quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix} . U$$

$$= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \gamma_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \gamma_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \gamma_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 \end{vmatrix}^2,$$

in welcher U die Summe

$$U = \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{\partial^2 P}{\partial m_p \partial n_q} \cdot \frac{\partial^2 N}{\partial \mu_p \partial \nu_q}$$

bedeutet und p und q die Zahlen 1, 2, 3, 4 sind. Diese Summe, eine ganze homogene Function 2ten Grades, sowohl in Rücksicht auf die Gröfsen α als γ und u, läfst sich leicht berechnen. Sie hat aber zu viele Glieder, um sie berechnet hinzuschreiben.

Auf dem angegebenen Wege läfst sich auch, unter der Voraussetzung dafs $u_{\varkappa\lambda} = u_{\lambda\varkappa}$ sei, die allgemeine Gleichung:

$$(9.)\quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} . U$$

$$= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} & \gamma_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} & \gamma_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} & \alpha_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n & 0 \end{vmatrix}^2$$

ableiten, wo U eine ganze homogene Function 2ten Grades sowohl in Rücksicht auf die Gröfsen α als auf β und vom $n-2$ten Grade in Rücksicht auf die Gröfsen u ist.

§. 6.

Jede *symmetrische* Determinante:

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix},$$

das heifst jede Determinante, in welcher $u_{\varkappa\lambda} = u_{\lambda\varkappa}$ ist, läfst sich durch Multiplication mit dem Quadrat einer beliebigen andern Determinante wieder auf eine *symmetrische* Determinante bringen. In der That multiplicirt man die angegebene Determinante mit folgender:

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & \dots & x_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

und setzt, zur Abkürzung

$$2F(x_1 x_2 \dots x_n) = u_{11} x_1 x_1 + u_{22} x_2 x_2 + \cdots 2u_{12} x_1 x_2 + \cdots,$$

so erhält man die Determinante:

$$\begin{vmatrix} F'(x_1') & F'(x_2') & \dots & F'(x_n') \\ F'(x_1'') & F'(x_2'') & \dots & F'(x_n'') \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F'(x_1^n) & F'(x_2^n) & \dots & F'(x_n^n) \end{vmatrix},$$

in welcher $F'(x_p^q)$ den partiellen Differentialquotienten von $F(x_1 x_2 \dots x_n)$ nach x_p bedeutet mit den Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$, welchen der obere Index q zugetheilt ist. Multiplicirt man diese Determinante nochmals mit der vorhergehenden und setzt:

$$F_{pq} = x_1^p F'(x_1^q) + x_2^p F'(x_2^q) + \cdots x_n^p F'(x_n^q),$$

so erhält man:

$$(10.)\quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & \dots & x_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}.$$

Da aber $F_{pq} = F_{qp}$ ist, so ist die letzte Determinante wieder *symmetrisch*.

Auf dieselbe Art läfst sich die identische Gleichung:

$$(11.)\quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} & \alpha_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_n & 0 \\ x''_1 & x''_2 & \dots & x''_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n_1 & x^n_2 & \dots & x^n_n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} & A_1 \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} & A_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} & A_n \\ C_1 & C_2 & \dots & C_n & 0 \end{vmatrix}$$

beweisen, wo $A_\varkappa$ und $B_\varkappa$ die Bedeutung

$$A_\varkappa = x^\varkappa_1\alpha_1 + x^\varkappa_2\alpha_2 + \cdots x^\varkappa_n\alpha_n,$$
$$C_\varkappa = x^\varkappa_1\gamma_1 + x^\varkappa_2\gamma_2 + \cdots x^\varkappa_n\gamma_n$$

haben.

§. 7.

Aus der identischen Gleichung (9.) von der Form:

$$(12.)\quad \varDelta . U = ac - b^2$$

lassen sich für die *Geometrie* wichtige Resultate ziehen. Wenn man nämlich die Gröfsen $u_{\varkappa\lambda}$ lineäre Ausdrücke zweier Variabeln sein läfst, so stellen die Gleichungen:

