Werk

Titel: Auszug zweier Schreiben des Professor Jacobi an Herrn Director Hansen.

Autor: Jacobi, C.G.J.

Jahr: 1851

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0042|log5

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

2.

Auszug zweier Schreiben des Professor Jacobi an Herrn Director Hansen.

I.

Berlin, den 15. December 1850.

Erlauben Sie, dafs ich auf Ihre gütige Mittheilung des leichten und eleganten Weges, auf welchem Sie zu einer eigenthümlichen und merkwürdigen Form der Störungsgleichungen gelangen, mit einigen Betrachtungen rein formeller Art antworte. Sie sollen die ungewöhnliche Bedeutung betreffen, welche Lagrange, Sie selbst und andere bisweilen mit den Worten *Function* und *Element* und den Zeichen der *partiellen Differentialquotienten* verbinden.

Veränderliche willkürliche Constanten oder *Elemente* sind in der Theorie der Störungen gewisse Functionen der Coordinaten, ihrer ersten Differentialquotienten und der Zeit genannt worden, welche in der ungestörten elliptischen Bewegung einer willkürlichen Constante gleich werden, oder deren Differential durch die Substitution der Differentialgleichungen des ungestörten Problems identisch verschwindet. Diese Functionen haben die Eigenschaft, dafs sie in der gestörten Bewegung von wirklichen Constanten nur um kleine Gröfsen von der Ordnung der störenden Kräfte verschieden bleiben. Nennt man die Function der Coordinaten, ihrer ersten Differentialquotienten (der Componenten der Geschwindigkeit) und der Zeit, welche einem Elemente gleich ist, die *Bedeutung* dieses Elements, so kann man sagen, dafs jedes Element in der gestörten Bewegung dieselbe Bedeutung wie in der ungestörten hat.

Da die sechs Elemente denselben Functionen der drei Coordinaten, ihrer ersten Differentialquotienten und der Zeit im gestörten und ungestörten Problem gleich sind, so sind auch umgekehrt die drei Coordinaten und ihre ersten Differentialquotienten im gestörten wie im ungestörten Problem denselben Functionen der sechs Elemente und der Zeit gleich. Es folgt hieraus der bekannte Satz, der auch wohl zur Definition der veränderlichen Elemente zu dienen pflegt, dafs in den ersten Differentialen der Ausdrücke der Coordinaten durch die Elemente und die Zeit der aus der Veränderlichkeit der Elemente hervorgehende Theil verschwindet. Man erweitert diesen Satz leicht

dahin, dafs man von jeder Gleichung zwischen den Coordinaten, den Elementen und der Zeit, $u = 0$, welche gleichzeitig im gestörten wie im ungestörten Problem gilt, das erste Differential so nehmen kann, als wären die Elemente constant, und dafs in du der von der Veränderlichkeit der Elemente, so weit sie in *u explicite* vorkommen, herrührende Theil besonders verschwindet.

Keine Function der Elemente und der Zeit, welche sich nicht auf eine Function der Coordinaten und der Zeit (oder auch auf eine wirkliche Constante) reduciren läfst, kann die Eigenschaft der Coordinaten haben, dafs ihr erster Differentialquotient im gestörten Problem durch dieselbe Function der Elemente und der Zeit ausgedrückt wird, wie im ungestörten.

Aber Sie haben ja solche Functionen X und Y angegeben, welche diese Eigenschaft besitzen, und sich doch auf keine Weise auf Functionen blofs von x, y, z, t reduciren lassen. Die Antwort hierauf ist, ***dafs in Ihren Gleichungen,***

$$X = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z$$
$$Y = \beta x + \beta' y + \beta'' z,$$

die 6 Gröfsen α, β, α' etc. keine Elemente sind, und daher auch X und Y keine Functionen der Elemente und der Zeit sind. Nur die drei Coëfficienten γ, γ', γ'' sind wirkliche Elemente.

In den ähnlichen Gleichungen bei ***Lagrange*** sind die Coëfficienten α, β, α_1 etc. Elemente. Aber dafür finden bei ihm auch nicht die Gleichungen,

$$x\,d\alpha + y\,d\alpha_1 + z\,d\alpha_2 = 0$$
$$x\,d\beta + y\,d\beta_1 + z\,d\beta_2 = 0$$

Statt. Es scheint mir, dafs Sie ***Lagrange*** und Sich selbst Unrecht thun, wenn Sie ihm vorwerfen, dafs er die Gleichung,

$$\beta\,d\alpha + \beta_1\,d\alpha_1 + \beta_2\,d\alpha_2 = 0,$$

nicht hat, und nicht in weitere Entwicklungen eingegangen ist. Diese Gleichung gilt bei ihm eben so wenig, wie die beiden vorhergehenden. Das von Ihnen gewählte Coordinatensystem ist von dem seinigen auf das wesentlichste verschieden und Ihnen durchaus eigenthümlich, und darum konnte er die aus der eigenthümlichen Natur des Ihrigen fliefsenden Folgerungen nicht machen.

Ihre Xachse ist eine Linie, die in der Bahnebne keine eigene Bewegung hat, in derselben fest ist, und sich nur dadurch im Raum fortbewegt, dafs die Bahnebene um die verschiednen Radiivectoren pivotirt; während die Xachse bei ***Lagrange***

die grofse Achse der veränderlichen Ellipse ist, und ihre eigne Bewegung behält, selbst wenn die Ebene der Bahn unverändert bliebe; wie dies bei dem Problem der drei Körper in der Ebene der Fall ist. Was bei Ihnen X und Y ist, würde, in den *Lagrangeschen* Coordinaten ausgedrückt, $\cos\chi . X - \sin\chi . Y$ und $\sin\chi . X + \cos\chi . Y$ sein. Der Winkel χ ist aber kein Element in der gewöhnlichen, oben angegebnen Bedeutung. Diese Gröfse läfst sich nicht mittelst der blofsen Gleichungen des ungestörten Problems durch die Coordinaten, ihre ersten Differentialquotienten und die Zeit ausdrücken; sie hat daher nicht nur nicht dieselbe Bedeutung im gestörten wie im ungestörten Problem, sondern sie hat vielmehr in der ungestörten Bewegung gar keine Bedeutung. Nur für eine ganz individuelle Zeitbestimmung könnte man den Winkel χ eine Beziehung zu den elliptischen Elementen geben, aber dann auch wieder eine ganz beliebige.

