Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1965

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?235181684_0161|log47

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

X, 83

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch Alfred Clebsch · Carl Neumann

Fortgeführt durch Felix Klein · David Hilbert
Otto Blumenthal · Erich Hecke

Herausgegeben von **Heinrich Behnke,** Münster i. W.
Richard Courant, New York
Hans Grauert, Göttingen
Friedrich Hirzebruch, Bonn
Heinz Hopf, Zürich
Gottfried Köthe, Frankfurt/M.
Bartel L. van der Waerden, Zürich

Band 161 · Heft 4 · 1965

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Math. Ann. · Abgeschlossen am 6. Dezember 1965 · A 21 265 D

Niedersächsische Staats- u. Universitätsbibliothek Göttingen

20. Dez. 1965 5089

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch *Alfred Clebsch* und *Carl Neumann*, früher herausgegeben von *Alfred Clebsch* (1869—1872), *Carl Neumann* (1869—1876), *Felix Klein* (1876—1924), *Adolph Mayer* (1876—1901), *Walther v. Dyck* (1888—1921), *David Hilbert* (1902—1939), *Otto Blumenthal* (1906—1938), *Albert Einstein* (1920—1928), *Constantin Carathéodory* (1925—1928), *Erich Hecke* (1929—1947), *Franz Rellich* (1947—1955), *Kurt Reidemeister* (1947—1963).

Band 1—80 Leipzig, B. G. Teubner, ab Band 81 (1920) Berlin, Springer.

An unsere Mitarbeiter!

Die Korrekturkosten sind bei den „Mathematischen Annalen" sehr hoch. Für ihre Verminderung muß unbedingt Sorge getragen werden. Wir richten deshalb an alle unsere Mitarbeiter die freundliche dringende Bitte, zu diesem Ziele an ihrem Teile mit beitragen zu wollen. Dazu ist nötig:

1. Das Manuskript muß *völlig druckfertig* und *gut leserlich* sein (Schreibmaschine oder klare Handschrift, Formeln im allgemeinen handschriftlich). Vorkommende gotische oder griechische Buchstaben sowie einander ähnelnde Zeichen sind besonders zu kennzeichnen, z. B. durch farbige Unterstreichung. Etwaige Abbildungen sind als Skizzen auf besonderen Blättern zu bringen. Die Abbildungs-Unterschriften gehören dagegen zum Text und sind dem Manuskript beizugeben.

2. Veränderungen des Textes in der Korrektur sind auf die Fälle zu beschränken, wo sich nachträglich *wirkliche Irrtümer* herausstellen. Sollte ein Irrtum bemerkt werden, bevor noch Korrektur eingetroffen ist, dann ist ein verbesserter Text sofort an die Redaktion zu schicken, die dafür Sorge tragen wird, daß das Manuskript noch vor dem Satz berichtigt wird.

Insbesondere sind rein stilistische Verbesserungen zu unterlassen. Größere Änderungen und Zusätze, die sich nicht auf die Berichtigung von Irrtümern beschränken, bedürfen der Zustimmung der Redaktion und sollen, auch um der geschichtlichen Genauigkeit willen, in einer Fußnote als nachträglich gekennzeichnet und datiert werden.

Als Norm soll gelten, daß der Verfasser von jeder Arbeit *eine Fahnenkorrektur und eine Korrektur in Bogen* liest. Wir bitten unsere Verfasser, sich hiermit begnügen zu wollen.

Die Redaktion der Mathematischen Annalen

Mathematische Annalen

Erscheinen zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Sie sind durch jede Buchhandlung zu beziehen. Der Preis des Bandes beträgt DM 96,—.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskripts und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0,30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Mathematischen Annalen bestimmte Manuskripte können bei jedem der unten verzeichneten Redaktionsmitglieder eingereicht werden:

Professor Dr. Dr. h. c. H. Behnke, 44 Münster/Westf., Rottendorffweg 17,
Professor Dr. R. Courant, 142 Calton Road, New Rochelle, N. Y. USA,
Professor Dr. H. Grauert, Mathematisches Institut der Universität, 34 Göttingen, Bunsenstr. 3—5,
Professor Dr. F. Hirzebruch, Mathematisches Institut der Universität, 53 Bonn (Rhein), Wegelerstr. 10,
Professor Dr. Dr. h. c. H. Hopf, Zollikon bei Zürich, Alte Landstraße 37,
Professor Dr. Dr. h. c. G. Köthe, 6 Frankfurt/Main, Parkstraße 14[1],
Professor Dr. Dr. h. c. B. L. van der Waerden, Mathematisches Institut der Universität Zürich, 8006 Zürich/Schweiz

Inhaltsverzeichnis des Heftes auf Seite 4

GANESAN, N.
Math. Annalen 161, 241—246 (1965)

Properties of Rings with a Finite Number of Zero Divisors II

By

N. GANESAN in Annamalainagar (Madras)

1. I have shown in my paper [2] that any commutative ring having a finite number $n(\geqq 1)$ of non-zero zero divisors is finite and contains not more than $(n+1)^2$ elements. A similar result is obtained in this paper for the case of non-commutative rings and this main result is contained in Theorem 1. Further properties of such rings are also obtained and some of these are generalisations of the results in [2] for the case of non-commutative rings. Throughout this paper R denotes a non commutative ring unless otherwise specified and following VAN DER WAERDEN [6] we include the zero element of R also as a zero divisor. Also any element of R which is not a left zero divisor is usually referred to as a left regular element and any element of R which is not a right zero divisor is usually referred to as a right regular element. We shall call an element of R which is both left regular and right regular as merely regular.

2. **Theorem 1.** *Any non-commutative ring R with a finite number $p(\geqq 2)$ of left zero divisors and a finite number $q(\geqq 2)$ of right zero divisors is necessarily finite and cannot contain more than n elements where n is the smaller of p^2 and q^2.*

To prove the above theorem we require the following

Lemma 1. *The ring R of the above theorem has at least one non-zero two sided zero divisor.*

For, if the lemma were not true and if l_i $(i = 1, \ldots, p-1)$ are the $p-1$ non-zero left zero divisors and r_j $(j = 1, \ldots, q-1)$ are the $q-1$ non-zero right zero divisors then each of the elements $r_j l_i$ of R must be zero since $r_j l_i$ is clearly a two sided zero divisor. Hence both r_j and l_i are two sided zero divisors, whence the lemma.

We now prove the main theorem. Let z be a non-zero two sided zero divisor in R and let $A = \{x; x \in R, xz = 0\}$ be the left ideal in R consisting of all left annihilators of z. As every element of A is obviously a left zero divisor, A is a finite left ideal and the order α of A, considered as a subgroup of the additive group R_+ of the ring R, is $\leqq p$. Also for two elements $r, s \in R$, the left zero divisors rz and sz are equal if and only if $r \equiv s \pmod{A}$. Thus with each distinct residue class $r + A$ of A we can associate a distinct left zero divisor rz, r being a representative of the residue class. Therefore the number of distinct residue classes modulo A is $\leqq p$. This means that the index β of A, considered as a subgroup of R_+, is $\leqq p$. Hence both the order and the index of A are $\leqq p$ whence R itself is finite containing m elements where

$$m = \alpha\beta \leqq p^2 . \tag{1}$$

Similarly by considering the right ideal B consisting of all right annihilators of z we can show that

$$m \leqq q^2 . \tag{2}$$

From (1) and (2) the theorem follows.

3. Suppose now the ring R of Theorem 1, contains at least one one-sided zero divisor it can be shown that all elements of R are zero divisors, some two sided and the rest one sided (either left or right only), and that these one sided zero divisors form under multiplication a multiple group of A. H. CLIFFORD [1] (or a (l, r) system of H. B. MANN [4] or a right group mentioned in a paper by three authors [5]). These facts are contained in the following Theorems 2 and 3.

Theorem 2. *Let R be a ring with a finite number $p(\geqq 2)$ of left zero divisors and a finite number $q(\geqq 2)$ of right zero divisors. Suppose at least one of the right zero divisors of R is left regular then the q right zero divisors constitute R and $p^2 \geqq q > p$. A similar result is also true if the interchange of right with left and p with q in the above statement is carried out.*

Proof: Suppose r is a right zero divisor which is left regular in R, then clearly the elements rx of R where x ranges over R are all distinct right zero divisors of R and they number m, if m is the finite number (Theorem 1) of elements of R, whence $m \leqq q$. But $q \leqq m$ obviously. Hence $m = q$. Further by Theorem 1, $m \leqq$ smaller of p^2 and q^2 whence the inequality stated in the theorem follows.

Corollary 1. *If the ring R of the Theorem 1 contains at least one right (left) zero divisor which is left (right) regular, then R cannot contain any left (right) zero divisor which is right (left) regular nor can it contain any regular element.*

The following example illustrates the above Theorem 2 and incidentally prove that the upper bound we had obtained in Theorem 1 regarding the number of elements in such a ring is the best possible when $q = p^2$, p a prime.

Example: 1. Consider the non-commutative ring R_1 of all 2×2 rational integral matrices of the form $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ with the usual operations of matrix addition and matrix multiplication and where we identify two matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} a' & b' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ whenever $a \equiv a'$, $b \equiv b' \bmod x$, x being a prime. It is easily seen that R_1 contains precisely x^2 elements all of them being right zero divisors while only x of them are left zero divisors as well. Thus there are $x^2 - x(>1)$ right zero divisors which are left regular and in the notation used in Theorem 1 we have $m = q = x^2$, $p = x$ and $n =$ the smaller of p^2 and $q^2 = m$.

If we interchange rows and columns of the matrices in the above example we obtain an example of a ring R_2 all of whose elements, x^2 in number, are left zero divisors while only x of them are right zero divisors as well and in the notation of Theorem 1, $m = p = x^2$, $q = x$ and $n =$ the smaller of p^2 and $q^2 = m$.

We now show that the ring as described in Theorem 2 possesses left identities and that the one sided zero divisors form a multiple group under multiplication.

By a multiple group is meant a semi-group having only left (right) identities and in which every element has a right (left) inverse with respect to every left (right) identity.

Theorem 3. *Let R be a ring with a finite number $p(\geqq 2)$ of left zero divisors and a finite number $q(\geqq 2)$ of right zero divisors and suppose at least one of the right zero divisors is left regular. Then the set of all these one sided right zero divisors of R is a multiple group (left hand type) under multiplication. Also the left identities of this multiple group are as well left identities of R while R has no right identities.*

The above facts are obviously valid when we interchange left with right and p with q in the above statement everywhere.

Proof: By Theorem 2, the ring R of the theorem is constituted by the q right zero divisors $r_1, \ldots, r_q$ of which we may take the first $m\ (=q-p)$ to be the only left regular elements and the rest to be two sided zero divisors. Let S denote the set of all the left regular right zero divisors of R. Then, for any element $r_i \in S$, the elements $r_i r_1, \ldots, r_i r_m$ are all distinct left regular right zero divisors of R and as such constitute S. Therefore the equation $r_i x = r_j$ has a unique solution x in S for every r_i, $r_j \in S$. Hence S, being clearly a multiplicative semi-group, is a multiple group (under multiplication) of the left hand type. (Refer remark following Theorem 11 in [1]). This means that there are left identities, say, $r_1, \ldots, r_l$ in S with $l \leqq m$ such that $r_i r_j = r_j$ for $i = 1, \ldots, l$ and $j = 1, \ldots, m$ and corresponding to every left identity r_i, every $r_j \in S$ has a unique right inverse $r_k \in S$ such that $r_j r_k = r_i$.

Also with any left identity $r_i \in S$ we can associate the permutation $\begin{pmatrix} r_j \\ r_i r_j \end{pmatrix}$ in the $q - m\,(=p)$ symbols $r_{m+1}, \ldots, r_q$ since the elements $r_i r_{m+1}, \ldots, r_i r_q$ are obviously distinct two sided zero divisors of R. This means that for any given two sided zero divisor r_j there exists a unique two sided zero divisor r_k such that $r_i r_k = r_j$ whence $r_i r_j = r_i (r_i r_k) = r_i^2 r_k = r_i r_k = r_j$. Therefore every left identity $r_i \in S$ is a left identity for the entire ring R. Obviously R cannot have any right identity as all its elements are right zero divisors.

Remarks 1. A. H. Clifford [1] calls the number l of left identities of the multiple group S as the index or multiplicity of S. Now using the dissection of S into l disjoint categories K_i (each K_i is a group with r_i for the unique identity) and using Theorem 7 (of [1]) we find that l is a divisor of $m\,(=q-p)$. Further since $-r_1, -r_2, \ldots, -r_l$ are distinct left regular right zero divisors which are not in general left identities (unless R is of characteristic 2), $l \leqq m - l$ or $l \leqq \frac{m}{2}\left(=\frac{q-p}{2}\right)$. Again every one of the elements $r_i - r_j$ with $i, j = 1, \ldots, l$ in R is a total left zero divisor as $(r_i - r_j) \cdot x = 0$ for all $x \in R$. Hence $l \leqq q - m\,(=p)$. Thus we have proved that l is a divisor of $q-p$ and is $\leqq$ both $\frac{q-p}{2}$ and p.

Incidentally this shows that $l \neq m\,(=q-p)$ and hence S is never a unitary multiple group of Clifford [1], (or an idempotent (l, r) system of H. B. Mann [4]).

Similar remarks hold good when we interchange in the above statements left with right and p with q.

Corollary 2. *A proper right (left) ideal of the ring R of Theorem 3 does not contain any left (right) regular element.*

By considering the additive structure of the ring R of Theorem 3 we obtain now in the following Theorem 4 a better upper bound for the number of left (right) identities of the ring R in terms of the characteristic k of R and the numbers p and q. The procedure for obtaining the same is very much identical with the proof of Theorem IV in [2]. Following N. JACOBSON [3], we mean by characteristic k of a ring the greatest (when it exists and is finite) of the additive orders of its elements. In the case of any finite ring with m elements, the additive order of every non-zero element is a divisor of k, while k itself is a divisor of m. These facts are remembered in proving the Theorem 4.

Theorem 4. *Let R be a ring as described in Theorem 3. Then the number l of left identities in R and the characteristic k of R have the following properties:*

(i) *l is a divisor of $q - p$,*

(ii) *k is a divisor of q, and*

(iii) *$l \cdot \phi(k) \leqq q - p$ where $\phi(k)$ is the Euler ϕ-function of k. The above facts are also valid when we interchange left with right, p with q and l with r.*

Proof: By Theorem 2, the q right zero divisors constitute R whence the characteristic k of R divides q, the number of elements of R. Also, the fact that the number l of left identities in R divides $q - p$ has been proved in the beginning of the Remarks 1. Thus results (i) and (ii) of the theorem are had. To prove (iii) of the theorem we require the following two Lemmas concerning the subrings K_i of $R (i = 1, \ldots, l)$ consisting of all multiples of r_i, namely $r_i, 2r_i, \ldots, (k-1)r_i, kr_i (=0)$ where r_i are the only left identities in R.

Lemma 2. *There are precisely $\phi(k)$ distinct regular elements in K_i and all of them are left regular in R.*

The first part of the lemma follows from the fact that K_i is isomorphic with the residue class ring $\frac{Z}{(k)}$ in the ring Z of integers modulo the principal ideal (k). The second part of the lemma follows by showing with the help of reductio ad absurdem that any element of K_i which is not a zero divisor in K_i cannot be a left zero divisor in R.

Lemma 3. *If K_i and K_j $(i, j = 1, \ldots, l)$ be two distinct subrings of R, the regular elements in K_i are distinct from those in K_j.*

For, if $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$, are the only integers $< k$ and prime to k, t being $\phi(k)$, by Lemma 2 the distinct regular elements of K_i are $\lambda_1 r_i, \ldots, \lambda_t r_i$ and those of K_j are $\lambda_1 r_j, \ldots, \lambda_t r_j$. If the Lemma 3 were not true let $\lambda_u r_i = \lambda_v r_j$, $1 \leqq u \leqq t$, $1 \leqq v \leqq t$. Now either $\lambda_u = \lambda_v$ or $\lambda_u \neq \lambda_v$.

When $\lambda_u = \lambda_v$, the additive order of $r_i - r_j$ is a divisor of λ_u as also of k since $\lambda_u (r_i - r_j) = 0$ and k is the characteristic of R. But this cannot happen since λ_u is prime to k. But when $\lambda_u \neq \lambda_v$, suppose $\lambda_v = \lambda_u + \delta$ with $1 \leqq \delta < k$ then $\delta r_j = \lambda_u (r_i - r_j)$ and for any $x \in R$, $\delta r_j \cdot x = 0$, $r_i - r_j$ being a total left

zero divisor. This means $\delta x = 0$, r_j being left regular and this cannot happen as x is an arbitrary element of R and $\delta < k$.

Thus neither $\lambda_u = \lambda_v$ nor $\lambda_u \neq \lambda_v$ whence the lemma.

Now we will prove (iii) of the theorem. Using the above two lemmas we find that the total number of distinct left regular elements of R in $\bigcup_{i=1}^{l} K_i$ is clearly $l\phi(k)$. But $q - p$ is the total number of left regular elements of R whence (iii) follows.

Remarks 2. The Example 1 shows that the upper bound for $l(r)$ as obtained in the above Theorem 4 is the best possible. For, in the case of the ring R_1 it is easy to see that, in our notation, $p = k = l =$ the prime x and $q = x^2$ so that $l\phi(k) = x \cdot (x-1) = x^2 - x = q - p$. Similarly for the ring R_2, $r\phi(k) = p - q$.

We had mentioned in Remarks 1 that $l \leqq p$ so that along with the inequality (iii) of the above theorem we have $l \leqq p \leqq q - l\phi(k)$. Suppose, if possible, q is a prime then $k = q$ and from the above inequality we have $l \leqq p \leqq q - lq + l \leqq l$ whence $p = l = 1$ which contradicts the fact that $p \geqq 2$. Thus the number q of elements of the ring R of Theorem 4 can never be a prime. This fact may also be seen from the additive structure of R and from the isomorphism $R \cong \frac{Z}{(q)}$ $\left(\frac{Z}{(q)}\right.$ is the ring of residue classes modulo q in the ring Z of integers$\left.\right)$.

4. We conclude this paper with the study of a ring R which has at least one regular element besides $p(\geqq 2)$ left zero divisors and $q(\geqq 2)$ right zero divisors. In view of Corollary 1 there cannot exist in such a ring R any left regular right zero divisor nor any right regular left zero divisor whence all the zero divisors of R are two sided and $p = q$. In what follows we shall mean by zero divisors only two sided zero divisors. Regarding the regular elements of R we have the following

Theorem 5. *Suppose R is a ring which contains, besides a finite number $p(\geqq 2)$ of left zero divisors and a finite number $q(\geqq 2)$ of right zero divisors, at least one regular element, then the set of all regular elements of R is a multiplicative group whose identity is the identity for the ring R also.*

The above theorem can be proved along the same lines as Theorem III in [2], remembering however the remark just made that in the ring R of our theorem all the zero divisors are two sided and $p = q$.

Corollary 3. *A proper ideal of the ring R of the above theorem cannot contain any regular element.*

Analogous to Theorem IV in [2] and proceeding along the same lines as in that theorem we have the following

Theorem 6. *If k is the characteristic of a ring R which contains $p(\geqq 2)$ zero divisors and $m(\geqq 1)$ regular elements then k is a factor of $m + p$ such that $\phi(k) \leqq \leqq m \leqq p^2 - p$.*

We know that any finite commutative integral domain is a field of p^n elements where p is a prime and n is a positive integer. Similarly it can be shown that any finite non-commutative integral domain is a skew-field of p^n

elements where p is a prime and n is a positive integer. Hence any ring R of m elements where m is neither a prime nor a power of a prime must contain at least one zero divisor and in this connection we have the following Theorem 7 bearing in mind all the previous theorems of this paper.

Theorem 7. *Suppose R is a ring of characteristic k containing m elements ($m \geqq 3$) where m is neither a prime, nor a power of a prime we have the following possibilities:*

(i) *All elements of R are zero divisors.*

(ii) *All elements of R are only right (left) zero divisors while at least $p(\geqq 2)$ of them are left (right) zero divisors as well where $p = \sqrt{m} - 1$ or the greatest integer contained in $\sqrt{m}$ according as m is a square or not. In this case R possesses $l(\geqq 1)$ left (right) identities where l is a divisor of $m - p$ such that $l \leqq p \leqq m - l\phi(k)$.*

(iii) *At least p of the elements are two sided zero divisors and the rest are regular where $p = \sqrt{m} - 1$ or the greatest integer contained in $\sqrt{m}$ according as m is a square or not provided $p \geqq \phi(k)$.*

In conclusion the author desires to express his grateful thanks to Professor V. GANAPATHY IYER for the fruitful discussions and the invaluable guidance rendered to the author in the preparation of this paper.

References

[1] CLIFFORD, A. H.: A system arising from a weakend set of group postulates. Ann. Math. **34**, (2), 867—871 (1933).

[2] GANESAN, N.: Properties of rings with a finite number of zero divisors. Math. Ann. **157**, 215—218 (1964/65).

[3] JACOBSON, NATHAN: Lectures in Abstract Algebra. Vol. 1, Princeton-London-Toronto: Van Nostrand Company (1951).

[4] MANN, H. B.: On certain systems which are almost groups. Bull. Am. Math. Soc. **50**, 879—881 (1944).

[5] TAKAYUKI TAMURA, RUDOLPH B. MERKEL, and JACK F. LATIMER: The direct product of right singular semi-groups and certain groupoids: Proc. Am. Math. Soc. **14** (1), (1963).

[6] VAN DER WAERDEN, B. L.: Modern Algebra Vol. 1: Revised English Edition, New York: Frederick Ungar Publishing Co. (1953).

(Received November 7, 1964)

GILMER, R. W.
Math. Annalen 161, 247—254 (1965)

A Class of Domains in which Primary Ideals are Valuation Ideals

By

ROBERT W. GILMER in Tallahassee, Florida

0. Introduction

Let D be an integral domain with identity, let $\mathscr{V}$ be the collection of valuation ideals of D, and let $\mathscr{Q}$ be the set of primary ideals of D. In [2], integral domains were classified in which either $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{Q}$ or $\mathscr{V} = \mathscr{Q}$. It was also shown in [2] that a domain in which the ascending chain condition for prime ideals holds satisfies the condition $\mathscr{Q} \subseteq \mathscr{V}$ if and only if it is a Prüfer domain. This paper investigates additional domains in which $\mathscr{Q} \subseteq \mathscr{V}$. In section 1 we derive some fundamental relations concerning valuation ideals. In section 2 we introduce the notion of an S-domain and show that in such a domain each primary ideal is a valuation ideal. In section 3, we investigate more fully the connection between the notions "$\mathscr{Q}(D) \subseteq \mathscr{V}(D)$" and "$D$ is an S-domain".

The notation and terminology used is that of ZARISKI-SAMUEL [5], [6] with one exception. $\subset$ denotes proper containment and $\subseteq$ denotes containment. $\mathscr{Q}$ and $\mathscr{V}$ will designate sets of primary ideals, and valuation ideals, respectively. In particular, every domain considered is assumed to have an identity element.

1. Preliminaries on Valuation Ideals

To begin we collect some elementary facts about valuation ideals, many of which will be used in subsequent proofs. Unless stated otherwise, D_v denotes the valuation ring of a valuation v.

1.1. Proposition. *If A is a v-ideal of an integral domain D and n is a positive integer, let $A^{1/n} = \{x \in D \mid x^n \in A\}$. Then*

a) *$A^{1/n}$ is a v-ideal.*

b) *$A \subseteq A^{1/2} \subseteq A^{1/3} \subseteq \cdots \subseteq \sqrt{A} = P = \cup A^{1/n}$; P is a prime ideal.*

c) *If A is P-primary, $A^{1/n}$ is P-primary also.*

d) *$A^{1/n} = A^{1/n+1} = \cdots$ if and only if $P^n \subseteq A$.*

Proof. If $x^n, y^n \in A$, then $v(x+y) \geqq \min\{v(x), v(y)\}$ implies $(x+y)^n \in A$. Clearly $(rx)^n \in A$ for all $r \in D$. Hence $A^{1/n}$ is an ideal. If $x\xi \in A^{1/n} D_v \cap D$, $x \in A^{1/n}$ ($A^{1/n} D_v$ is generated by such elements), then $(x\xi)^n = x^n \xi^n \in A D_v \cap$ $\cap D = A$. Thus $x\xi \in A^{1/n}$ and $A^{1/n} = A^{1/n} D_v \cap D$. That is $A^{1/n}$ is a v-ideal.

The containment relations and the equality $P = \cup A^{1/n}$ are obvious. P is prime by [6; p. 342].

c) and d) are trivial.

1.2. Proposition. *If A is an ideal of a domain D such that A^n is a valuation ideal for each integer n, then*

a) *If A^{rs} is a v-ideal, then A^r is also a v-ideal.*

b) *Given n a positive integer, there is a valuation v such that $A, A^2, \ldots, A^n$ are v-ideals.*

c) *If $x \in A^k - A^{k+1}$ and $y \in A^t - A^{t+1}$, then $xy \in A^{k+t} - A^{k+t+2}$.*

Proof. We have $A^r D_v \cap D \supseteq A^r$. If $a \in A^r D_v \cap D$, then $a^s \in A^{rs} D_v \cap D = A^{rs}$. Because A^r is a valuation ideal, $a \in A^r$ [2; Corollary 2.9].

b) follows by observing that $A^{n!}$ is a valuation ideal and by applying a).

