19.
Über das gröfste Product der Theile oder Summanden jeder Zahl.

(Von dem Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin.)

Wird eine gegebene Zahl a in zwei beliebige Theile zerlegt, so ist bekanntlich das Product der Theile am gröfsten, wenn dieselben gleich sind. Eben so verhält es sich, wenn die Zahl a in 3, 4, 5, ... n Theile zerlegt wird. Da aber die hiebei entstehenden gröfsten Producte unter sich verschieden sind, so entsteht die Frage: *„in wieviele gleiche Theile, oder in was für Theile die Zahl a zerlegt werden müsse, damit das Product derselben am allergröfsten, ein Maximum Maximorum, werde?"*

Man findet leicht, dafs jeder Theil $= e$, d. h. gleich der Grundzahl der natürlichen Logarithmen, und somit die Anzahl der Theile $= \frac{a}{e}$ sein mufs, so dafs also das verlangte gröfste Product

$$= e^{\frac{a}{e}}$$

ist. Oder da $\sqrt[e]{e} = 1{,}4446\ldots.$, so ist das gröfste Product der Summanden jeder Zahl a

$$= (1{,}4446\ldots)^a.$$

Wenn also $xe = yz = a$, so ist immer

$$e^x > z^y.$$

Für $a = 1$, wird $x = \frac{1}{e}$, und da man dabei auch $y = \frac{1}{z}$ annehmen kann, so hat man

$$\sqrt[e]{e} > \sqrt[z]{z}, \quad \text{oder} \quad e^z > z^e,$$

d. h. *„Wird jede Zahl durch sich selbst radicirt, so gewährt die Zahl e die allergröfste Wurzel;"* oder: *„Die Zahl e hat die Eigenschaft, dafs sie, mit jeder andern Zahl z gegenseitig potenzirt, allemal die gröfsere Potenz giebt."*

Verlangt man zwei Zahlen b und c, für welche

$$\sqrt[b]{b} = \sqrt[c]{c}, \quad \text{oder} \quad b^c = c^b$$

sein soll, so ist die eine, etwa b, kleiner und die andere c gröfser als e; nämlich b hat den Spielraum von e bis 1, während c von e bis ∞ wächst. Es giebt nur einen Fall, wo b und c ganze Zahlen sind, nämlich 2 und 4. Wenn $d > c > e$, so ist immer

$$\sqrt[c]{c} > \sqrt[d]{d}, \quad \text{oder} \quad c^d > d^c.$$

Berlin, im März 1850.