Was soll daraus werden, möchte ich fragen, wenn man Gröfsen, wie

$$\sigma = \int \cos i \, d\vartheta,$$

eine Function der Elemente nennen will? Denn man will doch wohl nicht blofs sagen, dafs man sie ja nach Integration der Störungsgleichungen so ausdrücken kann, denn dies gälte von allen Veränderlichen überhaupt, und wäre daher durchaus nichts sagend. Will man σ eine Function von ϑ allein nennen, wie kann dann $\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}$ eine Function von i sein? Sagt man, dafs σ eine Function von ϑ und i ist, wie kann dann $\frac{\partial\sigma}{\partial i} = 0$ sein, wie doch von Ihnen und andern angesetzt wird? Nennt man

$$U = \int (A\,da + B\,db + C\,dc + \text{etc.})$$

auch dann eine Function von a, b, c etc., wenn der Differentialausdruck nicht den Bedingungen der Integrabilität genügt, so hat man Functionen, bei welchen es nicht mehr gleichgültig ist, in welcher Ordnung man differentiirt, sondern es werden im Gegentheil (ohne dafs hier ein Unendlichwerden in's Spiel kommt) die Ausdrücke

$$\frac{\partial \frac{\partial U}{\partial a}}{\partial b} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial b}}{\partial a} \,.$$

in gar keiner Beziehung zu einander stehen. So folgen aus den Gleichungen,

$$\frac{\partial\sigma}{\partial i} = 0, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta} = \cos i,$$

die beiden Gleichungen,

$$\frac{\partial \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial i}}{\partial \vartheta} = 0, \qquad \frac{\partial \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta}}{\partial i} = -\sin i.$$

Es hören hier also alle Vorstellungen auf, die man gewöhnlich mit dem Begriff einer Function und partieller Differentialquotienten verbindet.

Wenn Sie in Ihrem geehrten Schreiben sagen, man könne die Störungsfunction Ω als Function der Gröfsen X, Y, p, q betrachten, indem die Örter des Planeten durch diese vier Gröfsen vollständig bestimmt seien, so ist doch anderseits klar, dafs wenn die einer bestimmten Zeit entsprechenden numerischen Werthe von X, Y, p, q gegeben sind, man nur die Gröfse des Radiusvectors, aber nicht seine Lage im Raum kennt. Man kann daher auch nicht sagen, dafs die Gröfsen x, y, z, die den Planetenort unmittelbar bestimmen, durch die Gröfsen X, Y, p, q ersetzt werden. Man kann sich Ω als eine *Function* der Gröfsen X, Y, p, q, die in ihrer Form bestimmt wäre, was nöthig ist, wenn man sie nach diesen einzelnen Gröfsen partiell differentiiren will, gar nicht denken, wenigstens in Folge solcher Gleichungen nicht, durch welche Ω als Function dieser Gröfsen bestimmt werden soll.

Lagrange gebraucht bei einer ähnlichen uneigentlichen Ausdrucksweise doch die Vorsicht, solche Integrale, wie Ihr σ, nicht geradezu eine Function der veränderlichen willkürlichen Constanten zu nennen. Indem er zuerst S. 96 des 2ten Theils der *Mécanique Analytique*

$$d\chi = \beta\, d\alpha + \beta_1\, d\alpha_1 + \beta_2\, d\alpha_2$$

setzt, warnt er noch gewissermafsen davor, χ für eine Function der veränderlichen Elemente zu halten, indem er in Parenthese hinzufügt, „ich wende den Differentialausdruck $d\chi$ an, obgleich sein Werth kein vollständiges Differential ist"; S. 99 nennt er diesen Differentialausdruck (aber nicht χ selber) eine Function der veränderlichen Constanten; endlich nennt er auch S. 101 χ selbst ein Element, und differentiirt S. 102 Ω partiell nach χ.

Es geht aus dem Vorstehenden hervor, dafs das Zeichen $\frac{d\Omega}{d\chi}$ bei *Lagrange*, oder die Zeichen $\frac{d\Omega}{dp}$, $\frac{d\Omega}{dq}$ bei Ihnen, eine bestimmte Bedeutung haben, welche die Rechnung feststellt, ohne dafs Ω als eine Function von χ oder von p und q betrachtet werden kann. Weil demnach diese Symbole keine wirklichen Differentialquotienten sind, sondern nur conventionellen

Sinn und Bedeutung haben, so wird es gut sein, um jedes Mifsverständnifs zu vermeiden, diese Bedeutung recht deutlich hervorzuheben.

In der Form, zu der Sie schliefslich gelangen, ist Ω eine (wirkliche) Function der Gröfsen

$$X,\ Y,\ p,\ q,\ \Delta,$$

welche dadurch erhalten wird, dafs man in Ω für x, y, z die Werthe,

$$x = X\cos\Delta - Y\sin\Delta - \frac{(p\cos\Delta + q\sin\Delta)(pX-qY)}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}$$

$$y = X\sin\Delta + Y\cos\Delta - \frac{(p\sin\Delta - q\cos\Delta)(pX-qY)}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}$$

$$z = -(pX-qY)$$

setzt. Diese Function wird nach p und q partiell differentiirt, als wäre die Gröfse Δ eine Function von p und q, was sie nicht ist, indem man übereinkommt, an die Stelle der in diesem Falle vorkommenden $\frac{\partial\Delta}{\partial p}$ und $\frac{\partial\Delta}{\partial q}$ die Gröfsen,

$$\frac{q}{\{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}\}\sqrt{(1-p^2-q^2)}},\qquad \frac{-p}{\{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}\}\sqrt{(1-p^2-q^2)}},$$

zu setzen, wodurch $\frac{\partial\Omega}{\partial p}$ und $\frac{\partial\Omega}{\partial q}$ selber Symbole werden für die Gröfsen,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial p} + \frac{q}{\{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}\}\sqrt{(1-p^2-q^2)}}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\Delta},$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial q} - \frac{p}{\{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}\}\sqrt{(1-p^2-q^2)}}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\Delta}.$$

Man könnte zwar sagen, so ganz conventionell wäre diese Annahme für die Zeichen $\frac{\partial\Delta}{\partial p}$ und $\frac{\partial\Delta}{\partial q}$ nicht, weil, wenn man dieselbe Annahme in dem Differentialausdruck

$$\frac{\partial\Delta}{\partial p}dp + \frac{\partial\Delta}{\partial q}dq$$

macht, ein Werth herauskommt, welchen $d\Delta$ in dem zu integrirenden System Differentialgleichungen wirklich hat. Aber dies kann nur als die Veranlassung angesehn werden, die darauf geführt hat, eine solche Symbolik zu wählen, ohne dafs sie deshalb den Character einer blofs conventionellen verliert. Man könnte mit demselben Rechte Ω auch blofs als Function von X, Y und p betrachten,

*) indem dasselbe System Differentialgleichungen auch die Werthe,

$$dq = \frac{Y\,dp}{X}$$

$$d\Delta = \frac{(qX - pY)\,dp}{X\{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}\}\sqrt{(1-p^2-q^2)}},$$

giebt, und dann würde $\frac{\partial\Omega}{\partial p} = 0$ werden. Man mufs also genau diejenige Combination des gegebenen Systems Differentialgleichungen bezeichnen, aus welcher die Bedeutung der Symbole $\frac{\partial\Delta}{\partial p}$ und $\frac{\partial\Delta}{\partial q}$ entnommen werden soll.