Choose v so that $A, A^2, \ldots, A^{k+t+2}$ are v-ideals. Then we have $xD_v \supset A^{k+1}D_v$ and $yD_v \supset A^{t+1}D_v$. Multiplying the first of these relations by yD_v and the second by $A^{k+1}D_v$ we obtain: $xyD_v \supset A^{k+1}yD_v$ and $A^{k+1}yD_v \supseteq A^{k+t+2}D_v$. Thus $xyD_v \supset A^{k+t+2}D_v$ so that $xy \notin A^{k+t+2}$.

1.3. Corollary. *If each power of the ideal A is a valuation ideal, then $\cap A^n$ is prime.*

Proof. Apply 1.2 c).

1.4. Corollary. *If A is an ideal of a valuation ring such that $A^n = A^{n+1}$ for some n, then A is an idempotent prime ideal.*

Proof. By 1.3 $A^n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A^k$ is a prime ideal. Hence $A = A^2 = A^n$.

1.5. Corollary. *If A is a valuation ideal such that $A^n = A^{n+1}$ for some n, then A is prime.*

Proof. If A is a v-ideal then $(AD_v)^n = (AD_v)^{n+1}$. By 1.4, AD_v is prime so that $AD_v \cap D = A$ is prime in D.

1.6. Lemma. *Suppose P is a prime ideal of a valuation ring R such that $P = \sqrt{Q}$ for some ideal $Q \subset P$. There exists a prime ideal $M \subset R$ such that there are no prime ideals properly between M and P. If A and B are ideals of R such that $M \subset B \subseteq A \subset P$, then B properly contains a power of A.*

Proof. Since $\sqrt{Q} = P$, $Q \supset P_a$ for each prime $P_a \subset P$. Thus $Q \supset P_0 = \cup P_a$ since P_0 is prime. It follows that for $q \in P - Q$, $P = \sqrt{(q^2)}$. Hence $q^2 D_P \cap D$ is a P-primary ideal properly contained in P. The existence of the ideal M then follows from [2; Lemma 2.12]. Now by 1.3, $P' = \cap A^n$ is a prime ideal. By the hypothesis concerning P and M, $P' \subseteq M \subset B$. Therefore, $B \nsubseteq A^n$ for some n — that is, $B \supset A^n$ for some n.

1.7. Theorem. *Suppose P is a prime ideal of a domain D, that every P-primary ideal of D is a valuation ideal, and that $Q \subset P$ is P-primary. If Q_0 is P-primary, then $Q_0 \supseteq Q^{(n)}$ for some n.*

Proof. Since every PD_P-primary ideal of D_P is a valuation ideal [2; Corollary 2.6], there is no loss of generality in assuming P is the maximal ideal of a quasi-local domain D. We must then show that $Q_0 \supseteq Q^n$ for some n.

Each power of Q is P-primary and therefore is a valuation ideal. By 1.3, $M = \cap Q^n$ is a prime ideal. The ideal PQ_0 is P-primary and is therefore not contained in Q^n for some n. This implies $Q^n Q_0 \subset PQ_0$. If now $Q^n Q_0$ is a v-ideal, we have $Q^n Q_0 D_v \supsetneq PQ_0 D_v$ and consequently, $Q^n D_v \subset PD_v$. It follows that

$Q^n Q_0 D_v \subseteq Q^n D_v \subset P D_v \subseteq P_v = \sqrt{P D_v} = \sqrt{Q^n D_v}$. By Lemma 1.6 $(Q^n D_v)^k = Q^{nk} D_v \subseteq Q^n Q_0 D_v$ for some k. Therefore $Q^{nk} \subseteq Q^{nk} D_v \cap D \subseteq Q^n Q_0 D_v \cap D = Q^n Q_0 \subseteq Q_0$. This completes the proof.

Theorem 1.7 answers a question raised in [2]. Namely, if every P-primary ideal is a valuation ideal, if $Q \subset P$ is P-primary, if A_2 is the intersection of all P-primary ideals of D, and if $A_1 = \cap Q^{(n)}$, then A_1 and A_2 are prime and $A_2 \subseteq A_1 \subset P$. Theorem 1.7 shows that A_1 and A_2 are equal.

It is possible to generalize Theorem 1.7 slightly.

1.8. Theorem. *Let A be a v-ideal with radical P. If $Q \subset P$ is P-primary and if every P-primary ideal is a valuation ideal, then A contains a power of Q.*

Proof. 1.8 follows immediately from 1.7 and the following lemma.

1.9. Lemma. *If A is a v-ideal with radical P, then A contains a P-primary ideal.*

Proof. We assume $A \subset P$. Then $A D_v \subset P D_v \subseteq P_v = \sqrt{P D_v}$ and P_v is prime. If $p \in P D_v - A D_v$, then $A D_v \subset p D_v \subseteq P_v$ so that $P_v = \sqrt{p D_v}$. Now if $p^k \in A$ and if Q_v is the isolated P_v-primary component of $p^{k+1} D_v$, $p^k \notin Q_v$. Hence $Q_v \subset p^k D_v \subseteq A D_v \subset P_v$ so that $Q = Q_v \cap D$ is primary for P. Further $Q \subseteq A$.

1.10. Proposition. *Suppose Q is an ideal of a domain D such that the ideal C generated by $\{q^k \mid q \in Q\}$ is a v-ideal. Then $C = Q^k$.*

Proof. Clearly $C \subseteq Q^k$. Q^k is generated by all products $q = q_1 q_2 \ldots q_k$ where $q_1, \ldots, q_k \in Q$. If $v(q_r) = \min\{v(q_1), \ldots, v(q_k)\}$, then $q \in q_r^k D_v \subseteq C D_v$. Hence $q \in C = C D_v \cap D$ and $Q^k \subseteq C$.

2. S-ideals and S-domains

We now turn to an investigation of a class of domains we call S-domains. Our definitions are motivated by Theorem 2.1 and the following result (Theorem 4.3 and the proof of Theorem 3.3) from [2] which we designate as (*) for convenience:

(*) *Let D be a domain and $M \supset N$ prime ideals of D such that M is a minimal prime of $N + A$ for some finitely generated ideal A and such that every M-primary ideal is a valuation ideal. Let P be the intersection of the M-primary ideals. Then P is a prime ideal such that $N \subseteq P \subset M$ and there exists no prime ideal P_1 with $P \subset P_1 \subset M$. In fact, if $P_1 \subset M$, then $P_1 \subseteq P$.*

With the same hypothesis as in (*) we prove

2.1. Theorem. *The M-primary ideals are linearly ordered.*

Proof. If D, M, N, A, and P are replaced by D_M, $M D_M$, $N D_M$, $A D_M$, and $P D_M$, respectively, the hypotheses still hold [2; Corollary 2.1]. Hence we assume D is quasi-local and M is maximal in D. Then if $t \in M - P$, $P + (t)$ has radical M and is therefore M-primary. Now if $x, y \in M - P$, then $P + (xy)$ is a valuation ideal. Hence $x^2 \in P + (xy)$ or $y^2 \in P + (xy)$. This implies $x \in P + (y)$ or $y \in P + (x)$. Consequently, D/P is a rank one valuation ring. Hence every nonzero proper prime ideal of D/P is M/P-primary. The definition of P shows P is contained in each M-primary ideal. It follows that the set of M-primary ideals is linearly ordered.

We now make the following definitions:

Let D be an integral domain. An ideal P of D is said to be an *S-ideal* provided: a) P is prime, b) the set of P-primary ideals is linearly ordered, c) the intersection of all P-primary ideals is a prime ideal M, and d) M contains each prime ideal properly contained in P. D is said to be an S-domain if each prime ideal of D is an S-ideal.

Any valuation ring is an S-domain. More generally, any Prüfer domain is an S-domain [4]. If $\mathcal{Q}(D) \subseteq \mathcal{V}(D)$, (*) and Theorem 2.1 show that if M is a minimal prime of $N + A$ for some prime ideal $N \subset M$ and some finitely generated ideal A, then M is an S-ideal. The following theorem represents a partial converse of 2.1 and (*).

2.2. Theorem. *Let M be an S-ideal of a domain D and let P be the intersection of all M-primary ideals of D. If v is a valuation such that M and P are v-ideals, then every M-primary ideal is also a v-ideal.*

Proof. We first prove a lemma.

2.3. Lemma. *Let P be a prime ideal of a domain D and let M be a multiplicative system disjoint from P. Then P is an S-ideal if and only if PD_M is an S-ideal.*

Proof of 2.3. The proof follows easily from the one-to-one correspondence between primary (prime) ideals of D contained in P and primary (prime) ideals of D_M contained in PD_M [5; pp. 223—225] and from the following equality: if $\{Q_\lambda\}$ is the set of P-primary ideals of D, then $\cap Q_\lambda D_M = (\cap Q_\lambda)D_M$. That $(\cap Q_\lambda)D_M \subseteq \cap Q_\lambda D_M$ is clear. If $d/m \in Q_\lambda D_M$, however, where $d \in D$, $m \in M$, then $d/m = q/n$ for some $q \in Q_\lambda n \in M$. Thus $dn = qm \in Q_\lambda$, $n \notin \sqrt{Q_\lambda}$ so that $d \in Q_\lambda$. It follows that $d/m \in \cap Q_\lambda D_M$ implies $d/m \in (\cap Q_\lambda)D_M$.

We proceed with the proof of 2.2. The preceding lemma shows that there is no loss of generality in assuming that D is quasi-local and M is maximal in D. We first show that if $x \in M - P$, $P + (x)$ is a v-ideal. Now $x \notin P = PD_v \cap D$ so that $MD_v \supseteq xD_v = [P + (x)]D_v$. Thus $P + (x) \subseteq xD_v \cap D$. Now if $\xi \in D_v$ is such that $x\xi \in D$, we wish to show $x\xi \in P + (x)$. If $x\xi \in P$, this is the case. But if $x\xi \in M - P$, then $P + (x\xi)$ is M-primary. Hence either $x \in P + (x\xi)$ or $x\xi \in P + (x)$. By [6; p. 325] there exists a prime ideal P_v of D_v lying over P. Now if $x = p + rx\xi$, $p \in P$, $r \in D$, then $x(1 - r\xi) \in P_v$, $x \notin P_v$, so that $1 - r\xi \in P_v$. This implies that $rD_v = D_v$; hence $r \notin M$ and r is a unit of D. Consequently, $x\xi = r^{-1}(x - p) \in P + (x)$. This shows $P + (x)$ is a v-ideal.

Now suppose A is any M-primary ideal. Every element of AD_v is of the form $a\xi$ for some $a \in A$, $\xi \in D_v$. If then $a\xi \in D$, we have $a\xi \in [P + (a)]D_v \cap D = P + (a) \subseteq A$. We conclude that A is a v-ideal.

2.4. Corollary. *If D is an S-domain, then $\mathcal{Q}(D) \subset \mathcal{V}(D)$. In fact, if $\{Q_\alpha\}$ is the collection of M-primary ideals of D for a fixed prime ideal M, then each Q_α is a primary v-ideal in the sense that each Q_α is the contraction to D of a primary ideal of a fixed valuation ring containing D.*

Proof. Let $P = \cap Q_\alpha$. There is a valuation w such that P and M are w-ideals [3; p. 37]. If $M_w = \sqrt{MD_w}$, then M_w is prime in D_w. Further $D_v = (D_w)_{M_w}$ is the valuation ring of a valuation v such that P and M are v-ideals. By 2.2,

each Q_a is a v-ideal. But $\sqrt{Q_a D_v} = \sqrt{M D_v} = M_w D_v$ is maximal in D_v so that $Q_a D_v$ is primary in D_v.

More general statements of 2.4 can be made, but their proofs are analogous to the above. For S-domains the following holds.

2.5. Corollary. *Let D be an S-domain. If Q_1 and Q_2 are primary ideals for P_1 and P_2, respectively, where $P_1 \subset P_2$, then Q_1 and Q_2 are v-ideals for some valuation v.*

Proof. Let N_i be the intersection of all P_i-primary ideals. Then N_i is prime and $N_1 \subseteq P_1 \subseteq N_2 \subseteq P_2$ since D is an S-domain. Now apply [3; p. 37] and 2.2.

2.6. Proposition. *Suppose M is a prime ideal of a domain D such that there exists $Q \neq M$ such that Q is M-primary. Suppose further that each M-primary ideal of D is a valuation ideal. Then M is an S-ideal if and only if M is a minimal prime of a principal ideal.*

Proof. That the given condition is necessary follows immediately from the definition of an S-ideal. The converse follows from (*) and 2.1.

3. Domains in which Primary Ideals are Valuation Ideals

We are unable to prove that $\mathcal{Q}(D) \subset \mathcal{V}(D)$ implies D is an S-domain. Proposition 2.14 of [2] shows that if every M-primary ideal of D is a valuation ideal, then the intersection P of all M-primary ideals is a prime ideal. Theorem 2.1 and (*) show that *if there are no prime ideals properly between P and M*, then M is an S-ideal. To show there are no prime ideals between P and M we must show that if P_1 is a prime ideal properly contained in M and if Q is M-primary, then $P_1 \subset Q$. The problem here is that while we can find a valuation v such that P_1 and M are v-ideals, we may not be able to find any v such that P_1 and Q are v-ideals. The remainder of this section is devoted to an investigation of the concepts $\mathcal{Q}(D) \subseteq \mathcal{V}(D)$ and D is an S-domain.

3.1. Theorem. *Suppose the domain D is such that $\mathcal{Q}(D) \subseteq \mathcal{V}(D)$ and that D has the property that given prime ideals P_1, P_2 such that $P_1 \subset P_2$ and a P_2-primary ideal Q_2, there exists Q_1 a P_1-primary ideal, such that $Q_1 \subset Q_2$. Then D is an S-domain.*

Proof. We must show that if M is a prime ideal and if P is the intersection of all M-primary ideals, then there are no prime ideals between P and M. Suppose this is not the case and let $P \subset P_1 \subset M$, P_1 prime. We choose $x \in M - P_1$ and let P_2 be a minimal prime of $P_1 + (x)$ contained in M. By (*), $P_2 \subset M$. The hypothesis on D implies that the intersection P_3 of all P_2-primary ideals is contained in P, the intersection of all M-primary ideals. But P_2 is an S-ideal and hence $P \subset P_1 \subseteq P_3$. This contradiction shows that D is an S-domain as asserted.

In the proof above, we note that we need only know that if Q is M-primary, then Q contains a P_2-primary ideal where $P_2 \subset M$ and P_2 is a minimal prime of $P_1 + (x)$, P_1 prime, $P_1 \subset P_2$. If Q_2 is the isolated primary component of $P_1 + (x^2)$ belonging to P_2, then we have $QQ_2 \subseteq Q_2 \subset P_2$ and $\sqrt{QQ_2} = P_2$. It would then be sufficient to know QQ_2 contains a P_2-primary ideal. In particular,

1.9 shows that if $\mathscr{S}(D)$, the set of ideals of D with prime radical, is a subset of $\mathscr{V}(D)$ (the inclusion $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{S}$ holds for any domain by 1.1 b)), then D is an S-domain.

Summarizing we have:

3.2. Theorem. *If $\mathscr{S}(D) \subseteq \mathscr{V}(D)$, then D is an S-domain.*

The converse of Theorem 3.2 does not hold. To see this, we use the following lemma.

3.3. Lemma. *Suppose D is a quasi-local domain such that the set of primary ideals of D is linearly ordered. Then D is an S-domain.*

Proof. It is only necessary to show that if M is a prime ideal of D and if A is the intersection of the M-primary ideals of D, then A is prime. For these purposes, we may assume M is maximal in D. If $A = M$, then A is prime. If $A \subset M$ and if P is the union of all prime ideals properly contained in M, then $P \subseteq A$ since P is prime and each M-primary ideal contains P. We suppose $P \subset A$. Then if $a \in A - P$, $P + (a^2)$ is P-primary and is properly contained in A. This contradicts our choice of A. Therefore $A = P$ and A is prime as asserted.

Now let $X_1, X_2, \ldots$ be algebraically independent elements over a field k having a proper subfield k_0. Let v be a valuation of $k(X_1, X_2, \ldots)$ over k such that $v(X_i) > v(X_{i+1}^m)$ for all i and m and such that $X_1, X_2, \ldots$ generate the maximal ideal M_v of D_v. Let $D = k_0 + M_v$. In section 5 of [2], it is shown that D is quasi-local and that if A is a proper primary ideal of D, then A is an ideal of D_v. Because the *ideals* of D_v are linearly ordered, the primary ideals of D are linearly ordered. Lemma 3.3 then implies that D is an S-domain. But $\mathscr{S}(D) \subsetneq \mathscr{V}(D)$ for if $\xi \in D_v - D$, then $\xi X_1 D$ is not a valuation ideal.

A further relation between "$\mathscr{Q}(D) \subseteq \mathscr{V}(D)$" and "$D$ an S-domain" may be stated in terms of the notion of a branched prime ideal, a concept we presently define.

A prime ideal P of a commutative ring R is said to be *branched* if there exists $Q \subset P$ such that Q is P-primary. Otherwise we say P is *unbranched.*

Fundamental to our consideration is the fact that if P is a minimal prime of $P_1 + (x)$ for some prime $P_1 \subset P$, then P is branched.

3.4. Lemma. *If P is an unbranched nonzero proper prime ideal of a domain D, P is the union of a chain of branched prime ideals. If D is an S-domain, the converse also holds.*

Proof. Let $\mathscr{Q}$ be the collection of all chains of branched prime ideals of D properly contained in P. $\mathscr{Q}$ is inductive under the partial ordering $\subseteq$ on $\mathscr{Q}$. By Zorn's lemma, $\mathscr{Q}$ contains a maximal element $\mathscr{B} = \{P_a\}$. If $M = \cup P_a$, then $M = P$, for otherwise we could choose $t \in P - M$ and a minimal prime P_0 of $M + (t)$ contained in P. Then $\mathscr{B}' = \mathscr{B} \cup \{P_0\}$ is in $\mathscr{Q}$ and properly contains $\mathscr{B}$, a contradiction. Hence $M = P = \cup P_a$.

By Proposition 2.6, a branched prime ideal P of an S-domain is a minimal prime of some principal ideal (x). Thus if $P_a \subset P$, $x \notin P_a$. Hence P is not the union of a chain of prime ideals properly contained in P.

3.5. Theorem. *If $\mathcal{Q}(D) \subseteq \mathcal{V}(D)$ and if each prime P of D which is the union of a chain of primes properly contained in P is unbranched, then D is an S-domain.*

Proof. The hypothesis implies that if P is a branched prime ideal of D then there exists a prime ideal $M \subset P$ such that there are no prime ideals properly between M and P. Then (*) and 2.1 show that P is an S-ideal. On the other hand, any unbranched prime ideal is an S-ideal.

3.6. Theorem. *The following are equivalent conditions on an integral domain D:*

(a) *D is a Prüfer domain in which the ascending chain condition (a.c.c.) for prime ideals holds.*

(b) *D is an S-domain in which each prime ideal is branched.*

(c) *$\mathcal{Q}(D) \subseteq \mathcal{V}(D)$ and given M prime in D, there exists a prime ideal $P \subset M$ such that there are no primes properly between P and M.*

Proof. (a) implies (b) by previous remarks.

(b) implies (c); trivial.

(c) implies (a): In view of Theorem 3.8 of [2], it suffices to show the a.c.c. for prime ideals holds. Thus if $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots$ is a chain of prime ideals and if $M = \cup P_i$, then M is prime. Let P be a prime ideal such that $P \subset M$ and there are no prime ideals properly between P and M. Now M is an S-ideal and $\cup P_i \nsubseteq P$. Hence for some n, $P_n \subset M$ — that is, $P_n = M$.

3.7. Theorem. *Suppose $\mathcal{Q}(D) \subseteq \mathcal{V}(D)$. D is an S-domain if and only if each branched prime ideal of D is a minimal prime of a principal ideal.*

Proof. Apply (*), 2.1, and 2.6.

As stated previously, we are unable to prove that a domain D in which each primary ideal is a valuation ideal is an S-domain. For example, if D is quasi-local with maximal ideal M, then for Q_1, Q_2 M-primary, $Q_1^2 \subseteq Q_1Q_2$ or $Q_2^2 \subseteq Q_1Q_2$ since Q_1Q_2 is a valuation ideal. Hence $Q_1^2 \subseteq Q_2$ or $Q_2^2 \subseteq Q_1$. But we are unable to show that the M-primary ideals are linearly ordered. But with a hypothesis slightly stronger than $\mathcal{Q}(D) \subseteq \mathcal{V}(D)$, this conclusion does hold.

3.8. Theorem. *Suppose P is a prime ideal of a domain D such that given Q_1, Q_2 primary for P with $Q_1 \subseteq Q_2$ there is a valuation v such that Q_1 and Q_2 are v-ideals. Then the P-primary ideals are linearly ordered.*

Proof. Without loss of generality we assume D is quasilocal with maximal ideal P. As noted above, given Q_1 and Q_2 primary for P, either $Q_1^2 \subseteq Q_2$ or $Q_2^2 \subseteq Q_1$. Say $Q_1^2 \subseteq Q_2$. By hypothesis, there is a valuation v such that Q_1^2 and Q_2 are v-ideals. Now if $Q_2D_v \supseteq Q_1D_v$, then $Q_2 \supseteq Q_1$. If $Q_2D_v \subset Q_1D_v$, then $Q_2^2 \subseteq Q_1^2$ and thus $Q_1 \supseteq Q_2$ by [2; Corollary 2.9].

Finally we prove that the converse of 2.5 holds.

3.9. Theorem. *Let D be a domain such that given Q_1, Q_2 primary for P_1, P_2, respectively, where $P_1 \subseteq P_2$, there is a valuation v such that Q_1 and Q_2 are v-ideals. Then D is an S-domain.*

Proof. If P and M are prime ideals of D such that $P \subset M$ and if Q is M-primary, P and Q are v-ideals for some v. Hence $P \subseteq Q$ or $Q \subseteq P$. Obviously the latter does not hold. Thus $P \subset Q$. The conclusion now follows from the remarks preceding 3.1.

References

[1] GILMER, R. W.: Some containment relations between classes of ideals of a commutative ring. Pacific J. Math. **51**, 1—6 (1965).
[2] —, and J. OHM: Primary ideals and valuation ideals. Trans. Am. Math. Soc. **114**, 40—52 (1965).
[3] NAGATA, M.: Local rings. Interscience (1962).
[4] OHM, J.: Ideal theory in Prüfer domains. I Primary Ideals. Submitted to Trans. Am. Math. Soc.
[5] ZARISKI, O., and P. SAMUEL: Commutative algebra. Vol. I. Princeton: van Nostrand 1958.
[6] — Commutative algebra. Vol. II. Princeton: van Nostrand 1961.

(Received November 9, 1964)

BAAYEN, P. C. and G. HELMBERG
Math. Annalen 161, 255—278 (1965)

On Families of Equi-Uniformly Distributed Sequences in Compact Spaces

By

P. C. BAAYEN in Amsterdam and G. HELMBERG in Eindhoven

1. Introduction and preliminaries

Let X be a compact Hausdorff space, let μ be a regular normed Borel measure on X, and let $C(X)$ be the Banach space (under uniform norm $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$) of all complex-valued continuous functions f on X. Identifying measure and corresponding integral on $C(X)$ we shall use the notation $\mu(f) = \int_X f(x)\, d\mu(x)$. A family $\mathfrak{S} = \{(x_{\sigma,n})_{n=1}^{\infty} : \sigma \in S\}$ of sequences in X is called a *family of equi-μ-uniformly distributed sequences* (in German: *„gleichmäßig μ-gleichverteilt"*) if for every $f \in C(X)$ and for every real number $\varepsilon > 0$ there exists an integer $N(f, \varepsilon)$, indepedent of σ, such that

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_{\sigma,n}) - \mu(f) \right| \leqq \varepsilon \quad \textit{for all} \quad N \geqq N(f, \varepsilon) \tag{1}$$

and for all $\sigma \in S$ (HLAWKA [10]).

The question arises as to the possible size of such a family $\mathfrak{S}$, both from the topological and from the measure-theoretic point of view (section 4). This question may be modified by restricting attention to sequences of a special type only, such as the tail sequences of a given μ-uniformly distributed sequence (section 5, 6) or the sequences formed by the successive powers of a generator in a compact monothetic group (section 2, 3). In all of these modifications, a common feature of the answers to the above mentioned questions is the following: such a family $\mathfrak{S}$ will in general be in some (topological) sense nowhere dense, it may be enlarged to one which is in some (topological) sense closed, and if the set of all sequences in question in some natural sense is given the measure 1, then $\mathfrak{S}$ may have measure abitrary close to 1.

Before taking up the subject in detail we mention two facts which we shall have to use. First, in order to show that the sequences of a certain family $\mathfrak{S}$ are equi-μ-uniformly distributed it obviously suffices to establish (1) for the functions f of a fixed set $F \subset C(X)$ having the property that finite complex linear combinations of elements of F are uniformly dense in $C(X)$ ([10] § 2, [12] Satz 4). This fact will in the following be refered to as *Weyl's criterion*.