$$\varDelta = 0, \quad U = 0, \quad a = 0, \quad c = 0, \quad b = 0$$

ebene *Curven* respective von der $n$ten, $n-2$ten und die drei letzten Gleichungen Curven von der $n-1$ten Ordnung dar, welche zu einander in merkwürdiger Beziehung stehen. Denn da, wie aus der Gleichung (12.) erhellet, b^2 verschwindet, wenn $\varDelta$ und a verschwinden, so geht die Curve $b^2 = 0$ durch die $n(n-1)$ Schnittpuncte der Curven $\varDelta = 0$ und $a = 0$ hindurch. Die Gleichung $b = 0$ hat, weil sie von der $n-1$ten Ordnung ist, $\frac{1}{2}n(n+1)$ Constanten. Wendet man von denselben $\frac{1}{2}n(n-1)$ Constanten dazu an, die Curve $b = 0$ durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ Schnittpuncte der Curven $\varDelta = 0$ und $a = 0$ hindurchgehen zu lassen, so bleiben noch n unbestimmte Constanten übrig. In der That enthält die Gleichung $b = 0$ noch n willkürliche Constanten γ, welche weder in $\varDelta$ noch in a vorkommen. Daher kann die Curve $b = 0$ nicht durch alle $n(n-1)$ Schnittpuncte der Curven $\varDelta = 0$ und $a = 0$ hindurchgehen, sondern nur durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ dieser Schnittpuncte. Wenn nun die Curve $b^2 = 0$ dennoch durch alle $n(n-1)$ Schnittpuncte gehen soll, so ist dies nicht anders möglich, als dafs von den $n(n-1)$ Schnittpuncten je zwei in einen zusammenfallen. Die Curve $\varDelta = 0$ wird also in $\frac{1}{2}n(n-1)$ verschiedenen Puncten von der Curve $a = 0$ *berührt.* Dieselbe Curve wird ebenso auch von der Curve $c=0$ *berührt.* Die Curve $b=0$ geht endlich durch alle diese $n(n-1)$ Berührungspuncte hindurch.

Ebenso zeigt sich, dafs die Curve $U=0$ von jeder der Curven $a=0$ und $c=0$ in $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ verschiedenen Puncten berührt wird, durch welche die Curve $b=0$ hindurchgeht.

Die Gleichung $a=0$, mit den n willkürlichen Constanten α, stellt ein ganzes System Curven $n-1$ter Ordnung vor, deren jede die Curve $n$ter Ordnung $\varDelta=0$ in $\frac{1}{2}n(n-1)$ verschiedenen Puncten berührt. Von diesen Berührungspuncten können $n-1$ Puncte auf der Curve $\varDelta=0$ beliebig angenommen werden, während die übrigen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Berührungspuncte durch die angenommenen bestimmt werden. In der That, da die Gleichung $a=0$ n willkürliche Constanten α in lineärer Weise enthält, von denen eine durch Division zur Einheit gemacht werden kann, so lassen sich die übrigen $n-1$ Constanten so bestimmen, dafs die Curve $a=0$ durch $n-1$ auf der Curve $\varDelta=0$ beliebig angenommene Puncte hindurchgeht.

Um die obigen Bemerkungen über die Curve $\varDelta=0$ auf alle Curven $n$ter Ordnung ausdehnen zu können, ist noch nachzuweisen, dafs sich die Gleichung einer beliebigen Curve $v=0$, $n$ter Ordnung, immer auf die Form $\varDelta=0$ bringen lasse. Dieses ist in der That immer möglich, weil die Zahl der Constanten in der Determinante $\varDelta$ gröfser ist als die Zahl der Glieder in v. Da nämlich die symmetrische Determinante $\varDelta$ aus $\frac{1}{2}n(n+1)$ verschiedenen Elementen besteht, von denen jedes drei Constanten enthält, so wird $\varDelta$ im Ganzen $\frac{3}{2}n(n+1)$ Constanten enthalten, während v nur $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Glieder hat.

Diese Bemerkungen lassen sich in folgendem Lehrsatze zusammenfassen:

Durch $n-1$, beliebig auf einer gegebenen Curve $n$ter Ordnung angenommene Puncte läfst sich immer eine Curve a $n-1$ter Ordnung hindurchlegen, welche die gegebene Curve in den genannten $n-1$ Puncten und in noch $\frac{1}{2}(n-1).(n-2)$ andern durch die ersteren bestimmten Puncte berührt. Legt man durch alle diese $\frac{1}{2}n(n-1)$ Berührungspuncte eine beliebige andere Curve b von der $n-1$ten Ordnung hindurch, so schneidet dieselben die gegebene Curve in noch $\frac{1}{2}n(n-1)$ Puncten, in welchen ebenfalls eine Curve c von der $n-1$ten Ordnung die gegebene Curve berührt.

(Dieser Lehrsatz ist hier nur für den Fall bewiesen, wenn die Gleichung der Berührungscurve a sich auf die Form der oben angegebenen

Gleichung $a=0$ zurückführen läfst. Schon bei den Curven 4ter Ordnung treten auch Berührungscurven auf, bei welcher das letztere nicht angeht. Diese Curven verlangen eine andere Behandlung.)