Nennt man a, b, c etc. diejenigen Functionen von t, welche den veränderlichen willkürlichen Constanten gleich sind, so hat die Analysis des Störungsproblems darauf geführt, auch solche Functionen von t darin einzuführen, welche einem Integrale,

$$\int\{A\,da + B\,db + C\,dc + \text{etc.}\},$$

gleich sind, in welchem der Ausdruck unter dem Integralzeichen den Bedingungen der Integrabilität nicht genügt, und welche daher keine Functionen von a, b, c etc. sind. Diese Functionen von t haben mit den veränderlichen Constanten die Eigenschaft gemein, dafs sie von einer wirklichen Constante nur um eine kleine Gröfse von der Ordnung der störenden Kräfte verschieden sind; und wenn A, B, C etc. beliebige Functionen blofs von a, b, c etc. sind, welche nicht aufserdem noch t enthalten, so kann man ferner sagen, ***dafs sie von veränderlichen Constanten nur um Gröfsen von der zweiten Ordnung der störenden Kräfte verschieden sind.*** Dieser letztere Umstand mag wohl dazu beigetragen haben, dafs man diese Functionen von den veränderlichen Constanten selber nicht ausdrücklich genug unterschieden hat. Will man nun einen Namen für diese Functionen von t haben, so könnte man sie ***uneigentliche, falsche, Pseudo-Elemente,*** oder auch *ideale* Elemente nennen. Es frägt sich aber, ob es nicht zweckmäfsig wäre, für alle diese Functionen und für alle Functionen dieser Functionen den Namen ***Elemente*** gelten zu lassen, da ja auch schon einmal ***Lagrange*** den Winkel χ so genannt hat, dagegen sie niemals veränderliche (willkürliche) Constanten oder Functionen

*) Bis hieher ist von dem leider so früh und schnell dahingeschiedenen *Jacobi* die Correctur des von ihm im Voraus für das Journal bestimmten Manuscripts selbst besorgt worden. Die Correctur der hier folgenden Fortsetzung hat Herr Professor *Lejeune Dirichlet* mit dem Herausgeber gemeinschaftlich übernommen.

der veränderlichen Constanten zu nennen, und diese letzteren durch die Benennung *elliptische Elemente* zu unterscheiden.

Auch über die Form der Differentialgleichungen, zu welchen Sie schliefslich gelangen, scheint es nützlich, in einige Erörterungen einzugehen, um ihre besondere Natur desto deutlicher hervorzuheben. Es könnte beim ersten Anblick scheinen, als wären bei Ihnen die drei Differentialgleichungen 2ter Ordnung des Problems durch zwei Differentialgleichungen 2ter Ordnung und zwei Differentialgleichungen 1ter Ordnung ersetzt worden; was immer verstattet ist. Dem ist aber in der That nicht so. Es sind die von Ihnen aufgestellten Differentialgleichungen gar keine Differentialgleichungen zwischen den Gröfsen X, Y, p, q, denn es ist unmöglich, die rechten Seiten Ihrer Gleichungen X, Y, p, q ausgedrückt zu denken. Die von Ihnen aufgestellten Differentialgleichungen sind in der That zwei Differentialgleichungen *zweiter* und drei Differentialgleichungen *erster* Ordnung zwischen den Gröfsen

$$X,\ Y,\ p,\ q,\ \Lambda.$$

Ich will, um Ihre Formeln zu commentiren, die Gleichungen hinschreiben, wie sie in der gemeinen Bezeichnungsart aussehen würden. Ist nämlich Ω mittelst Substitution der oben für x, y, z gegebenen Werthe als Function der fünf Gröfsen X, Y, p, q, Λ ausgedrückt, so sind Ihre Differentialgleichungen, in den gewöhnlichen Zeichen geschrieben, die folgenden:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{X}{r^3} = \frac{\partial\Omega}{\partial X}$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{Y}{r^3} = \frac{\partial\Omega}{\partial Y}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\sqrt{(1-p^2-p^2)}.dt}{XdY-YdX}\left\{\sqrt{(1-p^2-q^2)}\frac{\partial\Omega}{\partial q} - \frac{p}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}\frac{\partial\Omega}{\partial\Lambda}\right\}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\sqrt{(1-p^2-\eta^2)}.dt}{XdY-YdX}\left\{\sqrt{(1-p^2-q^2)}\frac{\partial\Omega}{\partial p} + \frac{q}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}\frac{\partial\Omega}{\partial\Lambda}\right\}$$

$$d\Lambda = \frac{q\,dp - p\,dp}{1-p^2-q^2+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}.$$

Die vollständige Integration dieses Systems Differentialgleichungen führt *sieben* von einander unabhängige willkürliche Constanten mit sich, welche sich in den Ausdrücken von x, y, z auf *sechs* reduciren müssen. Damit man deutlich sehe, wie dieses geschieht, bemerke ich, dafs aus der Natur dieser Differentialgleichungen folgt, dafs, wenn man mit

$$X_1,\ Y_1,\ p_1,\ q_1,\ \Lambda_1$$

gewisse Functionen von t bezeichnet, welche nur *sechs* wilkürliche Constanten enthalten, und λ eine *siebente* von ihnen unabhängige willkürliche Constante bedeutet, die *vollständigen* Ausdrücke von X, Y, p, q, Λ folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} X &= \cos\lambda X_1 + \sin\lambda Y_1 \\ Y &= \cos\lambda Y_1 - \sin\lambda X_1 \\ p &= \cos\lambda p_1 - \sin\lambda q_1 \\ q &= \cos\lambda q_1 + \sin\lambda p_1 \\ \Lambda &= \Lambda_1 + \lambda. \end{aligned}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die oben durch X, Y, p, q, Λ ausgedrückten Werthe von x, y, z, so verwandeln sie sich in die nämlichen Functionen von X_1, Y_1, p_1, q_1, Λ_1, welche sie von X, Y, p, q, Λ waren, so dafs x, y, z Functionen von t und *sechs* willkürlichen Constanten werden, indem die *siebente* λ ganz herausgeht.