Secondly we note that in the definition given above, $C(X)$ may be replaced by the set of all real-valued Borel measurable functions f on X having the

following property: for every $\eta > 0$ there exist real-valued continuous functions f_1, f_2 such that $f_1 \leqq f \leqq f_2$ and $\mu(f_2 - f_1) \leqq \eta$. Indeed, we then have

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(x_{\sigma,n}) - \mu(f_1) - \eta \leqq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(x_{\sigma,n}) - \mu(f_2) \leqq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_{\sigma,n}) - \mu(f) \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_2(x_{\sigma,n}) - \mu(f_1) \leqq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_2(x_{\sigma,n}) - \mu(f_2) + \eta$$

and therefore

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_{\sigma,n}) - \mu(f)\right| \leqq$$
$$\leqq \max\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(x_{\sigma,n}) - \mu(f_1)\right|, \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_2(x_{\sigma,n}) - \mu(f_2)\right|\right\} + \eta\,. \tag{2}$$

Since η is arbitrary it is indeed possible to choose $N(f, \varepsilon)$ so large that for all $N \geqq N(f, \varepsilon)$ the right hand member is smaller than a given $\varepsilon > 0$, uniformly in σ.

As a consequence, if $\mathfrak{S} = \{(x_{\sigma,n})_{n=1}^{\infty} : \sigma \in S\}$ is a family of equi-μ-uniformly distributed sequences, (1) will hold for any complex-valued (Borel measurable) function f whose discontinuities are contained in a closed μ-zero set, in particular for every characteristic function χ_A of a subset A of X whose boundary has μ-measure zero and for the product of χ_A with any function $f \in C(X)$ (cf. [12] Satz 6, [7] I.).

As a case of particular interest, we already mentioned the set of sequences $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ if X is a compact monothetic group and if a runs through the generators of X. Here, because of the one-to-one correspondence between generators and sequences, the answers to the questions referred to above may be given by statements about sets of generators of X. Since it is both instructive and convenient for our later considerations, we shall first deal with the special case of uniform distribution mod 1 before passing on to more general situations.

Some of the results of sections 2 and 3 have been announced by the authors in a talk given in October 1963 in the colloquium on uniform distribution at the Mathematical Center in Amsterdam.

2. Uniform distribution mod 1

Let X be the additive group of reals mod 1 and let μ be ordinary Lebesgue measure on $[0, 1[$. It is well known that the sequence $(na)_{n=1}^{\infty}$ is (μ-)uniformly distributed mod 1 iff a is irrational. Taking in Weyl's criterion for F the set of functions $f_k(x) = e^{2\pi i k x}$ (k an integer) we find that necessary and sufficient for the sequences $(x_{\sigma,n})_{n=1}^{\infty}$ ($\sigma \in S$) to be equi-uniformly distributed mod 1 is the existence, for every integer $k \geqq 1$ and for every real number $\varepsilon > 0$, of an integer $N(k, \varepsilon)$, independent of σ, such that

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k x_{\sigma,n}}\right| \leqq \varepsilon \quad \textit{for all} \quad N \geqq N(k, \varepsilon) \tag{3}$$

and for all $\sigma \in S$. In what follows we shall denote by $[a]$ the greatest integer in a and by $\hat{a} = a - [a]$ the residue of a mod 1. This should not cause confusion with the further use of brackets when replacing parentheses or signalling open or closed intervals.

Theorem 1. *Let A be a set of irrational numbers such that the sequences $(na)_{n=1}^{\infty}$ $(a \in A)$ are equi-uniformly distributed* mod 1. *Then the set of residues* mod 1 $\hat{A} = \{\hat{a} : a \in A\}$ *is nowhere dense in* $[0, 1[$.

Proof. Assume the contrary. Then we can find an integer $k \geqq 1$ such that the set kA is dense in $[0, 1[$ (mod 1). Given any integer $N \geqq 1$ and any real number δ $(0 < \delta < 1)$ we can therefore find a number $a \in A$ such that $ka \in \left[0, \frac{\delta}{N}\right[$ (mod 1) and, *a fortiori*, $nka \in [0, \delta[$ (mod 1) for $1 \leqq n \leqq N$. Thus, for these n, if δ has been chosen small enough, $e^{2\pi i n k a}$ is close to 1 and so is $\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i n k a}\right|$, in contradiction to (3).

Corollary 1.1. *Let a be irrational. Then the sequences $(nma)_{n=1}^{\infty}$ $(m = 1,2,\ldots)$ are not equi-uniformly distributed* mod 1.

Corollary 1.2. *The family of all sequences $(na)_{n=1}^{\infty}$ (a irrational) is not the union of countably many families of* mod 1 *equi-uniformly distributed sequences.*

Corollary 1.3. *Let A and $\hat{A}$ be as in theorem* 1. *Then $\hat{A}$ has outer Lebesgue measure smaller than* 1.

Theorem 2. *Let δ $(0 < \delta < 1)$ be given. Then there exists a closed nowhere dense set A of irrational numbers in $[0, 1[$ such that $\mu(A) \geqq 1 - \delta$ and such that the sequences $(na)_{n=1}^{\infty}$ $(a \in A)$ are equi-uniformly distributed* mod 1.

Proof. For every integer $k \geqq 1$ we choose a real number $c_k > 0$ in such a way that

$$\mu\{x \in [0, 1[: |e^{2\pi i k x} - 1| < c_k\} \leqq \frac{\delta}{2^k}.$$

Let $A_k = \{x \in [0, 1[: |e^{2\pi i k x} - 1| \geqq c_k\}$ and let $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Then A is closed, consists of irrational numbers only, and we have $\mu(A) \geqq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = 1 - \delta$. Furthermore, for any $k \geqq 1$ and for any $a \in A$ we have

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i n k a}\right| = \frac{1}{N}\left|\frac{e^{2\pi i N k a} - 1}{e^{2\pi i k a} - 1}\right| \leqq \frac{2}{N c_k}.$$

Thus, by Weyl's criterion, the sequences $(na)_{n=1}^{\infty}$ $(a \in A)$ are equi-uniformly distributed mod 1 and A is nowhere dense by theorem 1.

3. Uniform distribution in compact monothetic groups

Let X be a compact group which, as a topological space, is Hausdorff, and let μ be normed Haar measure on X. The group X is called *monothetic* if there is at least one element $a \in X$ (called "*generator*") such that the sequence $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ is everywhere dense in X (VAN DANTZIG [2]; cf. [4], [9] II § 9). As a consequence, a compact monothetic group is abelian. If a is a generator

(and only in this case), the sequence $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ is μ-uniformly distributed [3]. If $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ is any μ-uniformly distributed sequence in X, then the sequences $(x_n y)$ $(y \in X)$ are equi-μ-uniformly distributed [10]. We denote by $\overline{A}$ the closure of a subset A of X. In the rest of this section, we shall omit explicit reference to Haar measure μ in statements concerning uniform distribution.

Theorem 3. *Let A be a set of generators of X such that the sequences $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ $(a \in A)$ are equi-uniformly distributed. Then also the sequences $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ $(a \in \overline{A})$ are equi-uniformly distributed.*

Proof. Let $f \in C(X)$ and $\varepsilon > 0$ be given. Suppose we have

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(a^n) - \mu(f)\right| \leqq \varepsilon \quad \text{for all} \quad N \geqq N(f, \varepsilon) \tag{4}$$

and for all $a \in A$. Then, since $f(x^n)$ is a continuous function of x for every n, (4) also holds for all $a \in \overline{A}$.

We note that theorem 3 yields another proof of theorem 1 which may be regarded as a corollary of theorem 3. Indeed, if A satisfies the hypotheses of theorem 1 and if $\overline{A} \pmod 1$ contained an open interval, then $\overline{A}$ would have to contain rational numbers which certainly are no generators. We may generalize the statement of theorem 1 in the following form:

Theorem 4. *Let X be not totally disconnected and let A be a set of generators of X such that the sequences $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ $(a \in A)$ are equi-uniformly distributed. Then A is nowhere dense.*

Proof. By Pontrjagin's duality theorem ([18] theorem 46, [9] theorem 24.26) there exists a continuous character d of X such that $d(X) = \{d(x) : x \in X\}$ is the entire circle group T. By theorem 3, without loss of generality we may assume A to be closed. If A contained an open subset of X then $d(A)$ would have to contain an open interval in T since d is an open mapping of X onto T. On the other hand, since d is a continuous homomorphism, $d(A)$ would have to consist of generators of T only, a contradiction.

Corollary 4.1. *Suppose that X is connected and a is a generator of X. Then the sequences $((a^m)^n)_{n=1}^{\infty}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ are uniformly distributed but not equi-uniformly distributed.*

Proof. Since X is connected iff its dual group is torsion-free ([18] theorem 46, [9] theorem 24.25), we have $d(a^m) = d^m(a) \neq 1$ for every non-trivial character d of X and for every integer $m \geqq 1$. Thus, a^m is a generator of X ([9] theorem 25.11). The second assertion follows from theorem 4 since the sequence $(a^m)_{m=1}^{\infty}$ is everywhere dense in X.

We note that, by theorem 4, the second assertion of Corollary 4.1 even holds if X is not totally disconnected, but in this case a^m need not any more be a generator for every $m \geqq 2$. For convenience of notation we shall denote the set of all generators of X by G.

Corollary 4.2. *Suppose that X is connected and satisfies the second axiom of countability. Then the family of all sequences $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ $(a \in G)$ is not the union of countably many families of equi-uniformly distributed sequences.*

Proof. Under the stated hypotheses, G is a set of second category in X ([4], cf. [9] 25.27).

Corollary 4.3. *Let X and A be as in theorem 4. Then $\mu(\overline{A}) < 1$.*

Proof. If $\mu(\overline{A}) = 1$, then $\overline{A}$ would have to be everywhere dense in X since every open set has positive Haar measure.

If X is totally disconnected, the assertion of theorem 4 may fail to hold. In fact, the sequences $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ $(a \in G)$ will be equi-uniformly distributed (see theorem 5 below) and G may be open (see example following corollary 5.1 below). In order to show this we first establish an auxiliary result. We note that, in the absence of the second axiom of countability, Zorn's lemma is used in the proof.

Lemma 1. *Let d be a continuous character of X having the property that $d(X) = T$. Then, for every irrational number α there exists a generator $a \in G$ such that $d(a) = e^{2\pi i\alpha}$.*

Proof. Let $D = \{d_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ be a complete system of different continuous characters of X, let d_0 be the trivial character $(d_0 \equiv 1)$, and let $d_1 = d$. Since X is monothetic there is at least one generator $b \in G$. Suppose $d_\lambda(b) = e^{2\pi i \beta_\lambda}$ $(\beta_0 = 1)$. By assumption $(d_1(X) = T)$, β_1 is irrational. Let T_Λ be the topological direct product $T_\Lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$ $(T_\lambda = T$ for all $\lambda \in \Lambda)$.. It is well known that the mapping $\varphi : x \to \hat{x} = (d_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda} \in T_\Lambda$ is a topological isomorphism of X onto a closed subgroup $\hat{X} = \varphi(X)$ of T_Λ. In fact, $\hat{X}$ is the closure (with respect to the product topology in T_Λ) of the sequence $(\hat{b}^n)_{n=1}^{\infty} \subset T_\Lambda$. (The notation is chosen for technical reasons and should not be confused with the notation for residues mod 1 in section 2).

We now choose a maximal system of exponents β_λ, linearly independent over the field of rational numbers and including $\beta_0 = 1$ and β_1. We denote by $D' = \{d_{\lambda'} : \lambda' \in \Lambda'\}$ the corresponding subsystem of D. We now define an element $\hat{a}$ of T in the following way: first we choose arbitrarily a set of real numbers $\alpha_{\lambda'}$ $(\lambda' \in \Lambda')$, linearly independent over the field of rational numbers and including $\alpha_0 = 1$ and $\alpha_1 = \alpha$ (this may even be done by changing at most two of the numbers $\beta_{\lambda'}$). Then we define α_λ for $\lambda \in \Lambda \backslash \Lambda'$ by writing β_λ as a finite linear combination of $\beta_{\lambda'}$'s with rational coefficients and replacing every $\beta_{\lambda'}$ by $\alpha_{\lambda'}$. Now we put $\hat{a} = (e^{2\pi i \alpha_\lambda})_{\lambda \in \Lambda} \in T_\Lambda$. If

$$U(\hat{a}; \lambda_1, \ldots, \lambda_m; \varepsilon) = \{x = (e^{2\pi i \xi_\lambda})_{\lambda \in \Lambda} \in T_\Lambda : |e^{2\pi i \xi_{\lambda_k}} - e^{2\pi i \alpha_{\lambda_k}}| < \varepsilon,\ k = 1, \ldots, m\}$$

is an arbitrary neighbourhood of $\hat{a}$ in T_Λ, then we can find an integer n (not necessarily positive) such that $\hat{b}^n \in U(\hat{a}; \lambda_1, \ldots, \lambda_m; \varepsilon)$. Indeed, because of our construction of α_λ, for any lattice point $(h_{\lambda_k})_{k=1}^m$, the congruence $\sum_{k=1}^{m} h_{\lambda_k} \beta_{\lambda_k} \equiv 0 \pmod 1$ implies $\sum_{k=1}^{m} h_{\lambda_k} \alpha_{\lambda_k} \equiv 0 \pmod 1$. Thus, by Kronecker's theorem ([14] VII § 2) the simultaneous inequalities

$$|n\beta_{\lambda_k} - \alpha_{\lambda_k}| < \eta \pmod 1 \quad (k = 1, \ldots, m)$$

have a common integral solution n for any choice of $\eta = \eta(\varepsilon)$. Thus $\hat{a}$ belongs to the group $\hat{X}$ and therefore there exists an element $a \in X$ such that $\hat{a} = \varphi(a)$.

By our construction α_λ will be an integer if and only if β_λ is an integer. Since b was a generator of X, this is the case if and only if $\lambda = 0$. Thus, $d_\lambda(a) \neq 1$ for all $\lambda \neq 0$ and a is a generator of X ([9] theorem 25.11).

Theorem 5. *The sequences $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ $(a \in G)$ are equi-uniformly distributed if and only if X is totally disconnected.*

Proof. We apply Weyl's criterion, taking in place of F a complete system D of different continuous characters of X. If X is totally disconnected, then $d(X)$ is finite for every $d \in D$. For every $a \in G$ and for every non-trivial character $d \in D$, we therefore have $|d(a) - 1| \geqq c_d > 0$, where c_d only depends on d. Thus, for every non-trivial character d, we obtain

$$(5) \qquad \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} d(a^n)\right| = \frac{1}{N}\left|\frac{d(a^{N+1}) - d(a)}{d(a) - 1}\right| \leqq \frac{2}{N c_d} \leqq \varepsilon \quad \text{for all} \quad N \geqq \frac{2}{c_d \varepsilon}$$

and for all $a \in G$.

If X is not totally disconnected, then there is a character $d \in D$ such that $d(X) = T$. If the sequences $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ $(a \in G)$ were equi-uniformly distributed, then, by theorem 3, we would have $G = \overline{G}$. In consequence, by lemma 1, we would have $d(G) = T$. This, however, is impossible since $e^{2\pi i \alpha}$ is not a generator of T for rational α.

Corollary 5.1. *G is closed if and only if X is totally disconnected.*

Proof. If X is totally disconnected, the assertion follows from theorem 5 and theorem 3. If X is not totally disconnected, the same reasoning applies as in the second part of the proof of theorem 5.

Corollary 5.1 may of course also be proved without any reference to equi-uniformly distributed sequences. As a consequence of lemma 1, G can certainly not be open unless X is totally disconnected. If, however, this is the case, then G may well be open as already demonstrated by any finite group with the discrete topology. Below we shall exhibit a compact totally disconnected monothetic group X containing infinitely many elements and having an open set of generators. This, in connection with theorem 5, shows that we cannot omit the hypothesis of X not being totally disconnected in theorem 4.

Let T_∞ be the topological direct product of countably many copies of T. Let $a \in T_\infty$ be defined by $a = (e^{2\pi i \cdot 2^{-k}})_{k=1}^{\infty}$ and define X to be the closure of the sequence $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ in T_∞. Then X is a compact monothetic group ([9] theorem 9.16). Consider an element $b = (e^{2\pi i b_k \cdot 2^{-k}})_{k=1}^{\infty} \in X$ (b_k integers, $1 \leqq b_k \leqq 2^k$) with the property that $b_1 = 1$. Since b may be approximated arbitrarily close by elements of the form a^n $(n \geqq 1)$, for every given integer $m \geqq 1$ the system of simultaneous congruences

$$n \equiv b_k \pmod{2^k} \quad (k = 1, \ldots, m)$$

has an integral solution $n > 0$ which has to be an odd integer. Therefore, there exists an integer $n' > 0$ such that

$$1 \equiv n' b_k \pmod{2^k} \quad (k = 1, \ldots, m)$$

and a may be approximated arbitrarily close by elements of the form $b^{n'}$.

Thus, b is a generator and we have $G = \{b = (e^{2\pi i b_k \cdot 2^{-k}})_{k=1}^{\infty} : b_1 = 1\}$. This set G, however, is obviously an open subset of X of Haar measure $\frac{1}{2}$.

The following theorem establishes as generalization of theorem 2 which we, however, shall use in the proof. We note that, if X satisfies the second axiom of countability, G is a G_δ-set and thus a Borel set ([9] 25.27).

Theorem 6. *Suppose that X satisfies the second axiom of countability and let ε $(0 < \varepsilon < 1)$ be given. Then there is a closed nowhere dense subset Q of G such that $\mu(Q) > \mu(G) - \varepsilon$ and such that the sequences $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ $(a \in Q)$ are equi-uniformly distributed.*

Proof. Let $D = \{d_k : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ be a complete system of different continuous characters of X and let D' be the subset of D consisting of those characters d for which $d(X) = T$ (D' is empty iff X is totally disconnected). We observe that, λ denoting normed Haar measure on T, for every $d \in D'$ and for every Borel set $B \subset T$, we have $\lambda(B) = \mu(d^{-1}(B))$. (This may be seen e.g. by defining a Borel measure λ on T by this equation and checking that it has all the properties characterizing Haar measure on T). For every character $d_k \in D'$ we may choose by theorem 2 a closed subset A_k of T having the property that the sequences $(d_k(a^n))_{n=1}^{\infty}$ $(d_k(a) \in A_k)$ are equi-λ-uniformly distributed in T and such that $\lambda(A_k) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}$. We put $Q_1 = \bigcap_{d_k \in D'} d_k^{-1}(A_k)$ if D' is not empty and $Q_1 = X$ if D' is empty. Then $\mu(Q_1) > 1 - \varepsilon$ and, putting $Q = Q_1 \cap G$, we have $\mu(Q) > \mu(G) - \varepsilon$.

Suppose now that $a \in Q$ is chosen arbitrarily and that $d_k \in D$ is any non-trivial character. If $d_k(X) = T$, then $d_k(a) \in A_k$ and

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} d_k(a^n)\right| = \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (d_k(a))^n\right| \leqq \varepsilon \quad \text{for all} \quad N \geqq N(d_k, \varepsilon) \tag{6}$$

and for all $a \in Q$. If $d_k(X)$ is finite, then $d_k(a) \neq 1$ since a is a generator and (6) holds by the reasoning used in the proof of (5). Thus, by Weyl's criterion, the sequences $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ $(a \in Q)$ are equi-uniformly distributed in X. By theorem 3 we may replace Q by its closure which will then have the properties asserted in theorem 6.

We remark that, while no assumption of connectedness is necessary in the hypothesis, theorem 6 is interesting only in the non-totally disconnected case in view of theorem 5.

Corollary 6.1. *Suppose that X is connected and satisfies the second axiom of countability. Then, for every given ε $(0 < \varepsilon < 1)$ there is a closed nowhere dense subset A of X such that $\mu(A) > 1 - \varepsilon$ and such that the sequences $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ $(a \in A)$ are equi-uniformly distributed.*

Proof. Under the mentioned hypotheses we have $\mu(G) = 1$ ([4], cf. [9] 25.27). An application of theorem 6 completes the proof.

4. Uniform distribution in compact Hausdorff spaces

Let X be any compact Hausdorff space and let μ be any regular normed Borel measure on X. Every sequence $\xi = (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ may be regarded as an

element of the topological direct product space X_∞ of countably many copies of X. We denote by $\overline{\mathfrak{A}}$ the closure of a subset $\mathfrak{A}$ of X_∞ in the product topology. The theorems stated in the previous sections have rather close analoga also in the present context.

Theorem 7. *Suppose that* $\mathfrak{S} = \{\xi_\sigma \in X_\infty : \sigma \in S\}$ *is a family of equi-*μ*-uniformly distributed sequences. Then so is* $\overline{\mathfrak{S}}$.

Proof. Let $f \in C(X)$ and $\varepsilon > 0$ be given. By assumption, we have

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_{\sigma,n}) - \mu(f)\right| \leqq \varepsilon \quad \text{for all} \quad N \geqq N(f, \varepsilon) \tag{7}$$

and for all $\sigma \in S$. Let $\xi = (x_n)_{n=1}^\infty$ be an arbitrary element of X_∞ and define $F_N(\xi) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)$. Then F_N is a continuous function on X_∞. Thus, for $\xi \in \overline{\mathfrak{S}}$, we conclude from (7) that also

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \mu(f)\right| \leqq \varepsilon \quad \text{for all} \quad N \geqq N(f, \varepsilon)\,.$$

This proves the assertion.

Theorem 8. *Suppose that* X *contains at least two points and that* $\mathfrak{S}$ *is a family of equi-*μ*-uniformly distributed sequences. Then* $\mathfrak{S}$ *is nowhere dense in* X.

Proof. Assume the contrary. Because of theorem 7 we may assume that $\mathfrak{S}$ is closed and therefore contains an open subset $\mathfrak{U}$ of X_∞. If X satisfies the second axiom of countability, then, via Baire's category theorem, this contradicts the well known fact that the set of all μ-uniformly distributed sequences in X is of first category in X_∞ ([12] Satz 12).

If X does not satisfy the second axiom of countability we may argue in the following way: Without loss of generality we may assume that $\mathfrak{U}$ is of the form $\mathfrak{U} = \prod_{n=1}^{\infty} U_n$, where U_n is an open subset of X for all $n \geqq 1$ and $U_n = X$ for all $n \geqq N_1$. Let V and W be open subsets of X with disjoint closures. Let f be a *Urysohn function* on X (i.e. $f \in C(X)$ and $0 \leqq f(x) \leqq 1$ for all $x \in X$) such that $f(x) = 1$ for all $x \in V$ and $f(x) = 0$ for all $x \in W$. Let $N \geqq 3N_1$ be given. Because of our assumption $\mathfrak{S}$ contains sequences $\eta = (y_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}$ and $\zeta = (z_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{U}$ with the following properties: $y_n \in V$ for $N_1 < n \leqq N$ and $z_n \in W$ for $N_1 < n \leqq N$. We conclude $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(y_n) \geqq \frac{2}{3}$ and $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(z_n) \leqq \frac{1}{3}$. Since N was arbitrary, this contradicts our assumption that $\mathfrak{S}$ is a family of equi-μ-uniformly distributed sequences.

If X satisfies the second axiom of countability, then, as mentioned above, the set of all μ-uniformly distributed sequences in X is of first category in X_∞. This could suggest the idea that, in contrast to corollary 1.2 and 4.2, the set of all μ-uniformly distributed sequences might well be the countable union of families of equi-μ-uniformly distributed sequences. A closer inspection, however, shows that this still will not be the case in general. Indeed, if X is a compact connected abelian group satisfying the second axiom of countabi-

lity (and *a fortiori* monothetic [9] 25.14) and if μ is normed Haar measure on X, then the set of all μ-uniformly distributed sequences in particular contains all sequences $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ $(a \in G)$. This set, however, cannot be split into the union of countably many families of equi-μ-uniformly distributed sequences by corollary 4.2.

In order to state an analogon of corollary 4.1 (cf. [8] theorem 2) we recall that the shift transformation P in X_∞ is defined by $P(x_n)_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$, where $y_n = x_{n+1}$ $(1 \leqq n < \infty)$.

Corollary 8.1. *Suppose that X contains at least two points. Suppose furthermore that $\xi \in X_\infty$ is μ-uniformly distributed in X and that, for some subsequence $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ of the positive integers, the sequence $(P^{m_k}\xi)_{k=1}^{\infty}$ is dense in some open subset of X_∞. Then the sequences $P^{m_k}\xi$ $(k = 1, 2, \ldots)$ are μ-uniformly distributed but not equi-μ-uniformly distributed.*

Corollary 8.2. *Let X and $\mathfrak{S}$ be as in theorem 8 and suppose that X is the support of μ. Then $\mu_\infty(\overline{\mathfrak{S}}) < 1$.*

Proof. Under the mentioned hypothesis, the support of μ_∞ is X_∞. If $\overline{\mathfrak{S}}$ had μ_∞-measure 1, then $\overline{\mathfrak{S}}$ would coincide with X_∞, in contradiction to theorem 8.

The following theorem and its proof are essentially due to E. HLAWKA ([10] § 6) who has stated them for the case of a compact group.