Mit der Curve b variirt zugleich auch die Berührungscurve c. Aus der letzteren geht also, wenn man b um die Berührungspuncte von a variiren läfst, ein ganzes System die gegebene Curve berührender Curven hervor, deren je zwei die gegebene Curve in solchen Puncten berühren, durch welche sich eine Curve $n-1$ter Ordnung hindurchlegen läfst. Diese letztere Eigenschaft dient als Criterium, ob zwei beliebige Berührungscurven demselben Systeme oder verschiedenen Systemen angehören.

Offenbar wird eine gegebene Curve $v=0$ $n$ter Ordnung so viele verschiedene Systeme Berührungscurven haben, als oft sich der Ausdruck v auf die Form einer *symmetrischen* Determinante Δ bringen läfst. Hiernach scheint es, dafs unendlich viele Systeme von Berührungscurven der gegebenen Curve $v=0$ existiren. Denn hat man v auf die Form einer symmetrischen Determinante gebracht, so kann man letztere, wie es die Gleichung (10.) beweiset, durch Multiplication mit dem Quadrate einer beliebigen Determinante, wieder auf eine symmetrische Determinante bringen. Dem ist aber nicht so. Die Gleichungen der Berührungscurven, welche sich aus den beiden Determinanten ergeben, sind, wie die Gleichung (11.) zeigt, nur durch einen constanten Factor von einander verschieden. Man darf daher eine symmetrische Determinante Δ, die durch Multiplication einer anderen symmetrischen Determinante mit dem Quadrat einer Determinante hervorgegangen ist, nicht als eine davon verschiedene betrachten.

In diesem Sinne läfst sich, wenn $v=0$ einen *Kegelschnitt* darstellt, v *nur auf eine Art* auf die Form einer symmetrischen Determinante bringen. *Daher hat ein Kegelschnitt nur ein einziges System Tangenten.*

Wenn $v=0$ die Gleichung einer Curve *dritter* Ordnung ist, so läfst sich v auf drei verschiedene Arten auf die Form einer symmetrischen Determinante bringen, d. h. es giebt, wie ich im 36ten Bande dieses Journals S. 143 auseinandergesetzt habe, drei verschiedene homogene Functionen dritter Ordnung, deren Determinanten jede gleich einer gegebenen homogenen Function 3ter Ordnung ist. Daraus folgt der (Bd. 36, S. 166) bewiesene Lehrsatz: *Eine Curve dritter Ordnung hat 3 Systeme Berührungskegelschnitte.*

§. 8.

Es ist mir der Beweis gelungen, dafs sich eine gegebene Function zweier Variabeln 4ten Grades auf 36 verschiedene Arten auf die Form einer symmetrischen Determinante Δ zurückführen läfst. Hieraus ziehe ich den Schlufs:

Dafs eine gegebene Curve 4ter Ordnung 36 Systeme Berührungscurven 3ter Ordnung hat, welche die gegebene Curve 4ter Ordnung in 6 verschiedenen Puncten berühren.

Von diesen 6 Berührungspuncten können 3 Puncte willkürlich auf der gegebenen Curve 4ter Ordnung angenommen werden. Die drei andern sind durch die ersteren bestimmt und zwar auf 36 verschiedene Arten.

Aus dem obigen allgemeinen Satze folgt für die Curven 4ter Ordnung:

Dafs, wenn man durch die 6 Berührungspuncte einer Berührungscurve 3ter Ordnung und einer gegebenen Curve 4ter Ordnung eine beliebige Curve 3ter Ordnung hindurchlegt, dieselbe die gegebene Curve in noch 6 Puncten schneidet, in welcher eine andere, demselben Systeme angehörige Berührungscurve die gegebene Curve 4ter Ordnung berührt.

Da die Gleichung $a=0$ der Berührungscurve in dem vorliegenden Falle, wo $n=4$ ist, 4 willkürliche Constanten α hat, von denen eine durch Division der Einheit gleich gemacht werden kann, so zeigt sich, dafs die drei andern sich so bestimmen lassen, dafs a in drei lineäre Factoren zerfällt. Ich habe gefunden, dafs diese Bestimmung auf 56 Arten möglich ist und dafs sie durch Auflösung einer Gleichung 8ten Grades erreicht wird. Setzt man die lineären Factoren von a einzeln gleich 0, so hat man die Gleichungen von Doppeltangenten der gegebenen Curve 4ter Ordnung. Man sieht hieraus, dafs auf diese Weise jede Doppeltangente 6 mal sich ergiebt, da die Curve 4ter Ordnung bekanntlich 28 Doppeltangenten hat.