Es wird zwar insgemein angenommen, dafs man bei einem vorgelegten System Differentialgleichungen dahin trachten müsse, die Ordnung des Systems zu verringern; wie es z. B. gelungen ist, das Problem der *drei Körper,* welches ursprünglich von der Integration eines Systems Differentialgleichungen von der 18ten Ordnung abhängt, welche 18 willkürliche Constanten fordert, auf ein System Differentialgleichungen von der 6ten Ordnung zurückzuführen, dessen vollständige Integration nur sechs willkürliche Constanten fordert. Aber andrerseits hat man doch auch schon früher bisweilen kein Bedenken getragen, die Ordnung einer gegebenen Differentialgleichung absichtlich sogar zu erhöhen; z. B. wenn man sie dadurch lineär machen konnte. In dem vorliegenden Störungsproblem kann aber diese Erhöhung der 6ten Ordnung des Systems Differentialgleichungen auf die 7te am allerwenigsten Bedenken erregen, wenn man dadurch andere Vortheile erreicht. Denn überall wo bei dem zur angenäherten Integration eines gegebenen Systems Differentialgleichungen eingeschlagenen Verfahren, die Annäherung nach den Potenzen einer kleinen Constante geschieht, welche die Differentialgleichungen selber enthalten, führt man eigentlich *unendlich viel* von einander unabhängige willkürliche Constanten ein, indem jede neue Annäherung neue Integrationen fordert, und diese eben so viel neue willkürliche Constanten zulassen. So wird es z. B. bei der Integration der zwischen den veränderlichen Constanten und der Zeit aufgestellten Differentialgleichungen geschehen, dafs mit jeder höhern Ordnung der störenden Masse, auf welche die Annäherung ausgedehnt wird, auch *sechs* neue will-

kürliche Constanten eintreten; und alle diese willkürlichen Constanten müssen sich schliefslich, oder auch bei jedem Stadium der Annäherung, wenn man die folgenden Potenzen der störenden Masse vernachlässigt, auf *sechs* reduciren lassen. Man erhält hievon auf folgende Art eine deutliche Vorstellung. Man denke sich das Problem absolvirt, und die sechs *veränderlichen* Constanten als Functionen von t, der kleinen in den Differentialgleichungen vorkommenden störenden Masse m und der sechs willkürlichen Constanten a, b, c etc. ausgedrückt. Setzt man nun

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \text{etc.} \\ b &= b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + \text{etc.} \\ &\text{etc. etc.,} \end{aligned}$$

wo a_0, b_0 etc., a_1, b_1 etc. etc. ebenfalls willkürliche Constanten sein können, und entwickelt die sechs, den *veränderlichen* Constanten gleichen Functionen von t nach den Potenzen von m, so treten in diese Entwicklungen mit jeder neuen Potenz m^i auch sechs neue willkürliche Constanten a_i, b_i, c_i etc. ein: und doch sieht man, dafs sich alle diese willkürlichen Constanten in die sechs, a, b, c etc. zusammenziehen lassen.

Ihre Formeln ergeben,

$$\begin{aligned} X &= r\cos(f+\chi) = a\cos(\varepsilon+\chi) - ae\cos\chi + \frac{ae^2\sin\chi\sin\varepsilon}{1+\sqrt{(1-e^2)}} \\ Y &= r\sin(f+\chi) = a\sin(\varepsilon+\chi) - ae\sin\chi - \frac{ae^2\cos\chi\sin\varepsilon}{1+\sqrt{(1-e^2)}}, \end{aligned}$$

wo der Winkel ε durch die Zeit mittelst der Gleichung

$$\varepsilon - e\sin\varepsilon = a^{\frac{3}{2}}(t-c)$$

bestimmt wird. Bildet man die Differentiale dX und dY unter der Voraussetzung, dafs a, e, c, χ Constanten sind, so haben Sie gezeigt, dafs dieselben Ausdrücke von dX und dY noch immer die Differentiale von X und Y bleiben, wenn man für die elliptischen Elemente a, e, c ihre gestörten Werthe und für die von den elliptischen Elementen gänzlich unabhängige Constante χ eine Function der Zeit setzt, welche $= w + \int \cos i \, d\vartheta$ ist. So scheint mir am klarsten und einfachsten der schöne und wichtige Satz zusammengefafst werden zu können, mit dem Sie die analytische Mechanik bereichert haben, und welcher *Lagrange* entgangen ist, obgleich er die Gröfsen $r\cos f$ und $r\sin f$ nach den Elementen differentiirt, und die Function $\chi = w + \int \cos i \, d\vartheta$ eingeführt hat.

Was den von mir früher vorgeschlagenen Namen *ideale* Coordinaten betrifft, so bin ich wieder zweifelhaft geworden, ob überhaupt ein besonderer Name für die Coordinaten X, Y, Z schon ein Bedürfnifs geworden sei, da doch aller Wahrscheinlichkeit nach nur die von Ihnen gemachte Annahme $Z = 0$ in den Anwendungen beibehalten wird, und eine so allgemeine Benennung kaum für ein so specifisches Coordinatensystem passend sein dürfte. Es würde vielleicht genügen, hervorzuheben, dafs es auch *bewegliche* Coordinatensysteme von der Beschaffenheit giebt, dafs die ersten Differentiale der auf dieselben bezogenen Coordinaten allein von der Orts-Änderung des Planeten im Raum, und nicht von der Veränderung des Coordinatensystems abhängen. Im Allgemeinen werden die ersten Differentiale der auf ein veränderliches System bezogenen Coordinaten eines Puncts aus den Differentialen, die von der Orts-Änderung des Punctes im Raume herrühren, und aus den Differentialen, die von der Änderung des Coordinatensystems herrühren, durch einfache Addition zusammengesetzt. Sollen die letztern immer verschwinden, so erleiden die Coordinaten des Puncts, wenn derselbe seinen Ort im Raum nicht ändert, durch die instantane Drehung des Systems gar keine Änderung. Die instantane Drehung des Coordinatensystems mufs also so beschaffen sein, dafs der unveränderte Ort des Punctes während derselben mit dem Coordinatensystem fest verbunden bleiben kann; oder der Radiusvector mufs die instantane Drehungsachse des Coordinatensystems sein. Ganz willkürlich bleibt dabei der instantane Drehungswinkel des Systems. Man kann sich dies etwa so vorstellen. Das Coordinatensystem dreht sich zu einer gewissen Zeit t um den Radiusvector mit einer ganz beliebigen Winkelgeschwindigkeit während des Zeit-Elements dt; nach diesem Zeit-Element geht der Radiusvector in die der Zeit $t + dt$ entsprechende Position über, worauf sich das Coordinatensystem wieder mit einer beliebigen Winkelgeschwindigkeit während der Zeit dt um den neuen Radiusvector dreht, welcher hierauf in seine dritte Lage übergeht, und so fort. Wenn der willkürliche Drehungswinkel jedesmal dem Neigungswinkel der den Zeiten t und $t + dt$ entsprechenden Bahnebnen gleich wird, so erhält man den von Ihnen behandelten Fall, oder allgemeiner, alle Coordinatensysteme, welche während der Bewegung mit demjenigen, in welchem $Z = 0$, fest verbunden bleiben. Es scheint kaum, dafs irgend eine andere Bestimmung des Drehungswinkels als die von Ihnen gewählte von Interesse ist. Setzt man mit Ihnen $Z = 0$, $X = r \cos v_1$, $Y = r \sin v_1$, so ist v_1 der Winkel des Radiusvectors mit der XAchse, welcher durch die Drehung der

XY Ebene um den Radiusvector keine Änderung erleidet, sondern, da die X Achse in der XY Ebene keine eigenthümliche Bewegung haben soll, nur durch die Bewegung des Radiusvectors in der XY Ebene eine Veränderung erfährt, woraus der von Ihnen auf analytischem Wege bewiesene Satz folgt, dafs dv_1 dem Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Radiivectores gleich ist.