Theorem 9. *Suppose that X satisfies the second axiom of countability and let δ $(0 < \delta < 1)$ be given. Then there exists a closed family $\mathfrak{S}$ of equi-μ-uniformly distributed sequences such that $\mu_\infty(\mathfrak{S}) > 1 - \delta$.*

Proof. In order to be able to apply Weyl's criterion we first note that because of the second axiom of countability there exists a countable set $F = \{f_k : k = 1, 2, \ldots\} \subset C(X)$ as described in section 1. Given any $k \geqq 1$ we again define $F_{k,N} \in C(X_\infty)$ for $\xi = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ by

$$F_{k,N}(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\infty} f_k(x_n) .$$

It is a well known consequence of the individual ergodic theorem ([6], [10] § 6, [12] § 3) that

$$\lim_{N \to \infty} F_{k,N}(\xi) = \mu(f_k)$$

for μ_∞-almost all $\xi \in X_\infty$. Therefore, by Egoroff's theorem ([5] § 21 A), there exists a measurable subset $\mathfrak{S}_k$ of X_∞ of measure $\mu_\infty(\mathfrak{S}_k) \geqq 1 - \frac{\delta}{2^k}$ such that the functions $F_{k,N}$ converge uniformly on $\mathfrak{S}_k$ for $N \to \infty$. Taking $\mathfrak{S}_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{S}_k$ we obtain $\mu_\infty(\mathfrak{S}_0) \geqq 1 - \delta$. Furthermore, for every $k \geqq 1$ and for every given $\varepsilon > 0$, we have

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_k(x_n) - \mu(f_k) \right| \leqq \varepsilon \quad \text{for all} \quad N \geqq N(f_k, \varepsilon)$$

and for all $\xi = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{S}}_0$. An application of Weyl's criterion leads to the assertion.

5. Almost well distributed sequences

Let X be a compact Hausdorff space and let μ be a regular normed Borel measure on X. As in the preceding section we denote by P the shift transformation in infinite product space X_∞. A sequence $\xi \in X_\infty$ is called *μ-well distributed* if the sequences $P^m\xi$ $(m = 1, 2, \ldots)$ are equi-μ-uniformly distributed (HLAWKA [10], PETERSEN [17]). While under the assumption of the second axiom of countability μ_∞-almost every sequence is μ-uniformly distributed ([12] Satz 11), μ_∞-almost no sequence is μ-well distributed if μ is not a point-measure ([8] corollary 2.1). We shall now apply the results of the preceeding section to some questions connected with the concept of good distribution.

Theorem 10. *Suppose that the sequence $\xi \in X_\infty$ is μ-well distributed. Then so ist every sequence in the closure of the set $\mathfrak{S} = \{P^m\xi : m = 1, 2, \ldots\}$.*

Proof. By theorem 7, $\overline{\mathfrak{S}}$ is a family of equi-μ-uniformly distributed sequences. If η belongs to $\overline{\mathfrak{S}}$, then so does $P^m\eta$ for every $m \geqq 1$.

As an illustration in the case of uniform distribution mod 1 we note that, if a is irrational and if ξ is the sequence $(na)_{n=1}^\infty$ (mod 1), then $\overline{\mathfrak{S}}$ is the family of all sequences $(na + b)_{n=1}^\infty$ (mod 1) $(b \in [0, 1[)$.

We shall call a sequence $\xi \in X_\infty$ *almost μ-well distributed* if there exists an infinite subsequence $(m_k)_{k=1}^\infty$ of the non-negative integers such that the sequences $P^{m_k}\xi$ $(k = 1, 2, \ldots)$ are equi-μ-uniformly distributed. If we want to refer to this particular subsequence we shall call ξ *almost μ-well distributed* $(m_k)_{k=1}^\infty$. Note that the very definition implies that an almost μ-well distributed sequence is μ-uniformly distributed.

Theorem 11. *Suppose that $\xi \in X_\infty$ is almost μ-well distributed $(m_k)_{k=1}^\infty$ and let h be any positive integer. Then ξ is also almost μ-well distributed $(m_k + h)_{k=1}^\infty$.*

Proof. For any given $f \in C(X)$ and for any $\varepsilon > 0$ we have

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=m_k+1}^{m_k+N} f(x_n) - \mu(f)\right| \leqq \varepsilon \quad \text{for all} \quad N \geqq N(f, \varepsilon)$$

and for all $k \geqq 1$. We conclude

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=m_k+h+1}^{m_k+h+N} f(x_n) - \mu(f)\right| \leqq \left|\frac{1}{N}\sum_{n=m_k+N+1}^{m_k+N+h} f(x_n) - \sum_{n=m_k+1}^{m_k+h} f(x_n)\right| +$$

$$+ \left|\frac{1}{N}\sum_{n=m_k+1}^{m_k+N} f(x_n) - \mu(f)\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{2h\,||f||}{N} + \varepsilon \leqq 2\varepsilon \text{ for all } N \geqq \max\left(N(f, \varepsilon), \frac{2h\,||f||}{\varepsilon}\right)$$

and for all $k \geqq 1$.

Corollary 11.1. *Let ξ and h be as in theorem 11. Then the sequences $P^{m_k+m}\xi$ $(|m| \leqq h,\ k = 1, 2, \ldots)$ are equi-μ-uniformly distributed.*

Proof. By theorem 11, for every fixed m, the sequences $P^{m_k+m}\xi$ $(k = 1, 2, \ldots)$ are equi-μ-uniformly distributed. Taking the union of these finitely many families of sequences, we again obtain a family of equi-μ-uniformly distributed sequences.

Corollary 11.2. *Suppose that $\xi \in X_\infty$ is almost μ-well distributed $(m_k)_{k=1}^\infty$ and that the differences $(m_{k+1} - m_k)$ are bounded. Then ξ is μ-well distributed.*

Proof. Put $m_0 = 0$, let $h = \max_{k \geq 0} (m_{k+1} - m_k)$ and apply corollary 11.1.

If we compare these statements with the results of the previous sections, we may regard corollary 11.1 as some sort of analogon to theorem 3 and theorem 7. In fact, it asserts that, restricting attention to the subsequences $P^m \xi$ of a given μ-uniformly distributed sequence ξ, every family of equi-μ-uniformly distributed subsequences $P^{m_k}\xi$ $(k = 1, 2, \ldots)$ may be enlarged by an operation similar to taking the closure, referring, however, not to a topology but to the concept of relative density of a set of integers. In this sense, corollary 11.2 appears to be an analogon to theorem 4 and theorem 8 if we state it in the following form: *Suppose that $\xi \in X_\infty$ is not μ-well distributed and suppose that the sequences $P^{m_k}\xi$ $(k = 1, 2, \ldots)$ are equi-μ-uniformly distributed. Then the sequence of integers $(m_k)_{k=1}^\infty$ is not relatively dense* (i.e. it is not possible to find a positive integer h such that every interval of length h contains at least one integer m_k).

The following theorem again stems from a remark of E. HLAWKA ([10] last paragraph; the statements "jede Folge" and "offene Menge" in the passage referred to are erroneous). In the context just mentioned, it establishes an analogon to theorem 6 and theorem 9.

Theorem 12. *Suppose that X satisfies the second axiom of countability. Then μ_∞-almost every sequence $\xi \in X_\infty$ is almost μ-well distributed. In particular, μ_∞-almost every sequence $\xi \in X_\infty$ has the following property: given any δ $(0 < \delta < 1)$ there exists a subsequence $(m_k)_{k=1}^\infty$ of the non-negative integers of asymptotic density greater than $1 - \delta$ such that ξ is almost μ-well distributed $(m_k)_{k=1}^\infty$.*

Proof. By theorem 9 we can find a sequence of families $\mathfrak{S}_j$ of equi-μ-uniformly distributed sequences such that $\mu_\infty(\mathfrak{S}_j) \geq 1 - \frac{1}{j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. We note that P is a μ_∞-measure preserving ergodic transformation in X_∞ [6]. By the individual ergodic theorem, there is a subset $\mathfrak{T}_j$ of X_∞ such that $\mu_\infty(\mathfrak{T}_j) = 1$ and such that for every $\xi \in \mathfrak{T}_j$ the sequence of exponents m_k for which $P^{m_k}\xi \in \mathfrak{S}_j$ has asymptotic density $\mu_\infty(\mathfrak{S}_j)$. Taking $\mathfrak{T} = \bigcap_{j=1}^\infty \mathfrak{T}_j$ we obtain $\mu_\infty(\mathfrak{T}) = 1$ and every $\xi \in \mathfrak{T}$ has the property stated in the theorem.

6. Almost well, weakly well, and completely uniformly distributed sequences

Let, as in section 5, X be a compact Hausdorff space and let μ be a regular normed Borel measure on X. In view of theorem 12 we are led to consider the following classes of sequences in X and to ask for the set-theoretic and measure-theoretic relations between them:

$\mathfrak{U} = \{\xi \in X_\infty : \xi$ *is μ-uniformly distributed*$\}$.

$\mathfrak{AW} = \{\xi \in X_\infty : \xi$ *is almost μ-well distributed*$\}$.

$\mathfrak{AW}_1 = \{\xi \in X_\infty :$ *for every δ $(0 < \delta < 1)$ there exists a subsequence $(m_k)_{k=1}^\infty$ of the non-negative integers of asymptotic density greater than $1 - \delta$ such that ξ is almost μ-well distributed $(m_k)_{k=1}^\infty$*$\}$.

$\mathfrak{A}\mathfrak{W}_2 = \{\xi \in X_\infty$: *there exists a subsequence* $(m_k)_{k=1}^\infty$ *of the non-negative integers of asymptotic density* 1 *such that* ξ *is almost* μ*-well distributed* $(m_k)_{k=1}^\infty\}$.

$\mathfrak{W} = \{\xi \in X_\infty$: ξ *is* μ*-well distributed*$\}$.

Obviously we have $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{A}\mathfrak{W} \supset \mathfrak{A}\mathfrak{W}_1 \supset \mathfrak{A}\mathfrak{W}_2 \supset \mathfrak{W}$. Furthermore, if the second axiom of countability is satisfied, we have $\mu_\infty(\mathfrak{A}\mathfrak{W}_1) = 1$ by theorem 12 and $\mu_\infty(\mathfrak{W}) = 0$ if μ is not a point measure by [8] corollary 2.1. In what follows we shall show that, under these hypotheses and in the presence of μ-well distributed sequences, each of the above inclusions is strict and $\mu_\infty(\mathfrak{A}\mathfrak{W}_2) = 0$.

In this context it seems appropriate also to clarify the relations between the properties of a sequence $\xi \in X_\infty$ to be *almost* μ*-well distributed*, *weakly* μ*-well distributed* in the sense of HLAWKA [11] and *completely* μ*-uniformly distributed* in the sense of KOROBOV [15] (cf. [13] § 4). We shall therefore also consider the following classes of sequences in X:

$$\mathfrak{W}\mathfrak{W} = \Bigg\{\xi \in X_\infty\text{: } \xi \text{ is weakly } \mu\text{-well distributed, i.e. for every } f \in C(X) \text{ we have}$$

$$\lim_{N\to\infty} \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \sum_{r=0}^{R-1} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=rN+1}^{(r+1)N} f(x_n) - \mu(f) \right| = 0 \Bigg\}.$$

$\mathfrak{C}\mathfrak{U} = \{\xi \in X_\infty$: ξ *is completely* μ*-uniformly distributed, i.e. the sequence* $(P^m\xi)_{m=1}^\infty$ *is* μ_∞*-uniformly distributed in* $X_\infty\}$.

Again, it is well known and easy to see that we have $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{C}\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{W}\mathfrak{W} \supset \mathfrak{W}$. Furthermore, if the second axiom of countability is satisfied, we have $\mu_\infty(\mathfrak{C}\mathfrak{U}) = 1$ (replacing in the corresponding statement about uniformly distributed sequences X by X_∞ and μ by μ_∞), $\mu_\infty(\mathfrak{W}\mathfrak{W}) = 1$ by [11] Satz 2 (cf. theorem 16), and $\mathfrak{C}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{W} = \emptyset$ by [8] theorem 2 if μ is not a point measure. Thus, μ_∞-almost every sequence $\xi \in X_\infty$ is at the same time almost μ-well distributed (even in the sense of $\mathfrak{A}\mathfrak{W}_1$), weakly μ-well distributed, and completely μ-uniformly distributed. We shall show that, in fact, $\mathfrak{C}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}\mathfrak{W}_2 = \emptyset$ if μ is not a point measure, thus establishing $\mu_\infty(\mathfrak{A}\mathfrak{W}_2) = 0$, and that, in the presence of μ-well distributed sequences, all inclusions in the chain $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{W}\mathfrak{W} \supset \mathfrak{W}$ are strict. In particular, we have $\mathfrak{W}\mathfrak{W} \supset \mathfrak{A}\mathfrak{W}_2$ but $\mathfrak{W}\mathfrak{W} \not\supset \mathfrak{A}\mathfrak{W}$. The proofs will be carried out by explicitly constructing sequences that are of one type but not of the other.

Let us note again that, in the definition of weakly μ-well distributed sequences, we can replace $C(X)$ by the larger class of functions described at the end of section 1. In fact, if $\xi \in X_\infty$ is weakly μ-well distributed and if f, f_1, f_2 are real-valued Borel measurable functions ($f_j \in C(X)$, $j = 1, 2$) satisfying $f_1 \leqq f \leqq f_2$ and $\mu(f_2 - f_1) \leqq \frac{\varepsilon}{2}$, then we can choose $N(f, \varepsilon)$ so large that for all $N \geqq N(f, \varepsilon)$ we have

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \sum_{r=0}^{R-1} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=rN+1}^{(r+1)N} f_j(x_n) - \mu(f_j) \right| \leqq \frac{\varepsilon}{4} \qquad (j = 1, 2).$$

By (2) we conclude

$$\limsup_{R\to\infty}\frac{1}{R}\sum_{r=0}^{R-1}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=rN+1}^{(r+1)N} f(x_n)-\mu(f)\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{2}\limsup_{R\to\infty}\frac{1}{R}\sum_{r=0}^{R-1}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=rN+1}^{(r+1)N} f_j(x_n)-\mu(f_j)\right|+\frac{\varepsilon}{2}\leqq\varepsilon$$

This proves our assertion.

We now proceed with the detailed exposition of the statements outlined above. The proof of the following theorem is, with some slight modifications, the same as the proof of theorem 2 in [8]. We shall, however, reproduce it here for the convenience of the reader.

Theorem 13. *Suppose that μ is not a point measure and suppose that $\xi=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in X_\infty$ is completely μ-uniformly distributed. Then ξ is not almost μ-well distributed with respect to any subsequence $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ of the non-negative integers of asymptotic density* 1.

Proof. Assume the contrary and let $\mathfrak{M}=(m_k)_{k=1}^{\infty}$ be a subsequence of the non-negative integers of asymptotic density 1 such that ξ is almost μ-well distributed $(m_k)_{k=1}^{\infty}$. Since μ is not concentrated in one point we can find an open set $A\subset X$ such that $0<\mu(A)<1$. Without loss of generality we may assume that the boundary of A has μ-measure zero. Let $N\geqq 1$ be given and let $A_\infty=\prod_{n=1}^{\infty}A_n$ where $A_n=A$ for $1\leqq n\leqq N$ and $A_n=X$ for $n>N$. Then A_∞ is open in X and its boundary has μ_∞-measure zero. Furthermore, we have $0<\mu_\infty(A_\infty)<1$. Since the sequence $(P^m\xi)_{m=1}^{\infty}$ is by assumption μ_∞-uniformly distributed in X_∞, and since $\mathfrak{M}$ has asymptotic density 1, so is the sequence $(P^{m_k}\xi)_{k=1}^{\infty}$. Therefore, there exists a positive integer $k(N)$ such that $P^{m_{k(N)}}\xi\in A_\infty$. Hence, for every choice of $N\geqq 1$, we have

$$\frac{1}{N}\sum_{n=m_{k(N)}+1}^{m_{k(N)}+N}\chi_A(x_n)-\mu(A)=1-\mu(A)>0\,.$$

This, however, contradicts our assumption that ξ is almost μ-well distributed $(m_k)_{k=1}^{\infty}$. (If the support of μ is X the theorem can also be derived from corollary 8.1).

Corollary 13.1. *Suppose that X satisfies the second axiom of countability and that μ is not a point measure. Then $\mu_\infty(\mathfrak{A}\mathfrak{W}_2)=0$.*

Proof. Under the mentioned hypothesis, we have $\mu_\infty(\mathfrak{C}\mathfrak{U})=1$. The statement then follows from theorem 13.

Corollary 13.2. *Suppose that X satisfies the second axiom of countability and that μ is not a point measure. Then $\mathfrak{A}\mathfrak{W}_1\supsetneqq\mathfrak{A}\mathfrak{W}_2$.*

Proof. The statement follows from theorem 12 and corollary 13.1.

Theorem 14. *Suppose that X contains at least two points and that there exists a μ-well distributed sequence. Then there also exists a sequence $\xi\in X_\infty$, constructed explicitely below, which is not μ-well distributed but almost μ-well distributed $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ where $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ has asymptotic density* 1. *Consequently we have $\mathfrak{A}\mathfrak{W}_2\supsetneqq\mathfrak{W}$.*

Proof. Suppose that the sequence $\eta = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in X_\infty$ is μ-well distributed and let $a \in X$ belong to the support of μ. We then choose a point $b \neq a$ in X and construct a sequence $\xi = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in X_\infty$ by induction as follows: Let $x_1 = b$. If $x_1, \ldots, x_{h^4}$ ($h \geqq 1$ an integer) have already been defined such as to comprise all elements y_k with $k \leqq h^4 - h(2h-1)$, then let x_n ($h^4 < n \leqq h^4 + 4h^3 + 6h^2$) be the next $4h^3 + 6h^2$ consecutive y_k's and let $x_n = b$ for $h^4 + 4h^3 + 6h^2 < n \leqq (h+1)^4$.

Obviously, due to the increasing stretches of b's which certainly do not cover the support of μ, the sequence ξ is not μ-well distributed. If we allow m to run through all integers satisfying $h^4 \leqq m < h^4 + 4h^3$ ($h = 1, 2, \ldots$), then it is easy to see that this subsequence $\mathfrak{M}$ of the positive integers has asymptotic density 1. We shall now show that the corresponding sequences $P^m\xi$ ($m \in \mathfrak{M}$) are equi-μ-uniformly distributed.

To this purpose, let $f \in C(X)$ ($f \not\equiv 0$) and $\varepsilon > 0$ be given and suppose that

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=m+1}^{m+N} f(y_n) - \mu(f)\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for all} \quad N \geqq N(f, \varepsilon)$$

and for all $m = 1, 2, \ldots$ It will suffice to show that

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=m+1}^{m+N} f(x_n) - \mu(f)\right| \leqq \varepsilon \quad \text{for all} \quad N \geqq N(f, \varepsilon) \tag{8}$$

and for all $m \in \mathfrak{M}$ which are greater than the fourth power of some fixed integer $H = H(f, \varepsilon)$. In fact, we choose this integer H in such a way that $\frac{4H+1}{6H^2+4H+1} < \frac{\varepsilon}{4\|f\|}$ and $6H^2 \geqq N(f, \varepsilon)$. For a fixed $m \in \mathfrak{M}$, $m \geqq H^4$, let us denote by N' the number of elements x_{m+n} ($1 \leqq n \leqq N$) chosen from the sequence η and by $\sum' f(x_n)$ the sum over these elements. For all $N \geqq N(f, \varepsilon)$ we have $N' \geqq N(f, \varepsilon)$ because of $h^4 \leqq m < h^4 + 4h^3$ and $6h^2 \geqq 6H^2 \geqq N(f, \varepsilon)$. Thus we obtain

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{n=m+1}^{m+N} f(x_n) &= \frac{N'}{N}\cdot\frac{1}{N'}\sum' f(x_n) + \frac{N-N'}{N} f(b) \\ &= \frac{1}{N'}\sum' f(x_n) - \frac{N-N'}{N}\cdot\frac{1}{N'}\sum' f(x_n) + \frac{N-N'}{N} f(b)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=m+1}^{m+N} f(x_n) - \mu(f)\right| &\leqq \left|\frac{1}{N'}\sum' f(x_n) - \mu(f)\right| + 2\,\frac{N-N'}{N}\|f\| \leqq \\ &\leqq \frac{\varepsilon}{2} + 2\,\frac{N-N'}{N}\|f\|\,.\end{aligned} \tag{9}$$

Because of our construction of ξ and of the restriction imposed on m we have

$$\frac{N-N'}{N} \leqq \frac{4h+1}{6h^2+4h+1} \leqq \frac{4H+1}{6H^2+4H+1} \leqq \frac{\varepsilon}{4\|f\|}\,.$$

This, in connection with (9), proves (8).

In order to establish the inclusion $\mathfrak{W}\mathfrak{W} \supset \mathfrak{A}\mathfrak{W}_2$ we again need a lemma.

Lemma 2. *Let $\mathfrak{M}$ be a subsequence of the non-negative integers of asymptotic density 1 and let N be given. Then the subsequence $\mathfrak{R} = \{r : rN \in \mathfrak{M}\}$ of the non-negative integers also has asymptotic density 1.*

Proof. For any integer $M \geqq 1$ we define

$$\nu(\mathfrak{M}, M) = \sum_{\substack{m \in \mathfrak{M} \\ m < M}} 1$$

(for other sequences, the counting function ν is defined analogously). Suppose $\liminf_{R\to\infty} \frac{\nu(\mathfrak{R}, R)}{R} = 1 - 2\delta$ $(\delta > 0)$, contrary to the assertion. We then have

$$\nu(\mathfrak{M}, RN) \leqq \nu(\mathfrak{R}, R) + (N-1)R \quad \text{for every} \quad R \geqq 1$$

and therefore

$$\frac{\nu(\mathfrak{M}, RN)}{RN} \leqq \frac{1}{N} \cdot \frac{\nu(\mathfrak{R}, R)}{R} + \frac{N-1}{N} < \frac{1}{N}(1-\delta) + \frac{N-1}{N} = 1 - \frac{\delta}{N}$$

for infinitely many R, in contradiction to our assumption.

Theorem 15. *Suppose that the sequence $\xi = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in X_\infty$ is almost μ-well distributed $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ and $\mathfrak{M} = (m_k)_{k=1}^{\infty}$ has asymptotic density 1. Then ξ is weakly μ-well distributed. Consequently, we have $\mathfrak{W}\mathfrak{W} \supset \mathfrak{A}\mathfrak{W}_2$.*

Proof. Let $f \in C(X)$ and $\varepsilon > 0$ be given and let

$$\left|\frac{1}{N} \sum_{n=m+1}^{m+N} f(x_n) - \mu(f)\right| \leqq \varepsilon \quad \text{for all} \quad N \geqq N(f, \varepsilon)$$

and for all $m \in \mathfrak{M}$. Fix any $N \geqq N(f, \varepsilon)$ and let $\mathfrak{R} = \{r \geqq 0 : rN \in \mathfrak{M}\}$. Furthermore, let $\mathfrak{R}'$ be the subsequence of the non-negative integers, complementary to $\mathfrak{R}$. Then we have

$$a_{N,r} = \left|\frac{1}{N} \sum_{n=rN+1}^{(r+1)N} f(x_n) - \mu(f)\right| \leqq \varepsilon \quad \text{for all} \quad r \in \mathfrak{R}$$

and $a_{N,r} \leqq 2\,\|f\|$ for all $r \geqq 0$. Since $\mathfrak{R}$ has asymptotic density 1 by lemma 2, $\mathfrak{R}'$ has asymptotic density 0. We conclude

$$\frac{1}{R} \sum_{r=0}^{R-1} a_{N,r} = \frac{1}{R}\left(\sum_{\substack{r \in \mathfrak{R} \\ r < R}} a_{N,r} + \sum_{\substack{r \in \mathfrak{R}' \\ r < R}} a_{N,r}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{R\varepsilon}{R} + \frac{\nu(\mathfrak{R}', R)}{R} \cdot 2\|f\| \leqq 2\varepsilon \quad \text{for all} \quad R \geqq R_0 .$$

As a consequence, we have

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \sum_{r=0}^{R-1} a_{N,r} \leqq 2\varepsilon \quad \text{for all} \quad N \geqq N(f, \varepsilon)$$

and, since ε was arbitrary,

$$\lim_{N\to\infty} \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \sum_{r=0}^{R-1} \left|\frac{1}{N} \sum_{n=rN+1}^{(r+1)N} f(x_n) - \mu(f)\right| = 0 .$$

For the case of a compact group X with normed Haar measure μ, the following theorem has been proved by Hlawka ([11] Satz 2). In order to obtain an even sharper statement, the proof given there actually makes use of group

theoretic concepts. We shall therefore give another proof here which makes use of ergodic theory and is valid also in the more general situation considered in this section (the possibility of this approach has also already been mentioned by HLAWKA).

Theorem 16. *Suppose that X satisfies the second axiom of countability. Then μ_∞-almost all sequences $\xi \in X_\infty$ are weakly μ-well distributed.*

Proof. We note that Weyl's criterion holds for weakly μ-well distributed sequences just as well. We therefore choose a countable subset $F = \{f_k : k = 1, 2, \ldots\} \subset C(X)$ as described in section 1 and fix a function $f = f_k \in F$ ($f \not\equiv 0$). We then define the function $F_N \in C(X_\infty)$ for $\xi = (x_n)_{n=1}^\infty$ by

$$F_N(\xi) = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \mu(f) \right| .$$

Since μ_∞-almost all $\xi \in X_\infty$ are μ-uniformly distributed, we have $\lim_{N\to\infty} F_N(\xi) = 0$ for μ_∞-almost all $\xi \in X_\infty$.