Wenn in der identischen Gleichung (2.), in welcher, $n=4$ angenommen, ..., a dreien Doppeltangenten entspricht, c ebenfalls dreien anderen Doppeltangenten der gegebenen Curve 4ter Ordnung entspricht, so hat man eine Curve $b=0$ dritter Ordnung, welche durch die Berührungspuncte jener 6 Doppeltangenten hindurchgeht. Solcher Curven dritter Ordnung, $b=0$, finde ich, unter der Voraussetzung, dafs unter den 6 Doppeltangenten nicht drei sind, deren Berührungspuncte in einem Kegelschnitt liegen, der einen Determinante Δ entsprechend, 280. Da aber der gegebenen Curve 4ter Ordnung 36 verschiedene Determinanten Δ entsprechen, so erhält man 280.36 solcher Curven dritter Ordnung. Von diesen Curven 3ter Ordnung ist indefs jede 10 mal gezählt, weil die genannten 6 Doppeltangenten sich auf 10 verschiedene Arten in zwei Gruppen zu dreien vertheilen lassen.

Demnach bietet eine Curve 4ter Ordnung 1008 verschiedene Curven dritter Ordnung dar, von denen jede durch solche 6 Paare Berührungspuncte von 6 Doppeltangenten hindurchgeht, von welchen nicht drei Paare gefunden werden können, welche in einem Kegelschnitte liegen.

Die genauere Bezeichnung der 6 Doppeltangenten in diesem Lehrsatze ist wesentlich, weil es auch *solche* 6 Doppeltangenten giebt, durch deren Berührungspuncte sich zwei Kegelschnitte legen lassen; und zugleich eine Curve 3ter Ordnung, von welcher in dem folgenden Paragraphen die Rede sein wird.

§. 9.

Die Curven dritter Ordnung $a=0$, welche eine gegebene Curve 4ter Ordnung in 6 verschiedenen Puncten berühren und von welchen der vorhergehende Paragraph handelte, haben die Eigenschaft, die Curve 4ter Ordnung in 6 Puncten zu berühren, welche nicht in einem Kegelschnitt liegen.

Es giebt aber aufser den genannten 36 Systemen Berührungscurven dritter Ordnung noch 28 andere Systeme Berührungscurven dritter Ordnung, von welchen jede Curve die gegebene Curve 4ter Ordnung in 6 Puncten berührt, welche in einem Kegelschnitt liegen.

Zu diesen Curven gelangt man durch die Betrachtung der identischen Gleichung (5.), welche, wenn man $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\gamma_1=1$, $\gamma_2=m$ setzt, in

$$(13.)\qquad \Delta = ac-b^2$$

übergeht. In dieser Gleichung ist:

$$\Delta = u_{11}u_{12}-u_{12}^2,\qquad -a=u_{11},\qquad -b=u_{12}-u_{11}m,$$
$$-c=u_{22}-2u_{12}m+u_{11}m^2.$$

Nimmt man nun an, dafs u_{11}, u_{12}, u_{22} gegebene Ausdrücke zweier Coordinaten bedeuten, respective von der 1ten, 2ten und 3ten Ordnung, und läfst m einen veränderlichen lineären Ausdruck jener Coordinaten vorstellen, so hat man folgende Gleichungen von Curven 1ter, 2ter, 3ter und 4ter Ordnung:

$$a=0,\quad b=0,\quad c=0,\quad \Delta=0,$$

welche auf eine merkwürdige Weise mit einander verbunden sind. Die erste dieser Curven a ist, wie aus der identischen Gleichung (13.) zu ersehen, eine Doppeltangente der Curve *4ter Ordnung* Δ. Die zweite b ist ein *Kegelschnitt*, welcher durch die Berührungspuncte der Doppeltangente hindurchgeht, und die dritte c ist eine Curve *dritter Ordnung*, welche die Curve Δ in den übrigen 6 Puncten berührt, in welchen der Kegelschnitt b die Curve Δ schneidet. Der Kegelschnitt b ist ein beliebiger durch die Berührungspuncte der Doppeltangente hindurchgehender Kegelschnitt, weil der Ausdruck b drei in m vorkommende Constanten enthält. Da sich nun die Gleichung jeder Curve 4ter Ordnung auf die Form $\Delta = 0$ bringen läfst, wie durch Abzählung der Constanten in der gegebenen und der transformirten Gleichung zu sehen, so läfst sich aus der identischen Gleichung (13.) folgender Lehrsatz ablesen:

Wenn man durch die Berührungspuncte der Doppeltangente einer gegebenen Curve 4ter Ordnung einen beliebigen Kegelschnitt legt, so schneidet derselbe die gegebene Curve in den 6 Puncten, in welchen eine Curve dritter Ordnung die gegebene Curve 4ter Ordnung berührt.