Schliefslich will ich noch den Beweis des von mir zu Anfang dieses Schreibens aufgestellten Satzes hinzufügen.

Es sei u eine Function von t und den sechs elliptischen Elementen a, b, c etc., von solcher Beschaffenheit, dafs,

$$\frac{\partial u}{\partial a}da+\frac{\partial u}{\partial b}db+\frac{\partial u}{\partial c}dc+\text{etc.}=0.$$

Wenn man die Differentialgleichungen ausschliefst, welche die besondern störenden Kräfte enthalten, so finden zwischen den Differentialen da, db etc. nur die drei folgenden lineären Gleichungen Statt:

$$\frac{\partial x}{\partial a}da+\frac{\partial x}{\partial b}db+\frac{\partial x}{\partial c}dc+\text{etc.}=0$$

$$\frac{\partial y}{\partial a}da+\frac{\partial y}{\partial b}db+\frac{\partial y}{\partial c}dc+\text{etc.}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial a}da+\frac{\partial z}{\partial b}db+\frac{\partial z}{\partial c}dc+\text{etc.}=0,$$

und es mufs daher die vorstehende Gleichung, wenn sie erfüllt werden soll, ohne dafs man dabei auf die Besonderheit der störenden Kräfte Rücksicht nimmt, eine Folge dieser drei Gleichungen sein. Damit dies möglich sei, mufs man mittelst Einführung dreier Factoren L, M, N folgenden sechs Gleichungen Genüge leisten können:

$$\frac{\partial u}{\partial a}=L\frac{\partial x}{\partial a}+M\frac{\partial y}{\partial a}+N\frac{\partial z}{\partial a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial b}=L\frac{\partial x}{\partial b}+M\frac{\partial y}{\partial b}+N\frac{\partial z}{\partial b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial c}=L\frac{\partial x}{\partial c}+M\frac{\partial y}{\partial c}+N\frac{\partial z}{\partial c}$$

$$\text{etc.}\qquad\text{etc.}$$

Man denke sich jetzt umgekehrt die Elemente a, b, c etc. durch t, x, y, z, $x'=\frac{\partial x}{\partial t}$, $y'=\frac{\partial y}{\partial t}$, $z'=\frac{\partial z}{\partial t}$ ausgedrückt, und die partiellen Differentialquotienten dieser Ausdrücke von a, b, c etc. in Bezug auf die Gröfsen x,

y, z, x', y', z' gebildet, so wird nach den Regeln der partiellen Differentiation, wenn ξ und ξ' zwei beliebige von den Gröfsen x, y, z, x', y', z' bedeuten, der Ausdruck

$$\frac{\partial\xi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial\xi'}+\frac{\partial\xi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial\xi'}+\frac{\partial\xi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial\xi'}+\text{ etc.}$$

immer verschwinden, aufser wenn ξ und ξ' dieselben Gröfsen sind; in welchem Falle allein er $=1$ wird. Es folgen deshalb aus den obigen sechs Gleichungen die folgenden drei,

$$\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x'}+\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x'}+\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x'}+\text{ etc.}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y'}+\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y'}+\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial y'}+\text{ etc.}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z'}+\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z'}+\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z'}+\text{ etc.}=0.$$

Aber da u eine Function von t, a, b, c etc. ist, kann man dieselbe auch als Function von x, y, z, x', y', z', t betrachten, und dann werden die vorstehenden Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x'}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y'}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z'}=0,$$

oder es mufs sich u auf eine Function von x, y, z, t reduciren, w. z. b. w.

Ich will noch bemerken, dafs Sie Ihren zweiten Satz wohl zweckmäfsig dahin erweitern können, dafs Sie in die Function L auch t aufnehmen.

Ich bitte Sie, die vorstehenden Zeilen als einen Versuch anzusehen, mir die Natur der Störungsgleichungen, zu welchen sie gelangen, in ein recht klares Licht zu setzen; und es sollte mich freuen, wenn Sie finden, dafs ich ihren Sinn getroffen habe, worüber ich mir bald Ihren mündlichen Bescheid erbitten werde.

II.

Berlin, den 20ten Januar 1851.

Erlauben Sie, dafs ich meinem vorigen Schreiben noch die folgenden Bemerkungen hinzufüge.

Wenn wieder a, b etc. die veränderlichen willkürlichen Constanten bedeuten, so sind die Werthe ihrer ersten Differentialquotienten, $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$ etc. durch die drei Störungsgleichungen und die drei Bedingungsgleichungen,

$$\frac{\partial x}{\partial a}da+\frac{\partial x}{\partial b}db+\text{ etc.} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial a}da+\frac{\partial y}{\partial b}db+\text{ etc.} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial a}da+\frac{\partial z}{\partial b}db+\text{ etc.} = 0,$$

gegeben. Ist U eine Function der veränderlichen willkürlichen Constanten, so erhält man $\frac{dU}{\partial t}$, wenn man die Werthe von $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$ etc. respective mit $\frac{dU}{\partial a}$, $\frac{dU}{\partial b}$ etc. multiplicirt und von den erhaltenen Producten die Summe bildet. Es kommt hierbei zu Statten, dafs die Factoren $\frac{\partial U}{\partial a}$, $\frac{\partial U}{\partial b}$ etc. in der ersten Annäherung Constanten werden. Aber ganz derselbe Vortheil findet Statt, wenn auch U keine Function der veränderlichen willkürlichen Constanten ist, sondern mit ihnen nur durch eine nicht integrable Differentialgleichung,

$$dU = A\,da+B\,db+\text{ etc.},$$

verbunden ist, in welcher A, B etc. blofs Functionen von a, b etc. sind, ohne die Zeit t noch aufserdem explicite zu enthalten. Da nun solche Gröfsen U ganz auf dieselbe Weise wie die veränderlichen willkürlichen Constanten selbst erhalten werden, da sie ferner von veränderlichen willkürlichen Constanten nur um Gröfsen der *zweiten* Ordnung in Bezug auf die störenden Massen verschieden sind, und ihre Einführung, wie Sie gezeigt haben, bei den anzustellenden Entwicklungen bedeutende Abkürzungen gewährt, so wird es jedenfalls gerechtfertigt sein, solche Functionen

$$U = \int(A\,da+B\,db+\text{ etc.})$$

durch einen besondern Namen auszuzeichnen; weshalb ich in einem vorigen Schreiben vorgeschlagen habe, auf dieselben die Bezeichnung *Elemente* auszudehnen; wie schon *Lagrange* in Bezug auf den Winkel χ gethan hat. Da-

gegen werde ich die veränderlichen willkürlichen Constanten selbst, zur näheren Unterscheidung, ***gestörte oder veränderliche elliptische Elemente*** nennen. Denn jene Gröfsen U können nicht als gestörte elliptische Elemente angesehen werden, weil die Constanten, auf welche sie sich reduciren, wenn die störenden Kräfte verschwinden, von den willkürlichen Constanten der elliptischen Bewegung in keiner Art abhängen.