Let the integer $j \geqq 1$ be given. By Egoroff's theorem ([5] § 21 A) there exists a subset $\mathfrak{S}_j$ of X_∞ such that $\mu_\infty(\mathfrak{S}_j) > 1 - \frac{1}{4j\|f\|}$ and such that the functions F_N converge to zero uniformly on $\mathfrak{S}_j$. Let $N(j)$ be chosen in such a way that $F_N(\xi) \leqq \frac{1}{2j}$ for all $N \geqq N(j)$ and for all $\xi \in \mathfrak{S}_j$. We fix an integer $N \geqq N(j)$. By the individual ergodic theorem, applied to the ergodic measure preserving transformation P^N in X_∞, for all ξ in some subset $\mathfrak{T}(f, j, N) \subset X_\infty$ of μ_∞-measure 1, we have $P^{rN}\xi \in \mathfrak{S}_j$ for all $r \geqq 0$ except for a subsequence $(r_h)_{h=1}^\infty$ of the non-negative integers of asymptotic density smaller than $\frac{1}{4j\|f\|}$. For every such $\xi = (x_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{T}(f, j, N)$ we obtain

$$\begin{aligned}
&\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \sum_{r=0}^{R-1} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=rN+1}^{(r+1)N} f(x_n) - \mu(f) \right| \\
&= \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \sum_{r=0}^{R-1} F_N(P^{rN}\xi) \leqq \\
&\leqq \limsup_{R\to\infty} \left(\frac{1}{R} \sum_{\substack{0 \leqq r \leqq R-1 \\ P^{rN}\xi \in \mathfrak{S}_j}} F_N(P^{rN}\xi) + \frac{1}{R} \sum_{\substack{0 \leqq r \leqq R-1 \\ P^{rN}\xi \notin \mathfrak{S}_j}} 2\|f\| \right) \leqq \\
&\leqq \frac{1}{2j} + \frac{2\|f\|}{4j\|f\|} = \frac{1}{j} .
\end{aligned}$$

For every $\xi \in \bigcap_{N=N(j)}^{\infty} \mathfrak{T}(f, j, N)$ we therefore have

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \sum_{r=0}^{R-1} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=rN+1}^{(r+1)N} f(x_n) - \mu(f) \right| \leqq \frac{1}{j} \quad \text{for all} \quad N \geqq N(j)$$

and for every $\xi \in \mathfrak{T}(f) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{N=N(j)}^{\infty} \mathfrak{T}(f, j, N)$ we have

$$\lim_{N\to\infty} \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \sum_{r=0}^{R-1} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=rN+1}^{(r+1)N} f(x_n) - \mu(f) \right| = 0 . \tag{10}$$

Taking $\mathfrak{T} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{T}(f_k)$ we finally have $\mu_\infty(\mathfrak{T}) = 1$ and, by Weyl's criterion, (10) holds for all $f \in C(X)$ and for all $\xi = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{T}$.

Corollary 16.1. *Suppose that X satisfies the second axiom of countability and that μ is not a point measure. Then $\mathfrak{W}\mathfrak{W} \supsetneqq \mathfrak{A}\mathfrak{W}_2$.*

Proof. The statement follows from theorem 16 and corollary 13.1.

In view of the inclusion $\mathfrak{W}\mathfrak{W} \supset \mathfrak{A}\mathfrak{W}_2$, theorem 14 furnishes an example of a sequence which is weakly μ-well distributed but not μ-well distributed. Our last two theorems will be concerned with constructions of sequences belonging to the (differences of) classes $\mathfrak{U}\setminus(\mathfrak{A}\mathfrak{W} \cup \mathfrak{W}\mathfrak{W})$ and $\mathfrak{A}\mathfrak{W}\setminus(\mathfrak{A}\mathfrak{W}_1 \cup \mathfrak{W}\mathfrak{W})$ respectively.

Lemma 3. *Let A be a closed subset of X with μ-zero boundary and such that $\mu(A) = \alpha > 0$. If the sequence $\xi = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ is μ-uniformly (resp. μ-well) distributed in X, then the subsequence $\eta = \xi \cap A = (y_k)_{k=1}^{\infty}$, consisting of all elements of ξ lying in A, is $\frac{1}{\alpha}$ μ-uniformly $\left(\text{resp. } \frac{1}{\alpha}\ \mu\text{-well}\right)$ distributed in A, considered as a compact Hausdorff space in the relative topology.*

Proof. Since every continuous complex-valued function on A is of the form $f\chi_A$ ($f \in C(X)$) by Tietze's extension theorem, we have to show that

$$\lim_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\chi_A(y_k) - \frac{1}{\alpha}\, \mu(f\chi_A) \right| = 0 \quad \text{for all} \quad f \in C(X)\,, \tag{11}$$

resp. that

$$\lim_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=m+1}^{m+N} f\chi_A(y_k) - \frac{1}{\alpha}\, \mu(f\chi_A) \right| = 0 \quad \text{for all} \quad f \in C(X)$$

uniformly in $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Let $f \in C(X)$ be given and suppose first that ξ is μ-uniformly distributed in X. For every given integer $N \geqq 1$ we define N' to be the smallest integer having the property that $\sum_{n=1}^{N'} \chi_A(x_n) = N$. Thus, we have $N' \geqq N$ and

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{\alpha N'} = \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{N'\to\infty} \frac{1}{N'} \sum_{n=1}^{N'} \chi_A(x_n) = 1\,.$$

From the identity

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\chi_A(y_k) - \frac{1}{\alpha}\, \mu(f\chi_A) \right| = \frac{1}{\alpha} \left| \frac{\alpha N'}{N} \cdot \frac{1}{N'} \sum_{n=1}^{N'} f\chi_A(x_n) - \mu(f\chi_A) \right|$$

we then deduce (11).

Suppose next that ξ is μ-well distributed. For every integer $m \geqq 0$ we now define m' as the smallest integer having the property that $\sum_{n=1}^{m'+1} \chi_A(x_n) = m + 1$, and $N(m)$ as the smallest integer having the property that $\sum_{n=m'+1}^{m'+N(m)} \chi_A(x_n) = N$.

Thus, we have $N(m) \geqq N$. Furthermore, by the same reasoning as above, if N is greater than a fixed integer N_0, independent of m, then $\frac{N}{\alpha N(m)}$ is close to 1 and the difference

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=m+1}^{m+N} f\chi_A(y_k) - \frac{1}{\alpha}\mu(f\chi_A)\right| = \frac{1}{\alpha}\left|\frac{\alpha N(m)}{N}\cdot\frac{1}{N(m)}\sum_{n=m'+1}^{m'+N(m)} f\chi_A(x_n) - \mu(f\chi_A)\right|$$

is close to 0, uniformly in $m = 0, 1, 2, \ldots$. This proves the assertion.

Theorem 17. *Suppose that μ is not a point measure and that there exists a μ-uniformly distributed sequence. Then there also exists a sequence $\xi \in X_\infty$, constructed explicitely below, which is μ-uniformly distributed but not almost μ-well distributed and not weakly μ-well distributed. Consequently we have $\mathfrak{U} \supsetneqq \mathfrak{AW}$ and $\mathfrak{U} \supsetneqq \mathfrak{WW}$.*

Proof. Let A be a closed subset of X with μ-zero boundary and such that $0 < \mu(A) = \alpha < 1$ (our hypothesis on μ implies the existence of such a set A). Furthermore, let B be the closure of the complement of A. Then also B has μ-zero boundary and we have $\mu(f) = \mu(f\chi_A) + \mu(f\chi_B)$ for every $f \in C(X)$. By lemma 3 there exists a sequence $\eta = (y_k)_{k=1}^\infty$ which is $\frac{1}{\alpha}$ μ-uniformly distributed in A and a sequence $\zeta = (z_l)_{l=1}^\infty$ which is $\frac{1}{1-\alpha}$ μ-uniformly distributed in B. We construct the sequence $\xi = (x_n)_{n=1}^\infty$ by induction as follows: Let $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2$. If $x_1, \ldots, x_{2\binom{h}{2}}$ $(h \geqq 2)$ have already been chosen such as to comprise certain initial segments of the sequences η and ζ, then let $x_{2\binom{h}{2}+1}, \ldots,$ $x_{2\binom{h}{2}+2[h\alpha]}$ be the next $2[h\alpha]$ consecutive y_k's and let $x_{2\binom{h}{2}+2[h\alpha]+1}, \ldots,$ $x_{2\binom{h+1}{2}}$ be the next $2h - 2[h\alpha]$ consecutive z_l's not yet incorporated into the sequence ξ to be constructed.

We first show that the sequence ξ constructed in this way is μ-uniformly distributed in X. Let $f \in C(X)$ and $\varepsilon > 0$ be given. For a given integer $N \geqq 2$ we determine the integer h in such a way that $2\binom{h}{2} \leqq N < 2\binom{h+1}{2}$. Furthermore, we define N_y (resp. N_z) to be the number of y_k's (resp. z_l's) occurring among the first $2\binom{h}{2}$ x_n's. Thus, we have $N_{yz} = N_y + N_z = 2\binom{h}{2}$ and

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \mu(f) =$$

$$= \frac{N_{yz}}{N}\left\{\frac{N_y}{N_{yz}}\left[\frac{1}{N_y}\sum_y f(y_k) - \frac{1}{\alpha}\mu(f\chi_A)\right] + \left[\frac{N_y}{N_{yz}}\cdot\frac{1}{\alpha} - 1\right]\mu(f\chi_A)\right\} +$$

$$+ \frac{N_{yz}}{N}\left\{\frac{N_z}{N_{yz}}\left[\frac{1}{N_z}\sum_z f(z_l) - \frac{1}{1-\alpha}\mu(f\chi_B)\right] + \left[\frac{N_z}{N_{yz}}\cdot\frac{1}{1-\alpha} - 1\right]\mu(f\chi_B)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{N}\left[\sum_{n=N_{yz}+1}^{N} f(x_n) - (N - N_{yz})\,\mu(f)\right];$$

here $\sum_y$ and $\sum_z$ denote the sums over the y_k's and z_l's respectively, occurring among the first N_{yz} x_n's, and the third term disappears for $N = N_{yz}$. In view of $\lim_{N\to\infty} N_y = \lim_{N\to\infty} N_z = \infty$ we obtain, for all sufficiently large N,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \mu(f)\right| \leqq \frac{N_y}{N}\varepsilon + \left|\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{N_y}{N_{yz}} - 1\right|\|f\| + \\ + \frac{N_z}{N}\varepsilon + \left|\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{N_z}{N_{yz}} - 1\right|\|f\| + \\ + \frac{4h}{N}\|f\| .$$

Evidently, for sufficiently large N, the last term becomes smaller than ε. Furthermore, we have

$$\frac{N_y}{N_{yz}} = \frac{2[\alpha] + 2\cdot[2\alpha] + 2\cdot[3\alpha] + \cdots + 2[(h-1)\alpha]}{2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + 2\cdot(h-1)} .$$

Therefore, we conclude $\lim_{N\to\infty} \frac{N_y}{N_{yz}} = \alpha$ and, by a similar reasoning, $\lim_{N\to\infty} \frac{N_z}{N_{yz}} = 1-\alpha$. Thus, we obtain

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \mu(f)\right| < 4\varepsilon$$

for all sufficiently large N.

We next show that ξ is not almost μ-well distributed. In order to do this, for every given integer $m \leqq 2$ we estimate the difference $\left|\frac{1}{N}\sum_{n=m+1}^{m+N} \chi_A(x_n) - \alpha\right|$ from below for suitably chosen integers N. We distinguish four cases, depending on the choice of m.

1) $2\binom{h}{2} \leqq m < 2\binom{h}{2} + [h\alpha]$. We choose $N = 2\binom{h}{2} + 2[h\alpha] - m$. Then we have $N > [h\alpha]$ and

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=m+1}^{m+N} \chi_A(x_n) - \alpha\right| = 1 - \alpha > 0 .$$

2) $2\binom{h}{2} + [h\alpha] \leqq m < 2\binom{h}{2} + 2[h\alpha]$. We choose $N = 2\binom{h+1}{2} - m$. Then we have $N > 2h - 2[h\alpha]$ and

$$\frac{1}{N}\sum_{n=m+1}^{m+N} \chi_A(x_n) \leqq \max_{1\leqq j\leqq [h\alpha]} \frac{j}{2h - 2[h\alpha] + j} = \frac{[h\alpha]}{2h - [h\alpha]} \leqq \frac{\alpha}{2-\alpha} < \alpha .$$

Therefore, we obtain

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=m+1}^{m+N} \chi_A(x_n) - \alpha\right| \geqq \alpha - \frac{\alpha}{2-\alpha} = \alpha\cdot\frac{1-\alpha}{2-\alpha} > 0 .$$

3) $2\binom{h}{2} + 2[h\alpha] \leqq m < 2\binom{h}{2} + h + [h\alpha]$. We choose $N = 2\binom{h+1}{2} - m$. Then we have $N > h - [h\alpha]$ and

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=m+1}^{m+N} \chi_A(x_n) - \alpha\right| = \alpha > 0 .$$

4) $2\binom{h}{2} + h + [h\alpha] \leqq m < 2\binom{h+1}{2}$. We choose $N = 2\binom{h+1}{2} + 2[(h+1)\alpha] - m$. Then we have $N > 2[(h+1)\alpha]$ and

$$\frac{1}{N}\sum_{n=m+1}^{m+N} \chi_A(x_n) \geqq \frac{2[(h+1)\alpha]}{h - [h\alpha] + 2[(h+1)\alpha]}.$$

For large h the right member is close to $\frac{2\alpha}{1+\alpha} > \alpha$. As a consequence, for large h we obtain

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=m+1}^{m+N} \chi_A(x_n) - \alpha\right| \geqq \frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha} - \alpha\right) = \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{1+\alpha} > 0.$$

Choosing now $\varepsilon = \min\left(\alpha\cdot\frac{1-\alpha}{2-\alpha}, \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)$, we see that, given any positive integer N_0, for every integer m which is larger than a certain constant M depending on N_0 we can find an integer $N_m \geqq N_0$ such that

$$\left|\frac{1}{N_m}\sum_{n=m+1}^{m+N_m} \chi_A(x_n) - \alpha\right| \geqq \varepsilon.$$

It is therefore not possible to select an infinite increasing sequence of integers m_k in such a way that the sequences $P^{m_k}\xi$ $(k = 1, 2, \ldots)$ are equi-μ-uniformly distributed. Thus, ξ is not almost μ-well distributed.

Finally we show that the sequence ξ is not weakly μ-well distributed. In fact, we shall prove that, for every fixed integer $N \geqq 1$,

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\sum_{r=0}^{R-1}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=rN+1}^{(r+1)N}\chi_A(x_n) - \alpha\right| = 2\alpha(1-\alpha).$$

To this purpose it will suffice to show the following: Given any integer $h \geqq 2$, let $(x_{rN+1}, \ldots, x_{(r+1)N})$ $(r_{h-1} < r \leqq r_h)$ be those blocks of N consecutive elements of ξ that have some overlap with the block of $2[h\alpha]$ consecutive elements y_k and $2h - 2[h\alpha]$ consecutive elements z_l, but no overlap with the following block of $2[(h+1)\alpha]$ consecutive elements y_k and $2(h+1) - 2[(h+1)\alpha]$ consecutive elements z_l in the same sequence ξ. Then

$$\lim_{h\to\infty}\frac{1}{r_h - r_{h-1}}\sum_{r=r_{h-1}+1}^{r_h}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=rN+1}^{(r+1)N}\chi_A(x_n) - \alpha\right| = 2\alpha(1-\alpha).$$

(We note that $\frac{2h}{N} - 1 \leqq r_h - r_{h-1} \leqq \frac{2h}{N} + 1$. From this follows $\lim_{h\to\infty}(r_h - r_{h-1}) = \infty$ and

$$\lim_{h\to\infty}\frac{1}{r_h - r_{h-1}}\sum_{r=r_{h-1}+1}^{r_h}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=rN+1}^{(r+1)N}\chi_A(x_n) - \alpha\right|$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\sum_{r=0}^{R-1}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=rN+1}^{(r+1)N}\chi_A(x_n) - \alpha\right|\Bigg).$$

Indeed, if h is sufficiently large, for approximately $\frac{2[h\alpha]}{N}$ $\left(\text{at least } \frac{2[h\alpha]}{N} - 2\right)$ values of $r (r_{h-1} < r \leqq r_h)$ the difference $d_r = \left|\frac{1}{N} \sum_{n=rN+1}^{(r+1)N} \chi_A(x_n) - \alpha\right|$ will have the value $1 - \alpha$, while for approximately $\frac{2h - 2[h\alpha]}{N}$ $\left(\text{at least } \frac{2h - 2[h\alpha]}{N} - 2\right)$ values of $r (r_{h-1} < r \leqq r_h)$ this value will be α and for at most two values of r, d_r will be different from α and $1 - \alpha$ but bounded above by 2. Thus we obtain

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{r_h - r_{h-1}} \sum_{r=r_{h-1}+1}^{r_h} \left|\frac{1}{N} \sum_{n=rN+1}^{(r+1)N} \chi_A(x_n) - \alpha\right|$$

$$= \lim_{h\to\infty} \frac{N}{2h} \cdot \frac{2[h\alpha](1-\alpha) + (2h - 2[h\alpha])\alpha}{N} = 2\alpha(1-\alpha) .$$

This completes the proof.

In the mod 1 case, a less abstract example of a sequence enjoying the properties mentioned in theorem 17 (having also served as a model for the construction carried out in the proof) is furnished by the sequence $\left(0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{5}, \ldots\right)$. Sequences of this type have been considered in [16] in connection with the rearrangement of arbitrary sequences, every where dense mod 1, to mod 1 uniformly distributed sequences.

Theorem 18. *Suppose that μ is not a point measure and that there exists a μ-well distributed sequence. Then there also exists an almost μ-well but not weakly μ-well distributed sequence $\omega \in X_\infty$, constructed explicitely below, with the following property: if $\mathfrak{M} = (m_k)_{k=1}^\infty$ is any infinite subsequence of the non-negative integers such that ω is almost μ-well distributed $(m_k)_{k=1}^\infty$, then $\mathfrak{M}$ has asymptotic density 0. Consequently we have $\mathfrak{AW} \supsetneqq \mathfrak{AW}_1$ and $\mathfrak{WW} \supset \mathfrak{AW}$.*

Proof. As in the proof of theorem 17, let A be a closed subset of X with μ-zero boundary and such that $0 < \mu(A) = \alpha < 1$, and let B be the closure of the complement of A. Let $\xi = (x_k)_{k=1}^\infty$ be a sequence which is μ-well distributed in X, let $\eta = (y_l)_{l=1}^\infty$ be $\frac{1}{\alpha}$ μ-well distributed in A and let $\zeta = (z_m)_{m=1}^\infty$ be $\frac{1}{1-\alpha}$ μ-well distributed in B (cf. lemma 3). We construct the sequence $\omega = (u_n)_{n=1}^\infty$ by induction as follows: Let $u_1 = x_1$. If $u_1, \ldots, u_{h^4}$ $(h \geqq 1)$ have already been chosen such as to comprise certain initial segments of the sequences ξ, η, and ζ, let $u_{h^4+1}, \ldots, u_{h^4+6h^2+1}$ be the next $6h^2 + 1$ consecutive x_k's, and let $u_{h^4+6h^2+2}, \ldots, u_{(h+1)^4}$ consists of the $2h^2 + 2$ consecutive blocks of $2h$ elements each (referred to in the following as "yz-blocks"), which in turn consist of the next $2[h\alpha]$ consecutive y_l's and, immediately following, the next $2h - 2[h\alpha]$ consecutive z_m's not yet incorporated into the sequence ω to be constructed.

We shall first show that the sequence ω is almost μ-well distributed $(h^4)_{h=1}^\infty$. To this purpose, given any $f \in C(X)$ and any $\varepsilon > 0$, we choose N_1 such that,

uniformly in $h = 1, 2, \ldots$,

$$\left.\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{N}\sum_{k=h+1}^{h+N} f(x_k) - \mu(f)\right| \leqq \varepsilon \\
&\left|\frac{1}{N}\sum_{l=h+1}^{h+N} f(y_l) - \frac{1}{\alpha}\mu(f\chi_A)\right| \leqq \varepsilon \\
&\left|\frac{1}{N}\sum_{m=h+1}^{h+N} f(z_m) - \frac{1}{1-\alpha}\mu(f\chi_B)\right| \leqq \varepsilon
\end{aligned}\right\} \text{ for all } \quad N \geqq N_1 .$$

Furthermore, we choose the integer H such that $\min(2[H\alpha], 2H - 2[H\alpha]) \geqq N_1$ and such that $\max\left(\frac{4h}{6h^2+1}, \left|\frac{[h\alpha]}{h\alpha} - 1\right|, \left|\frac{h-[h\alpha]}{h(1-\alpha)} - 1\right|\right) \leqq \varepsilon$ for all $h \geqq H$. Let now $h \geqq H$ and $N \geqq N_1$ be given. We define N_x to be the number of x_k's among the elements $u_{h^4+1}, \ldots, u_{h^4+N}$. Furthermore, consider the yz-blocks completely covered by these elements and let N_y and N_z be the number of the y_l's and z_m's contained in all of these yz-blocks respectively. We set $N_{yz} = N_y + N_z$ and $N_u = N - N_x - N_y - N_z$. Then we have

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{n=h^4+1}^{h^4+N} f(u_n) - \mu(f) &= \frac{N_x}{N}\left[\frac{1}{N_x}\sum_x f(x_k) - \mu(f)\right] + \\
&+ \frac{N_{yz}}{N}\left\{\frac{N_y}{N_{yz}}\left[\frac{1}{N_y}\sum_y f(y_l) - \frac{1}{\alpha}\mu(f\chi_A)\right] + \left[\frac{N_y}{\alpha N_{yz}} - 1\right]\mu(f\chi_A)\right\} + \\
&+ \frac{N_{yz}}{N}\left\{\frac{N_z}{N_{yz}}\left[\frac{1}{N_z}\sum_z f(z_m) - \frac{1}{1-\alpha}\mu(f\chi_B)\right] + \left[\frac{N_z}{(1-\alpha)N_{yz}} - 1\right]\mu(f\chi_B)\right\} + \\
&+ \frac{1}{N}\left[\sum_u f(u_n) - N_u\mu(f)\right] .
\end{aligned}$$

Here the sums $\sum_x$, $\sum_y$, $\sum_z$ are extended over the corresponding N_u, N_y, N_z elements x_k, y_l, z_m respectively. The second and third member disappear if $N < 6h^2 + 1 + 2h$; the fourth member also may disappear and contains a sum $\sum_u$ over N_u tail elements where N_u (if positive) is less than the number of elements in the unfinished yz-block. Taking absolute values, because of $N \geqq N_1$ and $6h^2 + 1 \geqq \min(2[h\alpha], 2h - 2[h\alpha]) \geqq N_1$ we obtain

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{N}\sum_{n=h^4+1}^{h^4+N} f(u_n) - \mu(f)\right| &\leqq \frac{N_x}{N}\varepsilon + \\
&+ \frac{N_{yz}}{N}\left\{\frac{N_y}{N_{yz}}\varepsilon + \left|\frac{N_y}{\alpha N_{yz}} - 1\right| \|f\|\right\} + \\
&+ \frac{N_{yz}}{N}\left\{\frac{N_z}{N_{yz}}\varepsilon + \left|\frac{N_z}{(1-\alpha)N_{yz}} - 1\right| \|f\|\right\} + \\
&+ \frac{2h}{6h^2+1}\cdot 2\|f\| \leqq \\
&\leqq \varepsilon + \left|\frac{N_y}{\alpha N_{yz}} - 1\right| \|f\| + \left|\frac{N_z}{(1-\alpha)N_{yz}} - 1\right| \|f\| + \varepsilon\|f\| .
\end{aligned}$$

Let the integer $i \geqq 1$ be chosen such that $(h+i-1)^4 < h^4 + N \leqq (h+i)^4$. We then have, for some integer $j \geqq 0$,

$$N_{yz} = 2h(2h^2+2) + 2(h+1)(2(h+1)^2+2) + \cdots + 2(h+i-1)\cdot j$$

$$N_y = 2[h\alpha](2h^2+2) + 2[(h+1)\alpha](2(h+1)^2+2) + \cdots + 2[(h+i-1)\alpha]\cdot j$$

$$N_z = 2(h-[h\alpha])(2h^2+2) + 2(h+1-[(h+1)\alpha])(2(h+1)^2+2) + \cdots + 2(h+i-1-[(h+i-1)\alpha])\cdot j$$

and therefore

$$\min\left(\frac{[h\alpha]}{h}, \ldots, \frac{[(h+i-1)\alpha]}{h+i-1}\right) \leqq \frac{N_y}{N_{yz}} \leqq \max\left(\frac{[h\alpha]}{h}, \ldots, \frac{[(h+i-1)\alpha]}{h+i-1}\right).$$

By our choice of $h \geqq H$ we conclude $\left|\frac{N_y}{\alpha N_{yz}} - 1\right| \leqq \varepsilon$ and, analogously, $\left|\frac{N_z}{(1-\alpha)N_{yz}} - 1\right| \leqq \varepsilon$. Thus we obtain

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=h^4+1}^{h^4+N} f(u_n) - \mu(f)\right| \leqq \varepsilon + 3\varepsilon\|f\| \quad \text{for all} \quad N \geqq N_1$$

and for all $h \geqq H$. This proves that ω is almost μ-well distributed $(h^4)_{h=1}^{\infty}$.