Von diesen 6 Berührungspuncten können 3 auf der gegebenen Curve 4ter Ordnung beliebig angenommen werden, weil sich immer ein Kegelschnitt angeben läfst, der durch die 3 auf der Curve 4ter Ordnung beliebig angenommenen Puncte und die beiden Berührungspuncte der Doppeltangente hindurchgeht. Die drei anderen Berührungspuncte werden durch die drei angenommenen bestimmt.

Die Gleichung $c = 0$, mit den drei willkürlichen Constanten des lineären Ausdruckes m, stellt ein ganzes System Berührungscurven dritter Ordnung dar, welche ein und derselben Doppeltangente der gegebenen Curve 4ter Ordnung in der Weise entsprechen, dafs die Berührungspuncte jeder Curve des Systems auf einem Kegelschnitt liegen, der durch die Berührungspuncte der Doppeltangente hindurchgeht.

Die gegebene Curve 4ter Ordnung hat 28 Doppeltangenten. Daher wird die Gleichung der gegebenen Curve 28 mal auf die Form $\Delta = 0$ gebracht werden können und jeder dieser Formen wird ein System Berührungscurven von der bezeichneten Art entsprechen. Jedes dieser 28 Systeme Berührungscurven enthält also eine Berührungscurve, welche die gegebene Curve 4ter Ordnung in drei gegebenen Puncten berührt.

Durch Veränderung von m in m' geht b in b' und c in c' über, wodurch man aus (13.)

$$(14.)\quad \Delta = ac' - b'^2$$

erhält. Zieht man diese Gleichung von der vorhergehenden ab, so findet sich die identische Gleichung

$$0 = a(c-c') - (b+b')(b-b'),$$

aus welcher zu sehen ist, dafs a ein Factor von $b+b'$ oder von $b-b'$ sein mufs. Da es gleichgültig ist, welche von diesen Gröfsen das Product von a und einem anderen linearen Factor A ist, so kann man

$$(15.)\quad b-b' = aA$$

setzen und erhält, mit Berücksichtigung dieser Gleichung, aus der vorhergehenden:

$$0 = (c-c') - A(b+b'),$$

welche identische Gleichung ausdrückt, dafs zwei Berührungscurven dritter Ordnung c und c' desselben Systems sich in 9 Puncten schneiden, von denen 6 in einem Kegelschnitt und die 3 andern in einer geraden Linie liegen.

Bezeichnet man den Ausdruck dritter Ordnung $c-Ab$ durch d, so erhält man nach der letzten identischen Gleichung:

$$(16.)\quad d = c-Ab = c'+Ab',$$

woraus

$$(c-Ab)(c'+Ab') = d^2$$

folgt, und hieraus wird

$$cc'-d^2 = A(bc'-b'c+Abb').$$

Der Theil dieser Gleichung rechts ist aber gleich ΔA^2, wie leicht zu sehen, wenn man die mit b multiplicirte Gleichung (14.) von der mit b' multiplicirten Gleichung (13.) abzieht und die Gleichung (15.) zu Hülfe nimmt. Demnach haben wir die identische Gleichung

$$(17.)\quad \Delta A^2 = cc'-d^2.$$

Diese Gleichung beweiset, dafs die 12 Berührungspuncte der beiden Berührungscurven $c=0$ und $c'=0$ desselben Systemes wieder auf einer Curve dritter Ordnung $d=0$ liegen. Da d, wie aus (16.) zu sehen, drei willkürliche in m' vorkommende Constanten behält, wenn man c und b als gegeben annimmt, so läfst sich sagen, dafs die Gleichung $d=0$ jede durch die Berührungspuncte der Curven $\Delta=0$ und $c=0$ gelegte Curve dritter Ordnung darstellt. Der vorhin ausgesprochene Lehrsatz läfst sich demnach wie folgt erweitern:

Wenn man durch die Berührungspuncte einer Doppeltangente einer gegebenen Curve 4ter Ordnung einen Kegelschnitt legt, so *schneidet derselbe die Curve in noch 6 Puncten, in welchen eine Curve dritter Ordnung die gegebene Curve berührt. Legt man durch diese 6 Berührungspuncte eine beliebige Curve dritter Ordnung hindurch, so schneidet dieselbe die gegebene Curve 4ter Ordnung in noch 6 Puncten, in welchen wiederum eine Curve dritter Ordnung, aus demselben Systeme, die gegebene Curve 4ter Ordnung berührt.* Zwei Berührungscurven gehören demnach demselben Systeme an, wenn sich durch die 12 Berührungspuncte derselben mit der gegebenen Curve vierter Ordnung eine Curve dritter Ordnung hindurchlegen läfst.