Wenn A, B etc. auch die Zeit t enthalten, so bleibt den Gröfsen

$$U = \int (A\,da + B\,db + \text{etc.})$$

der Character, dafs sie, wenn die störenden Kräfte verschwinden, wirkliche Constanten werden, und immer von wirklichen Constanten nur um Gröfsen von der Ordnung der störenden Kräfte verschieden sind. Es dürfte aber gleichwohl nicht zweckmäfsig sein, die Benennung ***Elemente*** auch auf diesen Fall auszudehnen, und werde ich in den folgenden Zeilen nur solche Gröfsen U ***Elemente*** nennen, in welchen A, B etc. blofs Functionen der elliptischen Elemente a, b etc. sind, ohne noch t zu enthalten, unter diesen Namen aber die veränderlichen willkürlichen Constanten oder elliptischen Elemente selbst zugleich einbegreifen.

Ich will jetzt einige Betrachtungen darüber anstellen, wie man Gröfsen finden kann, welche der von Ihnen eingeführten ***idealen Coordinate*** v_1 analog sind.

Ihre ideale Coordinate v_1 wird erhalten, wenn man von der wahren Anomalie f ein Element abzieht: das Wort ***Element*** in der eben angegebenen Bedeutung genommen; es ist nämlich in Ihrer Bezeichnung,

$$v_1 = f - w - \int \cos i\, d\vartheta.$$

Die wahre Anomalie hat daher die merkwürdige Eigenschaft, dafs derjenige Theil ihres Differentials, welcher von der Veränderlichkeit der gestörten elliptischen Elemente herrührt, das Differential eines Elements ist; das heifst, dafs in demselben die Differentiale der gestörten elliptischen Elemente blofs Functionen der elliptischen Elemente sind, ohne noch t zu enthalten. Dies hat mich veranlafst, zu untersuchen, ob es noch andere Functionen der elliptischen Elemente und der Zeit giebt, welche die Eigenschaft mit der wahren Anomalie gemein haben, dafs in dem Theil ihres Differentials, welcher von der Veränderlichkeit der elliptischen Elemente herrührt, die Coëfficienten der Differentiale der letztern nur Functionen von ihnen sind, ohne noch explicite die Zeit zu enthalten.

Es ist vielleicht zweckmäfsig, den Namen *ideale Coordinaten* auf alle Functionen von Elementen und der Zeit auszudehnen, in deren erstem Differential der von der Veränderlichkeit der Elemente herrührende Theil für sich besonders verschwindet. Um diese Eigenschaft noch auf andere Gröfsen als diejenigen, welche sich auf blofse Functionen von x, y, z, t reduciren, ausdehnen zu können, war es nöthig, zuvor den Begriff eines Elements auf die oben angegebene Art zu verallgemeinern, weil ich in meinem ersten Schreiben gezeigt habe, dafs keine andern Functionen der *elliptischen* Coordinaten und der Zeit existiren, welche ideale Coordinaten in der angegebenen Bedeutung sein können.

Wenn man diese Erweiterungen der Begriffe der Elemente und der idealen Coordinaten zuläfst, so kann man die oben gestellte Aufgabe so fassen:

Functionen der veränderlichen willkürlichen Constanten und der Zeit zu finden, welche sich durch blofses Abziehen eines Elements in eine ideale Coordinate verwandeln.

Der Theil von df, welcher von der Veränderlichkeit der elliptischen Elemente herrührt, erhält die Form des Differentials eines Elements,

$$dw + \cos i\, d\vartheta,$$

nur dadurch, dafs man die drei oben angegebenen Bedingungsgleichungen benutzt, welche zwischen den Differentialen der elliptischen Elemente Statt finden. Es wird daher die Aufgabe in ihrer vollständigen Bestimmung so heifsen:

„Es ist eine Function von t und den sechs veränderlichen willkürlichen Constanten a, b, c etc. von der Beschaffenheit zu suchen, dafs ihr, in Bezug auf die sechs Gröfsen a, b, c etc. genommenes Differential mittelst der drei Bedingungsgleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial b}db + \frac{\partial x}{\partial c}dc + \text{ etc.} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial a}da + \frac{\partial y}{\partial b}db + \frac{\partial y}{\partial c}dc + \text{ etc.} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial a}da + \frac{\partial z}{\partial b}db + \frac{\partial z}{\partial c}dc + \text{ etc.} = 0,$$

in einen Differential-Ausdruck

$$A da + B db + C dc + \text{ etc.}$$

verwandelt werden kann, in welchem A, B, C etc. blofs Functionen von a, b, c etc. sind, ohne t zu enthalten."

Obgleich es mir nicht gelungen ist, diese Aufgabe allgemein zu lösen, so will ich Ihnen doch in der Kürze die Betrachtungen, die ich darüber angestellt habe, mittheilen.

Es sei f die gesuchte Function, so mufs es drei solche Factoren λ, μ, ν geben, dafs die sechs Ausdrücke,

$$\frac{\partial f}{\partial a}+\lambda\frac{\partial x}{\partial a}+\mu\frac{\partial y}{\partial a}+\nu\frac{\partial z}{\partial a} = A$$
$$\frac{\partial f}{\partial b}+\lambda\frac{\partial x}{\partial b}+\mu\frac{\partial y}{\partial b}+\nu\frac{\partial z}{\partial b} = B$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.},$$

von t unabhängig werden. Bezeichnet man mit ***Lagrange*** das partiell nach t genommene Differential mit einem Accent, so folgen hieraus die sechs Gleichungen:

$$\frac{\partial f'}{\partial a}+\lambda\frac{\partial x'}{\partial a}+\mu\frac{\partial y'}{\partial a}+\nu\frac{\partial z'}{\partial a}+\lambda'\frac{\partial x}{\partial a}+\mu'\frac{\partial y}{\partial a}+\nu'\frac{\partial z}{\partial a} = 0$$
$$\frac{\partial f'}{\partial b}+\lambda\frac{\partial x'}{\partial b}+\mu\frac{\partial y'}{\partial b}+\nu\frac{\partial z'}{\partial b}+\lambda'\frac{\partial x}{\partial b}+\mu'\frac{\partial y}{\partial b}+\nu'\frac{\partial z}{\partial b} = 0$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Denkt man sich jetzt f' statt durch t, a, b, c etc. durch t, x, y, z, x', y', z' ausgedrückt, so ergeben sich hieraus die folgenden sechs Gleichungen:

$$\frac{\partial f'}{\partial x'}+\lambda = 0, \quad \frac{\partial f'}{\partial y'}+\mu = 0, \quad \frac{\partial f'}{\partial z'}+\nu = 0,$$
$$\frac{\partial f'}{\partial x}+\lambda' = 0, \quad \frac{\partial f'}{\partial y}+\mu' = 0, \quad \frac{\partial f'}{\partial z}+\nu' = 0.$$