Suppose next that the subsequence $\mathfrak{M} = (m_k)_{k=1}^{\infty}$ of the non-negative integers has positive upper asymptotic density. We shall show that the sequences $P^{m_k}\omega$ $(k = 1, 2, \ldots)$ cannot be equi-μ-uniformly distributed. Consider the set of positive integers $\mathfrak{N} = \{n : h^4 - 6(h-1)^2 \leqq n \leqq h^4 + 6h^2$ for some $h = 1, 2, \ldots\}$. Since $\mathfrak{N}$ has asymptotic density zero, infinitely many $m_k \in \mathfrak{M}$ must lie outside of $\mathfrak{N}$ and therefore satisfy the inequality

$$h^4 + 6h^2 + 1 \leqq m_k \leqq (h+1)^4 - 6h^2 - 1 \quad (h \geqq 1 \text{ an integer})$$

It follows that the element u_{m_k+1} belongs to some yz-block of length $2h$ and, since $m_k + 4h < (h+1)^4$, the elements u_{m_k+n} $(1 \leqq n \leqq 4h)$ cover at least one complete yz-block of length $2h$. Since this happens for infinitely many k, by the same reasoning as in the proof of theorem 17, the sequences $P^{m_k}\omega$ $(k = 1, 2, \ldots)$ cannot be equi-μ-uniformly distributed.

Finally, since the elements x_k form a subsequence of asymptotic density 0 in ω, by the same reasoning as in the proof of theorem 17 we find that

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\sum_{r=0}^{R-1}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=rN+1}^{(r+1)N} \chi_A(u_n) - \alpha\right| = 2\alpha(1-\alpha).$$

for all $N \geqq 1$. Thus, the sequence ω cannot be weakly μ-well distributed. This completes the proof.

The preceding discussion still leaves some open questions concerning the remaining possible inclusions between the classes $\mathfrak{A}\mathfrak{W}$ and $\mathfrak{A}\mathfrak{W}_1$ on the one hand and $\mathfrak{W}\mathfrak{W}$ on the other hand. Apart from these we mention one particular question which so far has not been taken up: Suppose that X satisfies the second axiom of countability. Does there always exist a μ-well distributed sequence? In a recent publication, written after completion of the present

paper, BAAYEN and HEDRLÍN [1] showed that the answer is yes. Thus the hypothesis of existence of a μ-well distributed sequence in theorem 14 and theorem 18 (as well as the hypothesis of existence of a μ-uniformly distributed sequence in theorem 17) may be replaced by the second countability axiom.

References

[1] BAAYEN, P. C., and Z. HEDRLÍN: On the existence of well distributed sequences in compact spaces. Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Ser. A **68** = Indag. Math. **27**, 221—228 (1965).
[2] VAN DANTZIG, D.: Zur topologischen Algebra. I. Komplettierungstheorie. Math. Ann. **107**, 587—626 (1933).
[3] ECKMANN, B.: Über monothetische Gruppen. Comment. Math. Helv. **16**, 249—263 (1943/44).
[4] HALMOS, P. R., and H. SAMELSON: On monothetic groups. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **28**, 254—258 (1942).
[5] HALMOS, P. R.: Measure theory. New York: Van Nostrand 1956.
[6] — Lectures on ergodic theory. Publ. Math. Soc. Japan **3**, Tokyo 1956.
[7] HARTMAN, S., u. C. RYLL-NARDZEWSKI: Zur Theorie der lokalkompakten abelschen Gruppen. Colloq. Math. **4**, 157—188 (1957).
[8] HELMBERG, G., and A. PAALMAN-DE MIRANDA: Almost no sequence is well distributed. Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Ser. A **67**, = Indag. Math. **26**, 488—492 (1964).
[9] HEWITT, E., and K. A. ROSS: Abstract harmonic analysis I. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer Verlag 1963.
[10] HLAWKA, E.: Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen. Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. 2, **4**, 33—47 (1955).
[11] — Über einen Satz von VAN DER CORPUT. Arch. Math. **6**, 115—120 (1955).
[12] — Folgen auf kompakten Räumen. Abhandl. math. Seminar hamburg. Univ. **20**, 223—241 (1956).
[13] — Erbliche Eigenschaften in der Theorie der Gleichverteilung. Publ. Math. Debrecen **7**, 181—186 (1960).
[14] KOKSMA, J. F.: Diophantische Approximationen. Ergebn. Math. u. Grenzgeb. Bd. **4**, Heft 4. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1936.
[15] KOROBOV, N. M.: On completely uniform distribution and jointly normal numbers (Russian). Izv. Akad. Nauk S.S.S.R. Ser. Mat. **20**, 649—660 (1956).
[16] VON NEUMANN, J.: Gleichmäßig dichte Zahlenfolgen (Hungerian, German summary). Math. Phys. Lapok **32**, 32—40 (1925).
[17] PETERSEN, G. M.: "Almost convergence" and uniformly distributed sequences. Quart. J. Math. Oxford. Ser. 2, **7**, 188—191 (1956).
[18] PONTRJAGIN, L. S.: Topologische Gruppen I, II. Leipzig: Teubner-Verlag 1957/58.

(Received November 28, 1964)

Bosbach, B.
Math. Annalen 161, 279—295 (1965)

Komplementäre Halbgruppen
Ein Beitrag zur instruktiven Idealtheorie kommutativer Halbgruppen

Von

Bruno Bosbach in Köln

Einleitung

Eine Menge L mit einer Multiplikation ab heißt ein *Gruppoid;* ein Gruppoid, das $(ab)c = a(bc)$ und $ab = ba$ erfüllt, heißt eine *kommutative Halbgruppe.* Jeder kommutativen Halbgruppe läßt sich ein *Einselement* adjungieren, weshalb die Voraussetzung eines e mit $ae = a = ea$ in L keine besondere Einschränkung bedeutet. Gilt zusätzlich $ax = b \;\&\; by = a \Rightarrow a = b$, so heißt L ein *Holoid.* In Holoiden liefert $a \mid b \Leftrightarrow b = ax$ eine *Halbordnung,* weshalb wir auch $a \leqq b$ statt $a \mid b$ und $a < b$ statt $a \mid b \;\&\; a \neq b$ schreiben. Ist L eine kommutative Halbgruppe mit e, so erhält man mittels $a \to aL$ einen Homomorphismus von L auf das Holoid aller Hauptideale $aL (a \in L)$, für den zusätzlich gilt $a \mid b \Leftrightarrow \bar{a} \mid \bar{b}$.

Sei L ein Holoid. Dann heißt $p \in L$ *halbprim,* wenn gilt $p = ab \Rightarrow p = a \vee p = b$, *prim,* wenn gilt $p \mid ab \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b$, *vollprim,* wenn gilt $p^n \mid ab \Rightarrow p \mid a \vee p^n \mid b$, und schließlich *irreduzibel* oder auch ein *Atom,* wenn gilt $a \mid p \Rightarrow a = e \vee a = p$. — L selbst heißt *vollkanonisch,* wenn jedes Element in Vollprimelemente zerfällt, und *atomar,* wenn jedes Element in Atome zerfällt.

Hiernach läßt sich als ein Hauptproblem der Idealtheorie die Frage formulieren:

(F) Wann und nur wann besitzt das Holoid der *Hauptideale* aL einer kommutativen Halbgruppe L ein vollkanonisches Oberholoid?

Beiträge zu dieser Frage lieferten Dedekind, der Begründer der klassischen Idealtheorie, der u. a. die Wiederherstellbarkeit der eindeutigen Primfaktorzerlegung für gewisse Zahlringe nachwies, Emmy Noether, die diese klassische Idealtheorie im Abstrakten formulierte und weiter entwickelte, van der Waerden, der die Noetherschen Ergebnisse für abstrakte Integritätsbereiche durch einen neuen Idealbegriff verallgemeinerte und so weitere wichtige Integritätsbereiche erfaßte, Arnold, der reguläre $(ax = ay \Rightarrow x = y)$ vollkanonische Erweiterungen beliebiger Holoide untersuchte, Clifford, der atomare vollkanonische Erweiterungen beliebiger Holoide untersuchte, und schließlich der Verfasser, der Fragen nach beliebigen vollkanonischen Erweiterungen beliebiger Holoide nachging unter Beschränkung auf Erweiterungstypen, die zwar die bisherigen Erweiterungstypen umfaßten, jedoch immer noch einschränkenden Bedingungen unterworfen waren.

Allen zitierten Arbeiten bzw. Verfassern ist dabei gemein, daß sie die idealtheoretische Frage mittels gewisser ausgezeichneter Teilmengen der vorgegebenen kommutativen Halbgruppe zu lösen versuchten. Diese Teilmengen wandelten sich vom *Dedekindschen Ideal*, in dessen Definition die ringtheoretische Addition wesentlich einfließt, hin zum *v-Ideal*, das unabhängig und gleichzeitig von ARNOLD und VAN DER WAERDEN entdeckt und dessen Definition von CLIFFORD später auf beliebige kommutative Halbgruppen übertragen wurde mittels $(s \mid at \Rightarrow s \mid ct) \Rightarrow c \in \mathfrak{a}$, so daß alle klassischen Idealbedingungen[1]) erfüllt blieben und eine Reihe einschränkender aber wichtiger Fragen in seiner und den späteren Arbeiten des Verfassers beantwortet werden konnte. Eine restlose Beantwortung von (F) konnte dagegen bis heute nicht gegeben werden.

Im folgenden soll deshalb durch eine neue Methode die Untersuchung weiter vorangetrieben werden. Hierzu bietet sich die Tatsache an, daß ein Holoid L genau dann vollkanonisch ist, wenn es *komplementär* ist, d. h. zu je zwei Elementen a, b ein (dann eindeutig bestimmtes) Komplement $a * b$ mit $ax \geqq b \Leftrightarrow x \geqq a * b$ existiert, und darüber hinaus zu jedem b höchstens endlich viele $x * b$ in L existieren.

Wir charakterisieren zunächst in § 1 die Operation $*$ axiomatisch und kommen so zum Begriff der *komplementären Halbgruppe*. Um ihre Struktur aufzuhellen, untersuchen wir in § 2 und § 3 ihre Arithmetik bzw. ihre ideale Arithmetik[2]). In § 4 charakterisieren wir die Kongruenzrelationen komplementärer Halbgruppen mittels gewisser Teilmengen, die wir Zerlegungsideale, kurz z-Ideale, nennen wollen. § 5 bringt dann schließlich eine instruktive Lösung von (F). Dabei nennen wir eine Lösung instruktiv, wenn sie zwar eine schrittweise Konstruktion einer Erweiterung der gesuchten Art liefert, aber schon bei endlichen Holoiden mehr als endlich viele Schritte erfordert. Es läßt sich jedoch erkennen, daß das angegebene Lösungsverfahren für unendliche Holoide gleichwertig ist mit Lösungen durch Teilmengenbereiche, so daß man bei späteren Untersuchungen zu (F) von endlichen Holoiden ausgehen darf, die nach [5] sogar eine atomare vollkanonische Erweiterung besitzen, wenn überhaupt ein vollkanonisches Oberholoid zu ihnen existiert.

1. Eine operative Charakterisierung komplementärer Holoide

Ist L ein vollkanonisches Holoid, so existiert zu jedem $a \in L$ eine eindeutig bestimmte unverkürzbare Vollprimfaktorzerlegung $V(a)$. Hieraus ergibt sich weiter, daß L komplementär ist, denn für $V(b) = \prod_{\tau=1}^{t} q_\tau^{m_\tau}$ ist $a * b = \prod_{\tau=1}^{t} q_\tau^{l_\tau}$, wenn l_τ jeweils gleich m_τ vermindert um das größte $n_\tau \leqq m_\tau$ mit $q_\tau^{n_\tau} \mid a$ ist, was in [5] bewiesen wurde und ohne allzu große Schwierigkeiten folgt.

---

[1]) Mit $\mathfrak{a}_\varkappa$ ist auch $\cap\, \mathfrak{a}_\varkappa$ ein v-Ideal, $\{A\}\{B\} \subseteq \{AB\}$, $\{a\} = aL$, mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ist auch $\mathfrak{b} : \mathfrak{a}$ ein v-Ideal (vgl. [5] und [8]).

[2]) Das scheint insofern gerechtfertigt, als zu den komplementären Holoiden u. a. die regulären $\cup$- bzw. $\cap$-abgeschlossenen Holoide wie auch die Booleschen Ringe, also recht zentrale Strukturen gehören.

Ist weiter L ein beliebiges komplementäres Holoid, so gelten die Beziehungen:

(1) $$(a * a)b = b\,,$$

denn

$$a * a = e\,. —$$

(2) $$ab(ab * a) = ab\,,$$

denn

$$ab * a = e\,. —$$

(3) $$a(a * b) = (b * a)b\,.$$

Denn es ist $a \leqq a(a * b) \geqq b$ und gilt weiter $a \leqq c \geqq b$, so ergibt sich $ax = c \geqq b \Rightarrow x \geqq a * b \Rightarrow c = ax \geqq a(a * b) \Rightarrow a(a * b) = a \cup b = (b * a)b$

(4) $$ab * c = a * (b * c),$$

denn

$$\begin{aligned} & abx \geqq c \\ \Leftrightarrow\ & ax \geqq b * c \\ \Leftrightarrow\ & x \geqq a * (b * c)\,. — \end{aligned}$$

Ist L sogar zusätzlich vollkanonisch, so gilt noch

(5) *Jede Folge* $\left[\left(a_{n+1}\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right) * a\right] * \left[\left(\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right) * a\right]$ *wird schließlich gleich* $a * a$, *wofür wir dann auch sagen wollen, daß die betreffende Folge gegen* $a * a$ *konvergiert, i. Z.* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(a_{n+1}\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right) * a\right] * \left[\left(\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right) * a\right] = a * a.$

Denn auf Grund der Gewinnung von $a * b$ konvergiert jede solche Folge gegen e.

Mit (1) bis (4) ist nun eine Möglichkeit zur operativen Charakterisierung komplementärer und vollkanonischer Holoide gegeben. Denn wir können zeigen, daß jedes Gruppoid, das bezüglich einer zweiten Operation $*$ die Axiome

$$\begin{aligned} &\text{A1} && (a * a)b = b \\ &\text{A2} && ab(ab * a) = ab \\ &\text{A3} && a(a * b) = (b * a)b \\ &\text{A4} && ab * c = a * (b * c) \end{aligned}$$

erfüllt, ein komplementäres Holoid ist. Es gilt nämlich nach diesen Axiomen:

(6) $$b(a * a) = b\,,$$

denn

$$\begin{aligned} a * a &= (b * b)\,(a * a) \\ &= [(a * a)\,(b * b)]\,[((a * a)\,(b * b))\,a * a] \\ &= [(a * a)\,(b * b)]\,[(a * a)\,(b * b) * (a * a)] \\ &= (a * a)\,(b * b) = b * b \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$b(a * a) = b(b * b)$$
$$= (b * b)b = b \,. \quad —$$

(7) $$(ab)c = a(bc) \,,$$

denn

$$(ab)c = [a(bc) * a(bc)]\,(ab)c$$
$$= [a * (bc * a(bc))]\,(ab)c$$
$$= [a * (b * (c * a(bc)))]\,(ab)c$$
$$= [ab * (c * a(bc))]\,(ab)c$$
$$= [(ab)c * a(bc)]\,(ab)c$$
$$= a(bc)\,[a(bc) * (ab)c]$$
$$= a(bc)\,[a * (bc * (ab)c)]$$
$$= a(bc)\,[a * (b * (c * (ab)c))]$$
$$= a(bc)\,[ab * (c * (ab)c)]$$
$$= a(bc)\,[(ab)c * (ab)c]$$
$$= a(bc) \,. \quad —$$

Bezeichnen wir das eindeutig bestimmte Element $a * a = b * b$ mit e, so folgt weiter:

(8) $$e * a = a \,,$$

denn

$$e * a = (e * a)\,[(e * a) * (e * a)]$$
$$= (e * a)\,[(e * a)e * a]$$
$$= (e * a)\,[(e * a) * a]$$
$$= [a * (e * a)]a$$
$$= (ae * a)a$$
$$= (a * a)a = a \,. \quad —$$

(9) $$a * e = e \,,$$

denn

$$a * e = ea * e$$
$$= e(e * a) * e$$
$$= (a * e)a * e$$
$$= (a * e) * (a * e) = e \,. \quad —$$

Nun können wir die wichtige Implikation beweisen:

(10) $$xa = b \Rightarrow b * a = e \Rightarrow (a * b)a = b = a(a * b) \,,$$

denn

$$xa = b \Rightarrow b * a = xa * a$$
$$= x * (a * a)$$
$$= x * e = e$$

und

$$b * a = e \Rightarrow b = (b * a)b = a(a * b)$$
$$\& \; b = b(b * a) = (a * b)a \; . \; —$$

Aus (10) ergibt sich die Äquivalenz:

(11) $$xa = yb \Leftrightarrow x * (a * b) = e \; ,$$

denn

$$xa = yb \Rightarrow xa * b = yb * b$$
$$\Rightarrow x * (a * b) = y * (b * b) = y * e = e$$

und

$$x * (a * b) = e \Rightarrow xa * b = e \Rightarrow xa = (b * xa)b = yb \; . \; —$$

Weiter ergibt sich aus (10) die Antisymmetrie:

(12) $$xa = b \; \& \; yb = a \Rightarrow a = b \; ,$$

denn

$$xa = b \; \& \; yb = a \Rightarrow a = ae = a(a * b) = (b * a)b = eb = b \; . \; —$$

Mittels (12) läßt sich zeigen:

(13) $$ab = ba \; ,$$

denn

$$ba = b(ab * ab)a$$
$$= b[a * (b * ab)]a$$
$$= b(b * ab)\,[(b * ab) * a]$$
$$= (ab * b)ab\,[(b * ab) * a]$$
$$= [a * (b * b)]ab\,[(b * ab) * a]$$
$$= ab\,[(b * ab) * a] = abc$$
$$= abc(abc * ab)$$
$$= (ab * abc)ab = yab \; ,$$

was insgesamt $ab = xba \; \& \; ba = yab \Rightarrow ab = ba$ bedeutet. —

Beachten wir noch, daß sich aus (10), (11), (12), (13) ergibt

(14) $$ax \geqq b \Rightarrow x \geqq a * b \; ,$$

so können wir formulieren

Satz 1. *Ein Gruppoid ist genau dann ein komplementäres Holoid, wenn es bezüglich einer zweiten Operation $*$ die Axiome $A1$ bis $A4$ erfüllt.*

Auf Grund von Satz 1 wollen wir im folgenden allgemein von komplementären Halbgruppen, statt von komplementären Holoiden sprechen. Wir zeigen für diese Strukturen weiter:

(15) $$a * b * b * b = a * b \quad ,$$

denn

$$(a * b)\,(a * b * b) = b \Rightarrow a * b * b * b \leqq a * b$$

und

$$(a * b * b) \leqq a \Rightarrow a * b * b * b = (a * b * b) * b \geqq a * b \,. —$$

(16) *Das Element p aus L ist genau dann halbprim, wenn $a * p = p \vee a * p = e$ gilt für alle a aus L.*

Denn gilt die Voraussetzung des Satzes, so folgt

$$p = ab \Rightarrow p = (a * p)\,(a * p * p) \Rightarrow p = a * p \leqq$$

$$\leqq b \vee p = a * p * p \leqq a \Rightarrow p = a \vee p = b \,.$$

Ist p halbprim, so folgt

$$(a * p)\,(a * p * p) = p \Rightarrow a * p = p \vee a * p * p = p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a * p = p \vee a * p = a * p * p * p = p * p = e \,. —$$

(17) *Das Element p aus L ist genau dann vollprim, wenn es halbprim ist.*

Zunächst gilt $p \mid ab \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b$. Denn $ab \geqq p \Rightarrow a * (b * p) = ab * p = e \Rightarrow$ $\Rightarrow b * p = e \vee a * p = e \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b$.

Ist weiter $p^n \mid ab \;\&\; p^n \nmid b$ und p^ν die maximale Potenz von p mit $p^\nu \mid b$, so folgt mit $p^\nu b_1 = b$ die Beziehung $p^\nu p \mid ab_1 p^\nu$. Es ist aber $p^\nu * p^\nu p = p$, da sonst $p^\nu = p^{\nu+1} \Rightarrow p^\nu = p^n \Rightarrow p^n \mid b$ folgen würde mit Widerspruch. Das bedeutet dann insgesamt, daß $p \mid ab_1$, also $p \mid a$ gelten muß. —

Um die vollkanonischen Holoide axiomatisch charakterisieren zu können, formulieren wir

$$\text{A5} \quad \lim_{n \to \infty} \left[\left(a_{n+1} \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \right) * a \right] * \left[\left(\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \right) * a \right] = a * a \,.$$

Dann gilt

(18) *Ist L ein Holoid, das A1 bis A5 erfüllt, so ist L vollkanonisch.*

Auf Grund von $a * a = e$ ergibt sich leicht mittels der Axiome A1 bis A5 für jedes Element aus L eine Zerlegung in Faktoren, die nur noch e und sich selbst als Komplement umfassen und deshalb nach (16) und (17) vollprim sind. — (Vgl. 2.)

Damit liefern die Ergebnisse dieses Paragraphen den

Satz 2. *Ein Gruppoid ist genau dann ein vollkanonisches Holoid, wenn es bezüglich einer zweiten Operation $*$ die Axiome A1 bis A5 erfüllt.*

Mit Satz 2 ist erstmals eine völlig unabhängige Charakterisierung vollkanonischer Holoide gegeben. Denn alle bisherigen Charakterisierungen waren lediglich unabhängig über Holoiden, d. h. unter Außerachtlassung der Holoidaxiome. A1 bis A5 sind dagegen in beliebigen Gruppoiden erklärt und voneinander unabhängig. Denn wir können zeigen:

1. Ist L eine beliebige Menge, bestehend aus mehr als einem Element, so erfüllt L bezüglich $ab = a$ und $a * b = b$ zwar A2, A3, A4, A5, nicht aber Axiom A1, was man leicht bestätigt.

2. Ist L wieder eine beliebige Menge bestehend aus mehr als einem Element, so erfüllt L bezüglich $ab = b$ und $a * b = b$ zwar A1, A3, A4, A5, nicht aber Axiom A2, was man ebenfalls leicht nachweist.

3. Ist L eine beliebige Halbgruppe mit Einselement, bestehend aus mehr als zwei Elementen, so erfüllt L bezüglich $a * b = e$ zwar A1, A2, A4, A5, nicht aber Axiom A3, was man wieder leicht sieht.

4. Ist L die Halbgruppe der Zahlen $1, 2, 4, 6 \ldots 0$, so erfüllt L bezüglich $a * b = 1$, falls $b \mid a$, $a * b = b : a$, falls $a \mid b$, und $a * b = 0$, falls $a \nmid b$ & $b \nmid a$ zwar A1, A2, A3, A5, nicht aber Axiom A4. Denn es gilt $6 \cdot 10 * 2 = 1 \neq 0 = 6 * (10 * 2)$. Der Rest darf auch hier dem Leser überlassen werden.

5. Ist schließlich L die Potenzmenge der Menge N der natürlichen Zahlen, so erfüllt L bezüglich $\cup$ und $A * B = (A \cup B) - A$ zwar A1, A2, A3, A4, nicht aber Axiom A5, da N unendlich viele Teilmengen hat.

2. Zur Arithmetik komplementärer Halbgruppen

In diesem Abschnitt sollen einige arithmetische Regeln für komplementäre Halbgruppen zusammengestellt werden, die zum Teil für die weiteren Ausführungen von Bedeutung sind. Wir zeigen:

$$a \leqq b \Rightarrow a * c \geqq b * c \quad \text{und} \quad a \leqq b \Rightarrow c * a \leqq c * b\,, \tag{19}$$

denn dies folgt aus $ax \geqq b \Leftrightarrow x \geqq a * b$. —

$$a(a * b) = a \cup b\,, \tag{20}$$

denn dies wurde bereits im Beweis zu (3) gezeigt. —

$$a(b \cup c) = ab \cup ac\,, \tag{21}$$

denn

$$a(b \cup c) \geqq ab \cup ac$$

und

$$\begin{aligned} a(b \cup c) &= ac(c * b) \\ &\leqq ac[(a * ac) * b] \\ &= a(a * ac)\,[(a * ac) * b] \\ &= ab[b * (a * ac)] \\ &= ab(ba * ac) \\ &= ab \cup ac\,. — \end{aligned}$$

Eine komplementäre Halbgruppe muß nicht $\cap$-abgeschlossen sein, was wir schon früher zeigten. Ist L jedoch eine $\cap$-abgeschlossene komplementäre Halbgruppe, so gilt:

$$a(b \cap c) = ab \cap ac\,, \tag{22}$$

denn

$$a(b \cap c) \leqq ab \cap ac$$

und

$$\begin{aligned} a(b \cap c) &\geqq a[a * (ab \cap ac)] \\ &= ab \cap ac \,. — \end{aligned}$$

(23) $$a * (b \cup c) = (a * b) \cup (a * c)\,,$$

denn

$$\begin{aligned} ax \geqq b \cup c &\Leftrightarrow b \leqq ax \geqq c \\ &\Leftrightarrow x \geqq (a * b) \cup (a * c) \,. — \end{aligned}$$

(24) $$(a \cap b) * c = (a * c) \cup (b * c)\,,$$

denn

$$\begin{aligned} (a \cap b)x \geqq c &\Leftrightarrow ax \cap bx \geqq c \\ &\Leftrightarrow ax \geqq c \leqq bx \\ &\Leftrightarrow x \geqq (a * c) \cup (b * c) \,. — \end{aligned}$$

(25) $$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$

bzw. $$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)\,,$$

denn

$$a \cup (b \cap c) \leqq (a \cup b) \cap (a \cup c)$$

und

$$\begin{aligned} a \cup (b \cap c) &= (b \cap c)\,[(b \cap c) * a] \\ &= b\,[(b \cap c) * a] \cap c\,[(b \cap c) * a] \\ &= b\,[(b * a) \cup (c * a)] \cap c\,[(b * a) \cup (c * a)] \\ &\geqq b(b * a) \cap c(c * a) \\ &= (a \cup b) \cap (a \cup c) \,. — \end{aligned}$$

Hieraus folgt der erste Teil nach bekannter Methode mittels zweifacher Anwendung des bewiesenen Gesetzes. —

(26) $$(a \cap b)\,(a \cup b) = ab\,,$$

denn

$$\begin{aligned} (a \cap b)\,(a \cup b) &= (a \cap b)a \cup (a \cap b)b \\ &= (a^2 \cap ab) \cup (ab \cap b^2) \\ &\leqq ab \\ &\leqq (a^2 \cup ab) \cap (ab \cup b^2) \\ &= a(a \cup b) \cap b(a \cup b) \\ &= (a \cap b)\,(a \cup b) \,. — \text{ (Vgl. [13].)} \end{aligned}$$

In Worten kommen wir damit im wesentlichen zu dem Ergebnis:

Satz 3. *In komplementären Halbgruppen sind die Operationen* $\cdot$, $*$, $(\cap)$ *distributiv verknüpfbar mit* $\cup$.