Die drei in c vorkommenden unbestimmten Constanten lassen sich auf 45 verschiedene Arten so bestimmen, dafs c in drei lineäre Factoren zerfällt. Jeder dieser Factoren gleich 0 gesetzt, drückt analytisch eine von den Doppeltangenten der gegebenen Curve 4ter Ordnung aus, mit Ausschlufs der Doppeltangente a. Demnach erhält man jede der 27 andern Doppeltangenten auf diese Weise 5 mal.

Wenn in der identischen Gleichung (17.) c dreien Doppeltangenten entspricht und c' ebenfalls dreien andern Doppeltangenten, so hat man eine Curve $d=0$ dritter Ordnung, welche durch die 12 Berührungspuncte jener 6 Doppeltangenten hindurchgeht. Wir wollen nun untersuchen, wieviele solcher Curven d dritter Ordnung eine gegebene Curve 4ter Ordnung darbietet.

Nimmt man zu diesem Ende aus den 45 genannten Gruppen Doppeltangenten eine Gruppe c heraus, so läfst sich dieselbe nicht mit jeder der übrigen 44 Gruppen c' combiniren, weil unter diesen 4 Gruppen c' enthalten sind, welche die erste in c vorkommende Doppeltangente involviren. Ebenso werden 4 andere Gruppen c' die zweite Doppeltangente in c und noch 4 andere die dritte Doppeltangente in c enthalten. Mit diesen 12 Gruppen wird c nicht zu combiniren sein. Man wird also c nur mit 32 Gruppen c' zu combiniren haben, und jeder dieser Combinationen wird eine andere Curve d entsprechen. Da aber 45 Gruppen c existiren, so ist die doppelte Zahl der gesuchten Combinationen $= 32.45$. Mithin ist die Zahl der verschiedenen Curven d, welche der einen Doppeltangente a entsprechen, $= 720$. Die Zahl sämmtlicher Curven $d=0$, welche die Curve 4ter Ordnung aufzuweisen hat, ist mithin $720.28 = 20160$, weil die Curve 4ter Ordnung 28 Dopeltangenten hat. Jede Curve d ist hier aber vier mal gezählt, weil sie nicht einer einzigen Doppeltangente a entspricht, sondern vieren. Deshalb mufs jene Zahl noch durch 4 dividirt werden. Man kann also sagen:

Eine gegebene Curve vierter Ordnung hat 5040 verschiedene Curven dritter Ordnung aufzuweisen, von denen jede durch solche 6 Paare Berührungspuncte von 6 Doppeltangenten hindurchgeht, von denen 3 Paare auf einem Kegelschnitt liegen und die 3 anderen auf einem anderen Kegelschnitt.

§. 10.

Aus der identischen Gleichung (5.) von der Form:

$$\Delta U = ac - b^2$$

lassen sich, in dem Falle, wenn u_{11}, u_{12}, u_{22} Functionen 2ten Grades von zwei Coordinaten bedeuten, für die Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$, auf welche Form sich die Gleichung jeder Curve 4ter Ordnung zurückführen läfst, andere wichtige Resultate ziehen.

Es wird leicht zu sehen sein, dafs die Gleichung $a = 0$, mit den beiden willkürlichen Constanten α_1, α_2, welche nur die Stelle von einer Constanten vertreten, wenn man diese Constante variiren läfst, ein ganzes System von Kegelschnitten repräsentirt, deren jeder die gegebene Curve Δ in 4 verschiedenen Puncten berührt. Von diesen 4 Berührungspuncten läfst sich nun ein Berührungspunct willkürlich auf der gegebenen Curve annehmen, weil die Gleichung $a = 0$ nur eine willkürliche Constante enthält. Die drei andern sind durch diesen einen für das in Rede stehende System Berührungskegelschnitte bestimmt. Ich werde später zeigen, *dafs eine gegebene Curve 4ter Ordnung 63 Systeme Berührungskegelschnitte hat.* Dieses vorausgesetzt, folgt, dafs sich ein gegebener Ausdruck 4ter Ordnung von zwei Variabeln 63 mal auf die Form Δ zurückführen läfst. Jedes dieser Systeme enthält einen Berührungskegelschnitt, welcher die gegebene Curve in einem gegebenen Puncte berührt, so dafs es also 63 verschiedene Berührungskegelschnitte giebt, welche die gegebene Curve in einem gegebenen Puncte berührt.