Es mufs daher f' den folgenden drei Gleichungen genügen:

$$(A.) \qquad \frac{d\cdot\frac{\partial f'}{\partial x'}}{dt} = \frac{\partial f'}{\partial x}, \quad \frac{d\cdot\frac{\partial f'}{\partial y'}}{dt} = \frac{\partial f'}{\partial y}, \quad \frac{d\cdot\frac{\partial f'}{\partial z'}}{dt} = \frac{\partial f'}{\partial z}.$$

Wenn E eine Function der veränderlichen willkürlichen Constanten bedeutet, und mittelst der Gleichungen der ungestörten Bewegung durch x, y, z, x', y', z', t ausgedrückt wird, so hat man, wie, glaube ich, ***Lagrange*** gezeigt hat, die Gleichungen,

$$\frac{d\cdot\frac{\partial E}{\partial x'}}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial x}, \quad \frac{d\cdot\frac{\partial E}{\partial y'}}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial y}, \quad \frac{d\cdot\frac{\partial E}{\partial z'}}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial z},$$

welche von den vorstehenden nur durch die Zeichen der zweiten Glieder verschieden ist. Dieselbe Analysis, durch welche man diese letzteren Gleichungen

beweiset, zeigt auch, dafs man den drei Gleichungen (*A.*) die folgende Form geben kann:

$$\frac{\partial f''}{\partial x'} = 2\frac{\partial f'}{\partial x}, \quad \frac{\partial f''}{\partial y'} = 2\frac{\partial f'}{\partial y}, \quad \frac{\partial f''}{\partial z'} = 2\frac{\partial f'}{\partial z},$$

wo f'' das zweite Differential von f nach t bedeutet. Alle Differentiationen nach t werden hier im Sinne der ungestörten Bewegung genommen, so dafs man a, b etc. dabei als Constanten zu betrachten, oder für $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ die Werthe $-\frac{x}{r^3}$, $-\frac{y}{r^3}$, $-\frac{z}{r^3}$ zu substituiren hat.

Die Gleichungen (*A.*) müssen erfüllt werden, wenn man für f die wahre Anomalie annimmt. Um diese Verification zu machen, hat man zuerst f' durch x, y, z, x', y', z', t auszudrücken, was mittelst der Formel,

$$f' = \frac{\sqrt{\alpha}}{r^2},$$

geschieht, wo

$$\alpha = (yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2$$

ist. Man erhält hieraus,

$$\frac{\partial f'}{\partial x'} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}.r^2}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial f'}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}.r^2}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{2x\sqrt{\alpha}}{r^4},$$

und da α einer willkürlichen Constante gleich, also $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, $\frac{d\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x'}}{dt} = -\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ ist:

$$\frac{d\cdot\frac{\partial f'}{\partial x'}}{dt} = -\frac{r'}{\sqrt{\alpha}.r^3}\frac{\partial \alpha}{\partial x'} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}.r^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

Da dieser Ausdruck $= \frac{\partial f'}{\partial x}$ sein soll, so ist die zu beweisende Gleichung:

$$r\frac{\partial \alpha}{\partial x} + r'\frac{\partial \alpha}{\partial x'} = \frac{2\alpha}{r}x,$$

und es werden eben so die beiden andern Gleichungen (*A.*) zu

$$r\frac{\partial \alpha}{\partial y} + r'\frac{\partial \alpha}{\partial y'} = \frac{2\alpha}{r}y, \quad r\frac{\partial \alpha}{\partial z} + r'\frac{\partial \alpha}{\partial z'} = \frac{2\alpha}{r}z.$$

Man sieht leicht, dafs diese Gleichungen erfüllt werden, wenn man die Werthe,

$$\alpha = r^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) - r^2r'^2$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 2x(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2x'rr'$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x'} = 2x'r^2 - 2xrr'$$

und die analogen für $\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}$, etc. substituirt. Es ist also die durch die Gleichungen (*A.*) ausgedrückte Eigenschaft von f erwiesen, wenn man für f die wahre Anomalie nimmt.

Man erhält sogleich auch noch einen andern Werth von f', welcher den Gleichungen (*A.*),

$$\frac{d.\frac{\partial f'}{\partial x'}}{dt} = \frac{\partial f'}{\partial x}, \text{ etc.}$$

Genüge leistet, wenn man

$$f' = \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y'+z'z')+\frac{1}{r}$$

setzt und die Differentialgleichungen des ungestörten Problems zu Hülfe nimmt. Man findet hieraus f selbst auf folgende Art.

Nennt man a die halbe grofse Ache, so folgt aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(x'x'+y'y'+z'z')+\frac{1}{2a} &= \frac{1}{r}\\ xx''+yy''+zz'' &= -\frac{1}{r}\end{aligned}$$

die folgende:

$$f' = 2(x'x'+y'y'+z'z'+xx''+yy''+zz'')+\frac{3}{2a},$$

woraus man durch Integration

$$f = 2(xx'+yy'+zz')+\frac{3t}{2a} = 2rr'+\frac{3t}{2a}$$

erhält, oder, wenn u die excentrische Anomalie bedeutet,

$$f = \frac{3t}{2a}+2\sqrt{a}.e\sin u.$$

Diese Function wird also die Eigenschaft der wahren Anomalie haben, sich durch blofses Abziehen eines Elements in eine ideale Coordinate zu verwandeln. Das abzuziehende Element findet man auf folgende Art.