3. Zur idealen Arithmetik komplementärer Halbgruppen

Wir erwähnten im letzten Paragraphen, daß komplementäre Halbgruppen nicht notwendig $\cap$-abgeschlossen sind. Ziel dieses Paragraphen ist der Nachweis, daß sich jede komplementäre Halbgruppe unter Erhalt von $\cup$ einbetten läßt in ein $\cap$-abgeschlossenes Oberholoid, in dem die Arithmetik des letzten Paragraphen im wesentlichen gilt. Hierzu zeigen wir:

(27) *Ist L eine komplementäre Halbgruppe, so besteht das von $A \subseteq L$ erzeugte v-Ideal $\{A\}$ aus genau allen gemeinsamen Vielfachen aller gemeinsamen Teiler von A (vgl.* [5]*).*

Denn $s \mid A \Rightarrow s \mid \{A\}$. — Gilt umgekehrt $g \mid A \Rightarrow g \mid c$, so folgt $s \mid A\,t \Rightarrow t * s \mid A \Rightarrow$ $\Rightarrow t * s \mid c \Rightarrow t(t * s) = t \cup s \mid ct \Rightarrow s \mid ct$. —

(28) *Ist L eine komplementäre Halbgruppe, $\{b\}$ ein Hauptideal und A endlich, so ist auch $\{b\} : \{A\}$ ein Hauptideal, dessen Basis wir mit $\{A\} * b$ bezeichnen wollen (vgl.* [5]*).*

Denn man betrachte $c = \bigcup\limits_{a \in A} a * b$. Dann gilt $\{A\}\{c\} \subseteq \{b\} \Rightarrow \{c\} \subseteq \{b\} : \{A\}$. Ist weiter $x \in \{b\} : \{A\}$, so folgt $b \mid ax (a \in A)$, also $a * b \mid x$ für alle $a \in A$ und damit $c \mid x$, d. h. $\{b\} : \{A\} \subseteq \{c\}$. —

Aus (28) folgt nun der wichtige Satz

(29) *Ist L eine komplementäre Halbgruppe, so gilt für je zwei endliche v-Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ die Äquivalenz $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$ (vgl.* [5]*).*

Denn es gelte $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$. Dann ist etwa $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$, also $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$, so gilt zunächst $\mathfrak{a} \mid \{b\}$, $b \in \mathfrak{a}$, wegen: $\mathfrak{a} = \{A\}$ & $\{A\} * b = c$ & $d \mid \mathfrak{a}c \Rightarrow c \mid b \cup d = g \leqq \mathfrak{a}c$, also $c * g \mid A$ und damit $c * g \mid b$, was bedeutet $(c * g)x = b \Rightarrow \mathfrak{a}x \geqq b \Rightarrow x \geqq \{A\} * b = c \Rightarrow g = c(c * g) \leqq x(c * g) = b$, also $b = b \cup d$ oder $d \mid b$, woraus sich nach (27) $\mathfrak{a}\{c\} = \{b\}$ ergibt.

Ist nun $\mathfrak{b} = \{B\}$, so betrachten wir das von der Menge aller $\{A\} * b$ mit $b \in B$ erzeugte v-Ideal $\mathfrak{c}$. Für dieses gilt dann $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$. —

Im folgenden identifizieren wir die Hauptideale mit ihren Basiselementen und betrachten den Bereich $\mathfrak{L}$ der endlichen v-Ideale, d. h. der v-Ideale von endlicher Basis, aus L. Dann gilt zunächst:

(30) *In $\mathfrak{L}$ existiert zu je endlich vielen Elementen $\mathfrak{a}_\nu$ der GGT.*

Dies folgt unmittelbar aus (29). —

Weiter können wir zeigen

(31) *In $\mathfrak{L}$ existiert zu je endlich vielen Elementen das KGV und zwar gilt KGV $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$*[3]*$) = \{a_\nu \cup b_\mu\}$, worin a_ν bzw. b_μ jeweils eine (endliche) Basis von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ durchlaufen.*

Wir zeigen zunächst die Existenz von $c \cup \mathfrak{a}$. Es gilt $\mathfrak{a}(\mathfrak{a} * c) = \mathfrak{a} \cup c$, was aus $\mathfrak{a}\{x_\nu\} \geqq c \Rightarrow \mathfrak{a}x_\nu \geqq c \Rightarrow x_\nu \geqq \mathfrak{a} * c$ folgt. Dann ergibt sich aber weiter

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(\mathfrak{a} * c) &= \{a_1(\mathfrak{a} * c), \ldots, a_n(\mathfrak{a} * c)\} \\ &= \{a_1 \bigcup_{\nu=1}^{n} (a_\nu * c), \ldots, a_n \bigcup_{\nu=1}^{n} (a_\nu * c)\} \\ &\subseteq \{a_1 \cup c, \ldots, a_n \cup c\} \end{aligned}$$

[3]) Wir verwenden das Zeichen $\wedge$ für den mengentheoretischen Durchschnitt.

und

$$\mathfrak{a} \supseteq \{a_1 \cup c, \ldots, a_n \cup c\} \subseteq \{c\},$$

was zusammen bedeutet

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{a} * c) = \mathfrak{a} \cup c = \{a_1 \cup c, \ldots, a_n \cup c\}$$

Es seien nun $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei Elemente aus $\mathfrak{L}$. Ist dann $d \in \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$, so folgt

$$\begin{aligned} d \cup \{a_\nu \cup b_\mu\} &= [(d \cup a_1) \cup \mathfrak{b}] \cap \cdots \cap [(d \cup a_n) \cup \mathfrak{b}] \\ &= (d \cup a_1) \cap \cdots \cap (d \cup a_n) \\ &= \{d \cup a_\nu\} = d \cup \mathfrak{a} = d\,. \end{aligned}$$

Das bedeutet dann aber, daß $\{a_\nu \cup b_\mu\}$ jedes Element des mengentheoretischen Durchschnitts $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$ umfaßt, also gleich diesem ist. —

Aus (30) und (31) ergibt sich nun die angekündigte ideale Arithmetik:

(32) In $\mathfrak{L}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \cup (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) &= (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{c}) \\ \mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} \cup \mathfrak{c}) &= (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \cup (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}) \\ \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cup \mathfrak{c}) &= \mathfrak{a}\mathfrak{b} \cup \mathfrak{a}\mathfrak{c} \\ \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) &= \mathfrak{a}\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}\mathfrak{c}\,. \end{aligned}$$

Denn zunächst ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \cup (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) &= \mathfrak{a} \cup \{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}\} \\ &= \{\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \cup \mathfrak{c}\} \\ &= (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{c}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) &= \mathfrak{a}\{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}\} \\ &= \{\mathfrak{a}\mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{c}\} \\ &= \mathfrak{a}\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}\mathfrak{c}\,. \end{aligned}$$

Der Beweis der letzten Behauptung ist entschieden schwieriger und langwieriger. Es gilt zunächst

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cup \mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b} \cup \mathfrak{a}\mathfrak{c} = \{a_{\nu_1} b_\varkappa \cup a_{\nu_2} c_\lambda\} \begin{pmatrix} 1 \leqq \nu_1 \leqq n \\ 1 \leqq \nu_2 \leqq n \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(\mathfrak{b} \cup \mathfrak{c}) &= \mathfrak{a}\{b_\varkappa \cup c_\lambda\} \\ &= \{a_\nu (b_\varkappa \cup c_\lambda)\} \\ &= \{a_\nu b_\varkappa \cup a_\nu c_\lambda\}\,, \end{aligned}$$

so daß es genügt

$$\{ad \cup bc\} \subseteq \{ad \cup ac, bd \cup bc\}$$

nachzuweisen. Nun ist aber

$$\begin{aligned} \{ad \cup ac, bd \cup bc\} &= \{ad \cup ac\} \cap \{bd \cup bc\} \\ &= [\{ad\} \cup \{ac\}] \cap [\{bd\} \cup \{bc\}] \\ &= [\{ad\} \cap \{bd\}] \cup [\{ad\} \cap \{bc\}] \cup \\ &\quad \cup [\{ac\} \cap \{bd\}] \cup [\{ac\} \cap \{bc\}]\,, \end{aligned}$$

so daß es weiter genügt

$$\{ac\} \cap \{bd\} \supseteq \{ad\} \cup \{bc\}$$

zu beweisen. Wegen $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} : \mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{b}$ genügt hierzu der Nachweis von

$$\{ad \cup bc\}\,[\{ac, bd\} : \{ad \cup bc\}] \supseteq \{ad \cup bc\}\,.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \{ac, bd\} : \{ad \cup bc\} &\supseteq \{ac, bd\} : \{ad\} \\ &\supseteq \{ac\} : \{ad\} \\ &\supseteq \{c\} : \{d\} = \{d * c\} \end{aligned}$$

und analog

$$\{ac, bd\} : \{ad \cup bc\} \supseteq \{d\} : \{c\} = \{c * d\}$$

also

$$\{ac, bd\} : \{ad \cup bc\} \supseteq \{c * d, d * c\}$$

und damit

$$\{ad \cup bc\}\,[\{ac, bd\} : \{ad \cup bc\}] \supseteq \{ad \cup bc\}\,\{c * d, d * c\}\,.$$

Aus diesem Grunde sind wir fertig, wenn wir zeigen, daß gilt:

$$\{ad \cup bc\}\,\{c * d, d * c\} = \{ad \cup bc\}\,.$$

Hierzu erwähnen wir zunächst die Implikation

$$\begin{aligned} c * d = \{c, d\} * d \;\&\; d * c = \{c, d\} * c \Rightarrow \\ \Rightarrow \{c, d\}\,\{c * d, d * c\} = \{\{c, d\}\,(c * d), \{c, d\}\,(d * c)\} = \{c, d\}\,, \end{aligned}$$

woraus sich weiter ergibt

$$\begin{aligned} \{c, d\}\,[\{c * d, d * c\} * (c * d)] &= \{c, d\}\,\{c * d, d * c\}\,[\{c * d, d * c\} * (c * d)] \\ &= \{c, d\}\,(c * d) = \{d\}\,, \end{aligned}$$

also

$$c * d = \{c, d\} * d \leqq \{c * d, d * c\} * (c * d)\,,$$

was wegen

$$c * d \geqq \{c * d, d * c\} * (c * d)$$

nach sich zieht

$$\{c * d, d * c\} * (c * d) = c * d$$

und damit dann

$$\{c * d, d * c\}\,\{c * d\} = \{c * d\}\,.$$

Da man in der letzten Gleichung selbstverständlich aus Analogiegründen c und d vertauschen kann, erhalten wir somit aber unter Berücksichtigung von $c * d \leqq ad$ und $d * c \leqq bc$ die Gleichung

$$\{ad \cup bc\}\,\{c * d, d * c\} = \{ad \cup bc\}\,,$$

die noch zu beweisen war. —

Aus (32) ergibt sich nach bekanntem Verfahren auch hier die Gleichung $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. — Es könnte noch die Frage aufkommen, ob die hier konstruierte Erweiterung auch notwendig komplementär ist. Daß dies nicht der Fall ist, wurde in [5] gezeigt und ebenso, daß man auf andere Weise jedes vollkanonische Holoid unter Erhalt von $\cup$ in ein $\cap$-abgeschlossenes vollkanonisches Oberholoid einbetten kann.

Wir fassen die Ergebnisse dieses Paragraphen zusammen zu

Satz 4. *Jede komplementäre Halbgruppe läßt sich unter Erhalt von $\cup$ einbetten in ein $\cap$-abgeschlossenes Oberholoid, in dem $\cdot$ mit $\cap$ und $\cup$ sowie $\cap$ und $\cup$ miteinander distributiv verknüpfbar sind.*

4. Kongruenzrelationen in komplementären Halbgruppen

Ziel dieses Paragraphen ist die Charakterisierung der Kongruenzrelationen komplementärer Halbgruppen mittels spezieller Teilmengen, die wir als z-Ideale bezeichnen wollen und die definiert sind mittels $ab \in I \Leftrightarrow a \in I \supset b$. — Man sieht leicht, daß auf Grund dieser Definition der Durchschnitt einer Familie von z-Idealen wieder ein z-Ideal ist und das von $A \subseteq L$ erzeugte z-Ideal $[A]$ gleich der Menge aller b mit $b \leqq \prod_{a_\nu \in A} a_\nu$ ist.

Es gilt nun:

(33) *Ist $\equiv$ eine Kongruenzrelation in L*[4]*, so ist die Klasse $K(e)$ ein z-Ideal.*

Denn mit $a \equiv e \equiv b$ ist $ab \equiv ee \equiv e \in K(e)$ und gilt $ab \in K(e)$, so folgt $b \equiv e * b \equiv ab * b \equiv a * (b * b) \equiv a * e \equiv e$. —

Weiter können wir zeigen:

(34) *Ist $\equiv$ eine Kongruenzrelation in L, so gilt $a \equiv b$ genau dann, wenn $(a * b)(b * a) \equiv e$ ist.*

Denn $a \equiv b \Rightarrow a * b \equiv a * a \equiv e \equiv b * b \equiv b * a \Rightarrow (a * b)(b * a) \equiv e$. — Ist $(a * b)(b * a) \equiv e$, so folgt nach (33) $a * b \equiv e \equiv b * a \Rightarrow a \equiv ae \equiv a(a * b) \equiv$ $\equiv b(b * a) \equiv be \equiv b$. —

Als Kehrsatz von (33) und (34) gilt:

(35) *Ist I ein z-Ideal aus L, so liefert die Festsetzung $a \equiv b \Leftrightarrow (a * b)(b * a) \in I$ eine Kongruenzrelation bezüglich $\cdot$, $*$, ($\cup$ und $\cap$).*

Wir erwähnen zunächst, daß zum Nachweis von $a \equiv b$ auf Grund des Bisherigen der Nachweis von $a * b \leqq x \in I \supset y \geqq b * a$ genügt. Es folgt:

(a) Die erklärte Relation $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation. Denn

$$a = a \Rightarrow (a * a)(a * a) = ee = e \in I$$

$$a \equiv b \Rightarrow (a * b)(b * a) = (b * a)(a * b) \in I$$

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b \\ \& \; b \equiv c \end{array}\right\} \Rightarrow (a * b)(b * c) \in I$$

$$\Rightarrow a * c \in I,$$

[4]) L soll im folgenden stets komplementär sein, $\equiv$ verträglich mit $\cdot$ und $*$.

wegen

$$\begin{aligned} a(a*b)(b*c) &= (a \cup b)(b*c) \\ &= a(b*c) \cup b(b*c) \\ &\geqq b \cup c \geqq c \\ &\Rightarrow a*c \leqq (a*b)(b*c) \in I\,. \end{aligned}$$

Da sich $c*a \in I$ analog ergibt, ist damit (a) bewiesen.

(b) Die Relation $\equiv$ ist verträglich mit der Multiplikation. Denn

$$\begin{aligned} a \equiv a' &\Rightarrow ab*a'b \\ &= a*(b*a'b) \\ &\leqq a*a' \in I, \quad \text{wozu sich analog} \quad a'*a \in I \end{aligned}$$

ergibt, was

$$a \equiv a' \;\&\; b \equiv b' \Rightarrow ab \equiv a'b \equiv a'b'$$

bewirkt. —

(c) Die Relation $\equiv$ ist verträglich mit $*$. Denn

$$\begin{aligned} a \equiv a' &\Rightarrow (a*b)*(a'*b) \\ &= (a*b)a'*b \\ &= a'(a*b)*b \\ &= a'*[(a*b)*b] \\ &\leqq a'*a \in I \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b \equiv b' &\Rightarrow (a*b)*(a*b') \\ &= (a*b)a*b' \\ &= (a \cup b)*b' \\ &\leqq b*b' \in I\,. \end{aligned}$$

Da sich $(a'*b)*(a*b) \in I \ni (a*b')*(a*b)$ analog ergibt, folgt hieraus $a \equiv a' \;\&\; b \equiv b' \Rightarrow a*b \equiv a'*b \equiv a'*b'$. —

(d) Die Relation $\equiv$ ist verträglich mit $\cup$. Denn dies bewirkt die Gleichung $a \cup b = a(a*b)$. —

(e) Die Relation $\equiv$ ist verträglich mit $\cap$. Denn

$$\begin{aligned} a \equiv a' &\Rightarrow (a \cap b)*(a' \cap b) \\ &= [a*(a' \cap b)] \cup [b*(a' \cap b)] \\ &= [a*(a' \cap b)] \cup e \\ &\leqq a*a' \in I\,. \end{aligned}$$

Da sich $(a' \cap b)*(a \cap b) \in I$ analog ergibt, folgt hieraus

$$a \equiv a' \;\&\; b \equiv b' \Rightarrow a \cap b \equiv a' \cap b \equiv a' \cap b'\,. \;—$$

Auf Grund von (35) ist $\equiv$ verträglich mit $*$, $\cup$, $\cap$, doch ist damit noch nicht bewiesen, daß diese Operationen bezüglich $\equiv$ auch ihre inhaltliche Bedeutung nicht verlieren. Deshalb zeigen wir:

(36) *Ist L eine ($\cap$-abgeschlossene) komplementäre Halbgruppe, so behalten die Operationen $*$, $\cup$, ($\cap$) bei jedem Homomorphismus ihre inhaltliche Bedeutung bei.*

Für $*$ und $\cup$ ist dies klar, da A1 bis A4 bei jedem Homomorphismus mitgehen und $a \cup b = a(a * b)$ ist. Für $\cap$ haben wir schließlich, wenn wir Bildelemente und Bildoperationen überstreichen:

$$\bar{a} \bar{*} (\bar{a} \bar{\cap} \bar{b}) = \overline{a * (a \cap b)} = \bar{e} = \overline{b * (b \cap a)} = \bar{b} \bar{*} (\bar{b} \bar{\cap} \bar{a})$$

und

$$\begin{aligned} \bar{a} \bar{*} \bar{c} = \bar{e} = \bar{b} \bar{*} \bar{c} \Rightarrow (\bar{a} \bar{\cap} \bar{b}) \bar{*} \bar{c} &= \overline{(a \cap b) * c} \\ &= \overline{(a * c) \cup (b * c)} \\ &= (\bar{a} \bar{*} \bar{c}) \bar{\cup} (\bar{b} \bar{*} \bar{c}) \\ &= \bar{e} \bar{*} \bar{e} = \bar{e} \,. — \end{aligned}$$

Bezüglich der Vollprimelemente aus L gilt bei Homomorphismen:

(37) *Ist p ein Vollprimelement der komplementären Halbgruppe L und $\bar{L}$ ein homomorphes Bild von L, so ist auch $\bar{p}$ ein Vollprimelement in $\bar{L}$. Hierfür gilt weiter $\bar{p} = \bar{e}$ oder aber $\bar{p}^n \bar{p} = \bar{p}^n \Rightarrow p^n p = p^n$.*

Wegen $\bar{a} \bar{*} \bar{p} = \overline{a * p} \Rightarrow \bar{a} \bar{*} \bar{p} = \bar{e} \vee \bar{a} \bar{*} \bar{p} = \bar{p}$ ist $\bar{p}$ zunächst halbprim und damit vollprim. Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich aus der Implikation $\bar{p}^n \bar{p} = \bar{p}^n \Rightarrow \bar{p}^n * \bar{p}^n \bar{p} = \overline{p^n * p^n p} = \bar{e}$ unter Berücksichtigung von $p^n * p^n p = p \vee p^n * p^n p = e$. —

Aus (37) folgt leicht, daß die Restklassenholoide vollkanonischer Holoide nichts anderes sind als die „*Restholoide*", die entstehen, wenn man einfach gewisse Vollprimelemente, nämlich die des zugehörigen z-Ideals „streicht". Somit erhalten wir zusammenfassend:

Satz 5. *Man beherrscht genau dann alle Kongruenzrelationen einer vorgegebenen komplementären Halbgruppe, wenn man ihre z-Ideale beherrscht. Dabei bewahren bei jedem Homomorphismus $*$, $\cup$, (und $\cap$) ihre inhaltliche Bedeutung.*

Weiter beherrscht man alle Restklassenholoide eines vollkanonischen Holoids, wenn man seine sämtlichen Restholoide kennt.

Im zweiten Teil dieses Paragraphen wollen wir noch kurz auf die Halbgruppe der z-Ideale oder, was damit gleichbedeutend ist, auf den Verband der Kongruenzrelationen komplementärer Halbgruppen eingehen. Es gilt:

(38) *Ist $[A] = [A']$ und $[B] = [B']$, so ist auch $[AB] = [A'B']$.*

Denn gilt $c \in [AB]$, so ist $c \leqq \prod_{\substack{\nu=1 \\ \mu=1}}^{n|m} a_\nu b_\mu$, also, da jedes $a_\nu b_\mu$ Teiler eines $\prod_{\sigma=1}^{s} a'_\sigma \prod_{\tau=1}^{t} b'_\tau$ ist, $[AB] \subseteq [A'B']$. Analog folgt $[A'B'] \subseteq [AB]$, was dann die Behauptung ausmacht. —

(39) *Das Produkt $I_1 I_2$ zweier z-Ideale besteht aus genau allen Elementen ab mit $a \in I_1$, $b \in I_2$.*

Daß die genannten Elemente zu $I_1 I_2$ gehören, ist klar. — Gilt umgekehrt $c \in I_1 I_2$, so ist $c \leqq ab$ mit $a \in I_1$, $b \in I_2$, so daß wir $c = (a * c)(a * c * c)$ mit $a * c | b$ & $a * c * c | a$, d. h. $a * c \in I_2$ und $a * c * c \in I_1$ erhalten. —

Aus (39) folgt speziell:

(40) *Die z-Ideale komplementärer Halbgruppen sind idempotent bezüglich der Multiplikation.*

Auf Grund von (40) wird der Bereich der z-Ideale einer komplementären Halbgruppe zu einem Verband bezüglich $\cdot$ und $\wedge$ und wir dürfen wegen (39) $\cap$ statt $\wedge$ schreiben. Für diesen gilt:

$$I_1(I_2 \cap I_3) = I_1 I_2 \cap I_1 I_3 . \tag{41}$$

Zunächst ist $I_1(I_2 \cap I_3) \subseteq I_1 I_2 \cap I_1 I_3$. — Es sei nun umgekehrt $d \in I_1 I_2 \cap \cap I_1 I_3$. Dann gilt $d \leqq a_1 b$ & $d \leqq a_2 c$ mit $a_1 \in I_1 \ni a_2$ und $b \in I_2$, $c \in I_3$, also auch mit $a_1 a_2 = a \in I_1$ die Beziehung $d \leqq ab$ & $d \leqq ac$, was $d = (a * d)\,(a * d * d)$ mit $a * d * d \leqq a$ und $a * d \leqq b$, $a * d \leqq c$ und damit die Behauptung ausmacht. —

(41) läßt sich nach einer Methode von Birkhoff noch verschärfen zu:

(41′) *Im Verband $V(L)$ der Kongruenzrelationen einer komplementären Halbgruppe L besitzt jedes Element, also jede Kongruenzrelation von L, eine Darstellung als Durchschnitt $\cap$-primer Elemente.*

Daß es sich um eine Verschärfung von (41) handelt, ergibt sich aus $p \geqq \geqq a \cup (b \cap c) \Rightarrow p \geqq a$ & $p \geqq b \cup c \Rightarrow p \geqq a \cup b \vee p \geqq a \cup c$ für die $\cap$-primen Elemente p eines jeden Verbandes.

Somit bleibt nur noch zu zeigen, daß sich jedes z-Ideal zerlegen läßt in $\cap$-prime Ideale. Hierzu erwähnen wir zunächst die bekannte Tatsache, daß jedes $\cap$-irreduzible (halbprime) Element eines distributiven Verbandes $\cap$-prim ist. Es gilt ja $p \geqq a \cup b \Rightarrow p \cup (a \cap b) = p = (p \cup a) \cap (p \cup b) \Rightarrow p = p \cup \cup a \vee p = p \cup b \Rightarrow p \geqq a \vee p \geqq b$. — Ist nun weiter I ein z-Ideal aus L, so sei $\bigcap_{\varkappa \in K} P_\varkappa$ der Durchschnitt aller I umfassenden $\cap$-irreduziblen Ideale. Gäbe es dann ein $a \in \bigcap_{\varkappa \in K} P_\varkappa - I$, so gäbe es auch ein maximales, a nicht enthaltendes Ideal $I_m \supseteq I$, da die Vereinigungsmenge einer aufsteigenden Folge von z-Idealen wieder ein z-Ideal ist, was bedeuten würde, daß I_m $\cap$-irreduzibel ist, mit Widerspruch zu $a \notin I_m$. — (Vgl. [6].)