Durch die 8 Berührungspuncte zweier Berührungskegelschnitte $a = 0$ und $c = 0$ geht wieder ein Kegelschnitt $b = 0$ hindurch. Betrachtet man den ersten Kegelschnitt als gegeben, den zweiten als variabel, so variirt auch der dritte, indem er immer durch die Berührungspuncte des ersten Kegelschnittes hindurchgeht. Dieses giebt folgenden Lehrsatz:

Wenn man durch die 4 Berührungspuncte eines Berührungskegelschnitts einer gegebenen Curve 4ter Ordnung einen anderen Kegelschnitt legt, so schneidet derselbe die gegebene Curve 4ter Ord-

nung in noch 4 Puncten, in welchen ein zweiter, demselben Systeme zugehöriger Kegelschnitt die gegebene Curve 4ter Ordnung berührt.

Es ist noch hinzuzufügen, dafs zwei Berührungskegelschnitte einem und demselben Systeme angehören, wenn sich durch die 8 Berührungspuncte ein Kegelschnitt hindurchlegen läfst.

Unter den Berührungskegelschnitten $a=0$ giebt es auch Linienpaare, welche zugleich Doppeltangentenpaare der gegebenen Curve 4ter Ordnung sind. In der That: da die Gleichung $a=0$ eine willkürliche Constante enthält, so läfst sich dieselbe immer so bestimmen, dafs sie der Bedingungsgleichung genügt, welche erfüllt werden mufs, wenn a in lineäre Factoren zerfallen soll. Diese Factoren einzeln gleich 0 gesetzt, werden Doppeltangenten der gegebenen Curve 4ter Ordnung darstellen. Erwägt man aber, dafs die genannte Bedingungsgleichung vom dritten Grade ist, in Rücksicht auf die Coëfficienten in a, und dafs die Coëfficienten selber quadratische Ausdrücke der willkürlichen Constante sind, so sieht man, dafs die Bedingungsgleichung in Rücksicht auf die zu bestimmende Constante zu einer Gleichung 6ten Grades wird. Demnach enthält jedes System Berührungskegelschnitte 6 Paare Doppeltangenten der betrachteten Curve 4ter Ordnung. Die 28 Doppeltangenten der gegebenen Curve paaren sich aber 378 mal. Je 6 Paare gehören einem Systeme an. Es müssen also $\frac{378}{6}=63$ Systeme Berührungskegelschnitte existiren; was zu beweisen war.

Wenn zwei von den Berührungspuncten des Kegelschnitts a zusammenfallen, so berührt dieser Kegelschnitt die gegebene Curve 4ter Ordnung in diesem Puncte 4punctig, und aufserdem noch in 2 andern Puncten. Diese 4punctigen Berührungspuncte erhält man auf folgende Weise. Man betrachte die 4 Berührungspuncte des Kegelschnittes a als die Ecken eines Vierecks und construire die drei Diagonalpuncte p, in welchen sich die drei Linienpaare schneiden, welche durch die Ecken des Vierecks gelegt werden können. Diese 3 Diagonalpuncte beschreiben nun eine Curve dritter Ordnung π, wenn der Berührungskegelschnitt a variirt; und die Schnittpuncte der Curve dritter Ordnung π mit der gegebenen Curve 4ter Ordnung sind die gesuchten 4punctigen Berührungspuncte. In der That: betrachtet man a, b, c als homogene Ausdrücke der 3 Coordinaten x, y, z, wo $z=1$, so hat man, wenn x, y, z die Coordinaten des Puncts p bedeuten, die Gleichungen

$$\frac{\partial a}{\partial x}+\lambda\frac{\partial c}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial a}{\partial y}+\lambda\frac{\partial c}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial a}{\partial z}+\lambda\frac{\partial c}{\partial z} = 0,$$

durch welche auch die folgende Gleichung erfüllt wird:

$$\pi = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial z} \\ \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

welche Gleichung eben die gesuchte Curve dritter Ordnung darstellt. Wenn nun zwei der Berührungspuncte des Kegelschnitts a in einen Punct zusammenfallen, so fallen auch zwei Diagonalpuncte p in diesem Puncte zusammen und die Curve π mufs in diesem Puncte die Curve 4ter Ordnung schneiden. Man kann also sagen:

Jedes System Berührungskegelschnitte enthält 12 Kegelschnitte, welche die gegebene Curve 4ter Ordnung 4punctig berühren und diese 4punctigen Berührungspuncte liegen in einer Curve dritter Ordnung.

§. 11.