Bezeichnet man die Differentiationen nach den veränderlichen willkürlichen Constanten durch die Characteristik δ, so wird für den vorstehenden Werth von f:

$$\delta f = -\frac{3t}{2a^2}\delta a+\frac{e\sin u}{\sqrt{a}}\delta a+2\sqrt{a}\sin u\,\delta e+2\sqrt{a}.e\cos u.\delta u.$$

Wenn τ die mittlere Anomalie für $t=0$ ist, so hat man

$$\frac{t}{a^{\frac{3}{2}}}+\tau = u-e\sin u;$$

woraus der Werth von δu mittelst der Gleichung

$$-\tfrac{3}{2}\frac{t}{a^{\frac{5}{2}}}\delta a+\delta\tau+\sin u\,\delta e = (1-e\cos u)\delta u$$

erhalten wird. Man hat demnach

$$\delta f = \sqrt{a}(1+e\cos u)\,\delta u-\sqrt{a}\,\delta\tau+\frac{e\sin u}{\sqrt{a}}\delta a+\sqrt{a}\sin u\,\delta e.$$

Hiezu addire man den verschwindenden Ausdruck

$$\begin{aligned}\lambda\,\delta x+\mu\,\delta y+\nu\,\delta z &= -\Big(\frac{\partial f'}{\partial x'}\delta x+\frac{\partial f'}{\partial y'}\delta y+\frac{\partial f'}{\partial z'}\delta z\Big)\\ &= -(x'\,\delta x+y'\,\delta y+z'\,\delta z).\end{aligned}$$

Setzt man mit ***Lagrange***,

$$x=\alpha X+\beta Y,\qquad y=\alpha_1 X+\beta_1 Y,\qquad z=\alpha_2 X+\beta_2 Y,$$

wo

$$X=a\cos u-ae,\qquad Y=a\sqrt{(1-e^2)}\sin u,$$

so wird

$$\begin{aligned}0=x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z &= (\alpha X'+\beta Y')(\alpha\,\delta X+\beta\,\delta Y+X\delta\alpha+Y\delta\beta)\\ &\quad+(\alpha_1 X'+\beta_1 Y')(\alpha_1\delta X+\beta_1\delta Y+X\delta\alpha_1+Y\delta\beta_1)\\ &\quad+(\alpha_2 X'+\beta_2 Y')(\alpha_2\delta X+\beta_2\delta Y+X\delta\alpha_2+Y\delta\beta_2)\\ &= X'\delta X+Y'\delta Y+(\beta\,\delta\alpha+\beta_1\delta\alpha_1+\beta_2\delta\alpha_2)(XY'-YX')\\ &= \sqrt{a}(1+e\cos u)\,\delta u+\frac{e\sin u}{\sqrt{a}}\delta a-a\Big(X'+\frac{e\sin u}{\sqrt{(1-e^2)}}Y'\Big)\delta e\\ &\quad+(\beta\,\delta\alpha+\beta_1\delta\alpha_1+\beta_2\delta\alpha_2)\sqrt{(a(1-e^2))}.\end{aligned}$$

Zieht man diesen Ausdruck von dem obigen Werthe von δf ab, und bemerkt noch, dafs

$$X'+\frac{e\sin u}{\sqrt{(1-e^2)}}Y' = -\frac{e\sin u}{\sqrt{a}}$$

ist, so erhält man für δf folgenden Ausdruck von der verlangten Form, in welchem die Coëfficienten der Differentiale der veränderlichen willkürlichen Constanten nur Functionen der veränderlichen willkürlichen Constanten sind:

$$\delta f = -\sqrt{a}\,\delta\tau-\sqrt{(a(1-e^2))}\,(\beta\,\delta\alpha+\beta_1\delta\alpha_1+\beta_2\delta\alpha_2).$$

Die vorstehende Analysis führt daher zu der ***neuen idealen Coordinate***, die ich mir Ihnen vorzulegen erlaube, nemlich:

$$\sqrt{a}(\tfrac{3}{2}u+\tfrac{1}{2}e\sin u)+\int\sqrt{a}\{d\tau+\sqrt{(1-e^2)}(\beta\,d\alpha+\beta_1 d\alpha_1+\beta_2 d\alpha_2)\}.$$

Multiplicirt man mit $\frac{2}{3}$ und substituirt den Werth

$$\beta\,d\alpha+\beta_1 d\alpha_1+\beta_2 d\alpha_2 = d\chi = dw+\cos i\,d\vartheta,$$

so wird die neue ideale Coordinate:

$$\sqrt{a}(u+\tfrac{1}{3}e\sin u)+\tfrac{2}{3}\int\sqrt{a}\,(d\tau+\sqrt{(1-e^2)}(dw+\cos i\,d\vartheta)).$$

Es wäre nicht ohne Interesse, mehrere solcher idealer Coordinaten aufzusuchen, und zu sehen, ob vielleicht einige derselben bei den anzustellenden Entwicklungen einen ähnlichen Nutzen, wie der von Ihnen eingeführte Winkel v_1, gewähren.

Es ist noch zu bemerken, dafs ein Ausdruck $A\,da+B\,db+$ etc., in welchem A, B etc. blofs Functionen der veränderlichen willkürlichen Constanten sind, *nur auf eine einzige Art* diese Form annehmen kann. Es folgt dies daraus, dafs es unmöglich ist, drei Factoren λ, μ, ν so zu bestimmen, dafs die sechs Ausdrücke,

$$\lambda\frac{\partial x}{\partial a}+\mu\frac{\partial y}{\partial a}+\nu\frac{\partial z}{\partial a},\quad \lambda\frac{\partial x}{\partial b}+\mu\frac{\partial y}{\partial b}+\nu\frac{\partial z}{\partial b},\quad \text{etc.}$$

gleichzeitig blofsen Functionen von a, b etc. gleich werden. In der That müfste man in diesem Falle die sechs Gleichungen,

$$\lambda'\frac{\partial x}{\partial a}+\mu'\frac{\partial y}{\partial a}+\nu'\frac{\partial z}{\partial a}+\lambda\frac{\partial x'}{\partial a}+\mu\frac{\partial y'}{\partial a}+\nu\frac{\partial z'}{\partial a}=0$$

$$\lambda'\frac{\partial x}{\partial b}+\mu'\frac{\partial y}{\partial b}+\nu'\frac{\partial z}{\partial b}+\lambda\frac{\partial x'}{\partial b}+\mu\frac{\partial y'}{\partial b}+\nu\frac{\partial z'}{\partial b}=0$$

$$\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.},$$

haben. Soll nun nicht gleichzeitig λ, μ, ν, λ', μ', ν' verschwinden, so müfste, wenn ich mich einer von mir eingeführten Benennung bedienen darf, die *Functionaldeterminante* von x, y, z, x', y', z' verschwinden, und zwar *identisch*, weil es im ungestörten Problem keine Gleichung zwischen t, a, b etc. geben kann. Aus dem identischen Verschwinden dieser Functional-Determinante würde aber, wie anderweitig bewiesen worden ist, folgen, dafs es eine Gleichung zwischen x, y, z, x', y', z', t ohne alle willkürliche Constante gäbe, und eine solche kann, wie ich ebenfalls an einem andern Orte gezeigt habe, niemals aus den vollständigen Integralgleichungen abgeleitet werden.

Diese Eigenschaft der Ausdrücke $A\,da+B\,db+$ etc., welche sogleich aufhört, wenn A, B etc. auch noch t enthalten, scheint es desto mehr zu rechtfertigen, wenn man ihr Integral durch einen besondern Namen (Element) auszeichnet.