Man betrachte zwei Berührungskegelschnitte a und c desselben Systemes, von denen die erste in das Doppeltangentenpaar a' und a'' zerfällt, der zweite in das Doppeltangentenpaar c', c''. Durch die 8 Berührungspuncte dieser beiden Doppeltangentenpaare geht, wie man sahe, ein Kegelschnitt b hindurch. Das in Rede stehende System Berührungskegelschnitte bietet nur 6 Paare Doppeltangenten dar. Daher giebt es in diesem Systeme 15 Kegelschnitte b, welche durch die 8 Berührungspuncte von je 2 Paaren Doppeltangenten hindurchgehen. Die 63 Systeme enthalten also $15.63 = 945$ solcher Kegelschnitte b. Von diesen Kegelschnitten ist aber jeder drei mal gezählt worden. Denn erstens gehört der Kegelschnitt b, welcher durch die Berührungspuncte der Doppeltangenten $a'a''$, $c'c''$ hindurchgelegt ist, dem Systeme an, welches die Berührungskegelschnitte $a'a''$ und $c'c''$ enthält; zweitens dem Systeme, welches die Berührungskegelschnitte $a'c'$ und $a''c''$ enthält; endlich drittens dem Systeme, welches die Berührungskegelschnitte $a'c''$ und $a''c'$ enthält.

Demnach ist die Zahl der Kegelschnitte, welche durch 8 Berührungspuncte von 4 Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung gelegt werden können gleich $\frac{945}{3} = 315$.

(In dem vortrefflichen Werke „Treatise on the higher plane curves by *George Salmon*, M. A. Dublin 1852," in welchem der Verfasser die in dem Gebiete der höheren Curven gemachten Entdeckungen, vermehrt durch eigene Untersuchungen, vorträgt, findet man den genannten Lehrsatz S. 197 bewiesen und S. 198 die 315 Combinationen der Doppeltangenten, durch deren Berührungspuncte sich ein Kegelschnitt hindurchlegen läfst, in einer Tafel zusammengestellt. Meine Angaben werden in dieser Tafel ihre Bestätigung finden. Den Beweis derselben behalte ich mir für eine spätere Abhandlung über die Doppeltangenten der Curven 4ter Ordnung vor, welche manche andere in dieser Abhandlung ohne Beweis hingeworfenen Angaben aufklären wird. Herr *Salmon* giebt S. 199 7 Kegelschnitte an, welche durch die 56 Berührungspuncte der Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung hindurchgehen. Es sind dieses dieselben Kegelschnitte, welche mir in dem Schreiben an den Professor *Jacobi* (S. dieses Journ. Bd. 40 p. 260) vorschwebten. Bei dieser Gelegenheit will ich noch bemerken, dafs drei von den 7 Kegelschnitten auch durch 2 Curven dritter Ordnung und von den noch übrigen 4 Kegelschnitten ebenfalls 3 durch 2 Curven dritter Ordnung sich ersetzen lassen, so dafs erstens 7 Kegelschnitte durch die 56 Berührungspuncte der Doppeltangenten hindurchgehen, zweitens 4 Kegelschnitte und eine Curve dritter Ordnung, drittens 1 Kegelschnitt und 4 Curven dritter Ordnung.)

Es läfst sich auch angeben, welche Doppeltangenten die Curve 4ter Ordnung in 8 Puncten berühren, die in einem Kegelschnitt liegen. Zu diesem Zwecke bediene ich mich folgender Hülfsfigur. Durch 8 Puncte des Raumes ziehe ich die 28 geraden Linien, welche je 2 von den 8 Puncten verbinden. Jede dieser geraden Linien lasse ich einer der 28 Doppeltangenten entsprechen. Den Seiten jedes räumlichen Vierecks der Hülfsfigur entsprechen dann solche 4 Doppeltangenten, deren Berührungspuncte in einem Kegelschnitt liegen. Solcher Kegelschnitte finden sich 210. Ferner entsprechen jeden 4 geraden Linien, welche die 8 Puncte auf die Weise verbinden, dafs jede Linie durch 2 verschiedene Puncte hindurchgeht, ebenfalls 4 Doppeltangenten, deren Berührungspuncte auf einem Kegelschnitt liegen. Solcher Kegelschnitte giebt es 105. So mag es scheinen, als wenn die 315 Kegslschnitte in zwei Gruppen von 210 und 105 Kegelschnitten zerfallen, welche durch besondere Eigenschaften sich von einander unterscheiden. Dem ist aber nicht so. Es haben vielmehr die 315 Kegelschnitte für die gegebene Curve 4ter Ordnung ganz dieselbe Bedeutung.

Königsberg, im April 1853.