Schließlich erwähnen wir noch:

(42) *Im Verband $V(L)$ aller Kongruenzrelationen einer vorgegebenen komplementären Halbgruppe bilden diejenigen Kongruenzrelationen, deren zugehöriges Restklassenholoid vollkanonisch ist, einen Unterverband.*

Daß die Behauptung bezüglich $\cup$ gilt, ist klar, da A 1 bis A 5 mitgehen. — Daß die Behauptung auch bezüglich $\cap$ gilt, ergibt sich daraus, daß im anderen Falle mindestens eins von zwei vorgegebenen vollkanonischen Restholoiden A 5 verletzen müßte, was man sich leicht klar macht. —

Damit kommen wir zu

Satz 6. *Im Verband $V(L)$ aller Kongruenzrelationen einer vorgegebenen komplementären Halbgruppe besitzt jedes Element eine Darstellung als Durchschnitt $\cap$-primer Elemente. — Der Verband $V(L)$ umfaßt als Unterverband den Verband aller derjenigen Kongruenzrelationen, die ein vollkanonisches Restklassenholoid liefern. —*

5. Ideale vollkanonische Erweiterungen beliebiger Holoide

Die bisherigen Ergebnisse setzen uns nun instand, ein instruktives Kriterium bezüglich der Frage auszusprechen, wann und nur wann sich ein beliebiges Holoid, speziell der Hauptidealbereich einer kommutativen Halbgruppe, einbetten läßt in ein vollkanonisches Oberholoid.

Zunächst wissen wir auf Grund von Satz 2, daß die Existenz einer vollkanonischen Erweiterung Λ von L die Existenz einer solchen vollkanonischen Erweiterung Λ^* von L bedingt, die von L bezüglich $\cdot$ und $*$ erzeugt wird. Das zieht dann weiter nach sich, daß in diesem Falle ein feinstes komplementäres Oberholoid $K(L)$ zu L existiert, das man auch dadurch gewinnen kann, daß man L eine äquivalente Menge $\bar{L}$ eineindeutig zuordnet mittels $a \leftrightarrow \bar{a} \in \bar{L}$ und dann die Formeln über $\bar{L}$ bezüglich $\cdot$ und $*$ den Forderungsäquivalenzen unterwirft:

$$\begin{aligned}
&\text{B1} \quad (g * g)h \doteq h \\
&\text{B2} \quad gh(gh * g) \doteq gh \\
&\text{B3} \quad g(g * h) \doteq (h * g)h \\
&\text{B4} \quad gh * k \doteq g * (h * k) \\
&\text{B5} \quad \bar{a}\bar{b} \doteq \bar{c}, \quad \text{falls} \quad ab = c \text{ in } L .
\end{aligned}$$

In $K(L)$ existiert dann weiter ein z-Ideal I mit der Eigenschaft $K(L)/I \cong \Lambda^*$. Zu diesem I wiederum existiert weiter ein maximales z-Ideal $I_m \supseteq I$ mit der Eigenschaft $(a * b)(b * a) \in I_m \Rightarrow a = b$, da die Vereinigungsmenge einer aufsteigenden Folge von z-Idealen wieder ein z-Ideal ist und sich die Eigenschaft $(a * b)(b * a) \in I \Rightarrow a = b$ auf die Vereinigungsmenge einer Kette überträgt. Analog können wir zeigen, daß für den Fall der Existenz einer halbnormalen (die Teilerrelation in L nicht verletzenden) vollkanonischen Erweiterung Λ von L in $K(L)$ ein maximales z-Ideal $I_m \supseteq I$ mit $(a * b) \in I_m \Rightarrow b|_L a$ existiert. Das zu I_m gehörende Restklassenholoid von $K(L)$ ist dabei in jedem Falle vollkanonisch, etwa nach (37). Damit können wir dann aber den Hauptsatz dieser Arbeit formulieren.

Satz 7. *Ein beliebiges Holoid L läßt sich genau dann in ein vollkanonisches Oberholoid Λ einbetten, wenn B1 bis B5 in $\bar{L}$ die Elemente $\bar{a}$ und $\bar{b}$ nur dann ineinander überführen, wenn $a = b$ ist und in dem dann notwendig existierenden $K(L)$ ein (maximales) z-Ideal I mit $(a * b)(b * a) \in I \Rightarrow a = b$ existiert, in dem schließlich alle Folgen* $\left[\left(g_{n+1} \prod_{\nu=1}^{n} g_\nu\right) * g\right] * \left[\left(\prod_{\nu=1}^{n} g_\nu\right) * g\right]$ *enden.*

Gibt es unter sonst gleichen Bedingungen sogar ein (maximales) z-Ideal I mit $a * b \in I \Rightarrow b|_L a$, so läßt sich L sogar halbnormal in ein vollkanonisches Oberholoid einbetten und umgekehrt. —

Früher konnte für die untersuchten Erweiterungstypen gezeigt werden, daß es ein gemeinsames homomorphes Bild aller Erweiterungen des betrachteten Typs gab, weshalb wir noch kurz auf die Frage eingehen wollen, ob vielleicht die zitierten maximalen Ideale zusammenfallen. Daß dies nicht gilt, zeigt die folgende einfache Überlegung:

Es sei L ein endliches vollkanonisches Holoid, das von nur einem Vollprimelement erzeugt wird. Setzen wir dann $p = (p')^2$, so erhalten wir ein halbnormales vollkanonisches Oberholoid Λ von L, das auch dann noch halbnormal über L und vollkanonisch bleibt, wenn wir für das letzte nicht idempotente p'^{ν} festsetzen $p'^{\nu+1} = p'^{\nu+2} \ldots$. Auf diese Weise erhalten wir dann neben L ein zweites zu L nicht isomorphes „maximales" vollkanonisches Restklassenholoid von $K(L)$. —

Abschließend sei auf folgenden Umstand noch besonders hingewiesen: Es ist nie ausdrücklich die Rede von Oberholoiden gewesen, die mit L das Einselement gemeinsam haben sollten. In der Tat ist eine solche Forderung oder eine Unterscheidung diesbezüglich unterschiedlicher Erweiterungstypen auch überflüssig. Denn ist Λ ein Oberholoid von L mit dem Einselement ε, so ist L selbstverständlich isomorph zu demjenigen Teilholoid von Λ, das gebildet wird von ε zusammen mit den von e verschiedenen Elementen aus L. Speziell gilt, daß die maximalen L trennenden homomorphen Bilder $\overline{K}(L)$ von $K(L)$ stets $\overline{K}(e) = \overline{K}(g * g)$ erfüllen. Denn $[\overline{K}(e)]$ besteht aus genau allen $\overline{K}(f) \leqq \overline{K}(e)$ und gilt in $\overline{K}(L)$ $e * (a * b) \equiv g * g \equiv e * (b * a)$, so ergibt sich weiter $ea * b \equiv$ $\equiv g * g \equiv eb * a$, also $a * b \equiv g * g \equiv b * a$, was bedeutet, daß a und b in $\overline{K}(L)/[\overline{K}(e)]$ höchstens dann zusammenfallen, wenn a und b schon in $\overline{K}(L)$ zusammenfallen. Somit muß in $\overline{K}(L)$ $\overline{K}(e) = \overline{K}(g * g)$ gelten, da sonst noch ein echter, die Elemente von L trennender Homomorphismus von $\overline{K}(L)$ möglich wäre. —

Literatur

[1] Arnold, I.: Ideale in kommutativen Halbgruppen. Rec. Math. Soc. Math. Moscow **36**, 401—407 (1929).

[2] Bosbach, B.: Charakterisierungen von Halbgruppen mit eindeutigen Halbprimfaktorzerlegungen. Math. Ann. **139**, 184—196 (1960).

[3] — Charakterisierungen von Halbgruppen mit eindeutigen Halbprimfaktorzerlegungen unter Berücksichtigung der Verbände und Ringe. Math. Ann. **141**, 193—209 (1960).

[4] — Arithmetische Halbgruppen. Math. Ann. **144**, 239—252 (1961).

[5] — Eine Zerlegungs- und Idealtheorie für kommutative Halbgruppen. Math. Z. **82**, 37—58 (1963).

[6] — Zur Zerlegungs- und Idealtheorie kommutativer Halbgruppen. Math. Z. **84**, 45—51 (1964).

[7] — Zur konstruktiven Idealtheorie kommutativer Halbgruppen. Math. Z. **88**, 190—206 (1965).

[8] Clifford, A. H.: Arithmetic and idealtheory of commutative semigroups. Ann. Math. **39**, 594—610 (1938).

[9] Dedekind, R.: Gesammelte Werke. Braunschweig: Vieweg und Sohn 1932.

[10] Noether, Emmy: Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern. Math. Ann. **96**, 26—61 (1926).

[11] van der Waerden, B. L.: Zur Produktzerlegung der Ideale in ganz-abgeschlossenen Ringen. Math. Ann. **101**, 293—308 (1929).

[12] — Zur Idealtheorie der ganz-abgeschlossenen Ringe. Math. Ann. **101**, 309—311 (1929).

[13] Ward, M.: Residuation in structures over which a multiplication is defined. Duke Math. J. **3**, 627—636 (1937).

(Eingegangen am 26. November 1964)

SPILKER, J.
Math. Annalen 161, 296—314 (1965)

Kompaktifizierung des Humbertschen Fundamentalbereichs

Von

JÜRGEN SPILKER in Freiburg i. Br.

Die Aufgabe, für die rationale, unimodulare Gruppe n-ten Grades im Raum $\mathfrak{H}(n)$ aller n-reihigen, reellen, symmetrischen, positiv-definiten Matrizen einen brauchbaren Fundamentalbereich zu bestimmen, ist zuerst von H. MINKOWSKI 1905 gelöst worden. Eine Verallgemeinerung dieses Problems auf die unimodulare Gruppe Γ_n n-ten Grades eines festen algebraischen Zahlkörpers $\mathfrak{k}$ von endlichem Grad stammt von P. HUMBERT [«Théorie de la réduction des formes quadratiques définies positives dans un corps algébrique K fini». Comment. Math. Helv. 12, 263—306 (1939/1940)]. Als Darstellungsraum dieser Gruppe reicht nicht mehr die Menge $\mathfrak{H}(n)$ aus, sondern man muß endlich viele Exemplare von $\mathfrak{H}(n)$ und endlich viele Exemplare des Raumes der n-reihigen, komplexen, Hermiteschen, positiv-definiten Matrizen gemäß den Konjugierten von $\mathfrak{k}$ einführen und die Operationen der Gruppe in allen Komponenten simultan durchführen. HUMBERT hat a. a. O. einen Fundamentalbereich konstruiert, der aus der Vereinigung endlich vieler konvexer Kegel besteht, welche von endlich vielen Hyperflächen berandet sind und eine Spitze im Nullpunkt haben. Dieser Fundamentalbereich $\mathfrak{F}_n$ hat nur endlich viele Bildbereiche als Nachbarn.

In der vorliegenden Arbeit werden endlich viele niederdimensionale Mengen zu $\mathfrak{F}_n$ hinzugefügt, die man als Fundamentalbereiche einer mit $\Gamma_s (s < n)$ vergleichbaren Gruppe auffassen kann, und die natürliche Topologie von $\mathfrak{F}_n$ wird in einer solchen Weise fortgesetzt, daß der erweiterte Fundamentalbereich eine kompakte Menge ist. Für den Minkowskischen Spezialfall ist das schon von C. L. SIEGEL ausgeführt worden („Zur Reduktionstheorie quadratischer Formen." Publ. Math. Soc. Japan 5, 1959). Hier wird jedoch anders vorgegangen: Der Darstellungsraum wird zunächst auf ein beschränktes Gebiet abgebildet, und von dessen Rand werden geeignete Stücke zum Fundamentalbereich hinzugefügt. Das hat den Vorteil, daß die hinzukommenden Mengen geometrisch realisiert sind.

Im ersten Kapitel wird der Rand dieses beschränkten Gebietes hinsichtlich seiner inneren Geometrie untersucht (und zwar viel ausführlicher, als es für das weitere nötig ist). Zunächst wird der Rand in „Rangstücke" zerlegt. Sodann wird die invariante Metrik auf den Rand fortgesetzt, und maximale Randteile („Maßstücke"), deren Punkte paarweise endlichen Abstand haben,

werden eingeführt. Im dritten Paragraphen wird das Verhalten der Geodätischen bei unbeschränkt wachsendem Parameter untersucht. Es ergeben sich Resultate, die formal den Ergebnissen von I. I. PJATECKIĬ-ŠAPIRO [„Geometrie klassischer Bereiche und Theorie automorpher Funktionen" (russisch). Moskau, 1961] über die innere Geometrie beschränkter, symmetrischer Gebiete im komplexen Zahlenraum ähneln. Das zweite Kapitel hat den Kompaktifizierungsprozeß zum Inhalt. Dieser ist analog dem von I. SATAKE und H. CARTAN [«Séminaire, Fonctions automorphes». Paris, 1957/1958, Exposé 12] durchgeführten Verfahren, den Quotientenraum der verallgemeinerten oberen Halbebene nach der Siegelschen Modulgruppe zu kompaktifizieren.

Kapitel I. Geometrie des Randes

§ 1. Rangstücke

Sei n eine feste natürliche Zahl und $GL(n, \mathbb{R})$ bzw. $GL(n, \mathbb{C})$ die Gruppe aller n-reihigen, reellen bzw. komplexen, nichtausgearteten Matrizen, ferner m eine beliebige natürliche Zahl und $m = g_1 + g_2$ eine Zerlegung in nichtnegative, ganze Zahlen. Im folgenden wird das direkte Produkt

$$\hat{\Delta}_n := \bigtimes_1^{g_1} GL(n, \mathbb{R}) \bigtimes_1^{g_2} GL(n, \mathbb{C})$$

untersucht. Die μ-te Komponente eines Elementes C aus $\hat{\Delta}_n$ werde mit $C^{(\mu)}$ bezeichnet. Eine wichtige Untergruppe ist $\Omega_n := \times O(n) \times U(n)$, wobei $O(n)$ die orthogonale Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ und $U(n)$ die unitäre Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$ ist. Um einen Darstellungsraum für $\hat{\Delta}_n$ einzuführen, definiert man

$$\mathfrak{L}^{(\mu)}(n) := \begin{cases} \{H^{(\mu)} : n\text{-reihig, reell, symmetrisch}\}, & \mu = 1, 2, \ldots, g_1 \\ \{H^{(\mu)} : n\text{-reihig, komplex, Hermitesch}\}, & \mu = g_1 + 1, \ldots, m \end{cases}$$

und die Untermenge $\mathfrak{H}^{(\mu)}(n)$ der positiv-definiten Matrizen. Dann ist der Teilraum $\mathfrak{H}_n := \bigtimes_{\mu=1}^{m} \mathfrak{H}^{(\mu)}(n)$ von $\mathfrak{L}_n := \bigtimes_{\mu=1}^{m} \mathfrak{L}^{(\mu)}(n)$ ein Darstellungsraum von $\hat{\Delta}_n$, denn vermöge der Zuordnung

$$(C^{(1)}, C^{(2)}, \ldots, C^{(m)}) \to ((H^{(1)}, \ldots, H^{(m)}) \to (H^{(1)}[C^{(1)}], \ldots, H^{(m)}[C^{(m)}]))$$

mit $H[C] := {}^t\overline{C} H C$ ist $\hat{\Delta}_n$ homomorph abgebildet auf eine transitive Gruppe linearer Automorphismen von $\mathfrak{H}_n$. Diese Zuordnung wird ein Isomorphismus für die Faktorgruppe von $\hat{\Delta}_n$ nach dem Normalteiler

$$\Theta_n := \bigtimes_1^{g_1} \{cE : c = \pm 1\} \bigtimes_1^{g_2} \{cE : c \in \mathbb{C}, |c| = 1\}.$$

Man kann also Elemente aus $\hat{\Delta}_n$ mit Abbildungen von $\mathfrak{H}_n$ identifizieren, wenn man modulo Θ_n rechnet.

Die weiteren Untersuchungen dieses Kapitels lassen sich immer simultan in jeder Komponente durchführen. Deswegen wird der obere Index (μ) meist weggelassen.

2. Die Zuordnung

$$\alpha_n : H \to K := (H - E)(H + E)^{-1}$$

wird Cayley-Abbildung genannt. Offenbar ist $\mathfrak{R}_n := \bigtimes_{\mu=1}^{m} \mathfrak{R}^{(\mu)}(n)$ mit

$$\mathfrak{R}^{(\mu)}(n) := \{K^{(\mu)} \in \mathfrak{L}^{(\mu)}(n) : E - K^{(\mu)2} > 0\}$$

eine beschränkte Teilmenge von $\mathfrak{L}_n$, und es gilt bekanntlich

Lemma 1: *Die Abbildung $\alpha_n : \mathfrak{H}_n \to \mathfrak{R}_n$ ist bijektiv und birational. Ihre Umkehrung ist*

$$\alpha_n^{-1} : K \to H = (E + K)(E - K)^{-1}.$$

Jeder Automorphismus $H \to H[C]$, $C \in \hat{\Delta}_n$ von $\mathfrak{H}_n$ wird durch α_n überführt in einen birationalen Automorphismus

$$\gamma_C : K \to Z(C, K)\, N^{-1}(C, K)$$

von $\mathfrak{R}_n$ mit

$$Z(C, K) := ({}^t\overline{C} + C^{-1})K + {}^t\overline{C} - C^{-1},\ N(C, K) := ({}^t\overline{C} - C^{-1})K + {}^t\overline{C} + C^{-1}.$$

Die Gruppe aller γ_C heiße Δ_n. Die Fixpunktuntergruppe des Nullpunktes $K = 0$ besteht aus den γ_C mit $C \in \Omega_n$. Offenbar ist die Zuordnung $C \to \gamma_C$ ein Antiisomorphismus von $\hat{\Delta}_n/\Theta_n$ auf Δ_n, und Δ_n kann mit $\hat{\Delta}_n$ identifiziert werden, sofern man die Vieldeutigkeit modulo Θ_n berücksichtigt.

Jeder Automorphismus $\gamma_C \in \Delta_n$ läßt sich als birationale Abbildung auf die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{R}}_n$ (bezüglich der natürlichen Topologie in $\mathfrak{L}_n$) fortsetzen. Denn für $K \in \overline{\mathfrak{R}}_n$ und einen beliebigen n-reihigen Spaltenvektor z gilt:

$${}^t\overline{N}(C, K)z = 0 \Rightarrow (C + {}^t\overline{C}^{-1})z = -K(C - {}^t\overline{C}^{-1})z$$

$$\Rightarrow 0 = E[(C + {}^t\overline{C}^{-1})z] - K^2[(C - {}^t\overline{C}^{-1})z]$$

$$= 4\,{}^t\overline{z}z + (E - K^2)[(C - {}^t\overline{C}^{-1})z]$$

$$\Rightarrow z = 0\,.$$

Also existiert $N^{-1}(C, K)$ für alle $C \in \hat{\Delta}_n$, $K \in \overline{\mathfrak{R}}_n$; $\gamma_C \gamma_{C^{-1}}$ ist die identische Abbildung von $\overline{\mathfrak{R}}_n$, und folglich ist γ_C birationaler Automorphismus von $\overline{\mathfrak{R}}_n$. Die Gruppe der fortgesetzten Automorphismen heiße wieder Δ_n. Sie ist nicht mehr transitiv. Es stellt sich deshalb die Frage, welches die Transitivitätsbereiche von Δ_n in $\overline{\mathfrak{R}}_n$ sind. Sie werden im folgenden Paragraphen bestimmt, indem der Rand $\partial\mathfrak{R}_n$ von $\mathfrak{R}_n$ genauer untersucht wird. Eine erste grobe Zerlegung des Randes wird im folgenden Abschnitt gegeben. Sie führt allerdings noch nicht zum Ziel.

3. Die Teilmenge

$$\mathfrak{R}_{s_1,\ldots,s_m} := \bigtimes_{\mu=1}^{m} \mathfrak{R}_{s_\mu}^{(\mu)} \text{ mit } \mathfrak{R}_{s_\mu}^{(\mu)} := \{K^{(\mu)} \in \overline{\mathfrak{R}}^{(\mu)}(n) : \mathrm{Rang}(E - K^{(\mu)2}) = s_\mu\},\ 0 \leqq s_\mu \leqq n$$

von $\overline{\mathfrak{R}}_n$ heißt das „Rangstück vom Typ $(s_1, \ldots, s_m) =: (s_\mu)$". Sie besteht aus allen denjenigen $K \in \overline{\mathfrak{R}}_n$, deren Komponenten $K^{(\mu)}$ genau s_μ Eigenwerte haben,

die dem Betrag nach kleiner als eins sind. Rangstücke verschiedenen Typs sind disjunkt, und es gilt

$$\overline{\mathfrak{R}}_n = \bigcup_{s_1,\ldots,s_m}^{0,\ldots,n} \mathfrak{R}_{s_1,\ldots,s_m},\ \mathfrak{R}_n = \mathfrak{R}_{n,\ldots,n},\ \partial\mathfrak{R}_n = \bigcup_{(s_1,\ldots,s_m)\neq(n,\ldots,n)} \mathfrak{R}_{s_1,\ldots,s_m}.$$

Die Funktion

$$r(K^{(\mu)}, L^{(\mu)}) := \operatorname{Rang}(E - K^{(\mu)} L^{(\mu)}) : \overline{\mathfrak{R}}_n^{(\mu)} \times \overline{\mathfrak{R}}_n^{(\mu)} \to \{0, 1, \ldots, n\}$$

ist symmetrisch in den Argumenten $K^{(\mu)}$ und $L^{(\mu)}$. Für $\gamma_C \in \Delta_n$ und $K, L \in \overline{\mathfrak{R}}_n$ gilt

$$E - \gamma_C K\ \gamma_C L = 4\ {}^t\overline{N}^{-1}(C, K)\ (E - KL)\ N^{-1}(C, L)\,, \tag{1}$$

so daß $r(K^{(\mu)}, L^{(\mu)})$ invariant bezüglich Δ_n ist. Trivialerweise gilt das

Kriterium 2: *Zwei Matrizen $K, L \in \overline{\mathfrak{R}}_n$ sind dann und nur dann aus demselben Rangstück, wenn $r(K^{(\mu)}, K^{(\mu)}) = r(L^{(\mu)}, L^{(\mu)})$ für $\mu = 1, \ldots, m$ ist.*

Hieraus folgt unmittelbar, daß jedes Rangstück bei Abbildungen aus Δ_n fest bleibt und Punkte verschiedener Rangstücke inäquivalent modulo Δ_n sind. Andererseits zeigt sich aber, daß die Rangstücke noch keine Transitivitätsbereiche von Δ_n in $\overline{\mathfrak{R}}_n$ sind. Eine feinere Zerlegung von $\overline{\mathfrak{R}}_n$, die das Gewünschte leisten wird, bekommt man erst durch „Fortsetzung" des Δ-invarianten, Riemannschen Maßes von $\mathfrak{R}_n$ auf $\overline{\mathfrak{R}}_n$. Das wird im folgenden Paragraphen ausgeführt.

§ 2. Maßstücke

1. Eine gegenüber den Automorphismen aus $\hat{\Delta}_n$ invariante Riemannsche Metrik in $\mathfrak{H}_n$ wird gegeben durch das Linienelement

$$ds^2 = \frac{1}{4} \sum_{\mu=1}^{m} \operatorname{Spur}(H^{(\mu)-1}\, dH^{(\mu)})^2\,.$$

Als Abstand $d(H, I)$ zweier Punkte H und I aus $\mathfrak{H}_n$ ergibt sich

$$d^2(H, I) = \frac{1}{4} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \log^2 r_\nu^{(\mu)}\,,$$

wobei $r_1^{(\mu)}, \ldots, r_n^{(\mu)}$ die (notwendig positiven) Eigenwerte von $H^{(\mu)-1} I^{(\mu)}$ sind. Die vermöge der Cayley-Abbildung übertragene Δ_n-invariante Metrik in $\mathfrak{R}_n$ hat das Linienelement

$$ds^2 = \sum_{\mu=1}^{m} \operatorname{Spur}((E - K^{(\mu)2})^{-1}\, dK^{(\mu)})^2\,,$$

und das Abstandsquadrat zweier Punkte K und L aus $\mathfrak{R}_n$ ist

$$d^2(K, L) = \frac{1}{4} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \log^2 s_\nu^{(\mu)}\,.$$

Hierbei sind $s_1^{(\mu)}, \ldots, s_n^{(\mu)}$ die (stets positiven) Eigenwerte von

$$S(K^{(\mu)}, L^{(\mu)}) := (E - K^{(\mu)})\ (E + K^{(\mu)})^{-1}\ (E + L^{(\mu)})\ (E - L^{(\mu)})^{-1}\,.$$

Eine zweite (hier handlichere) Formel für den Abstand ist

$$d^2(K, L) = \frac{1}{4} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \log^2 \frac{1 + \sqrt{1 - t_\nu^{(\mu)}}}{1 - \sqrt{1 - t_\nu^{(\mu)}}} \tag{2}$$

mit den (zwischen 0 und 1 gelegenen) Eigenwerten $t_1^{(\mu)}, \ldots, t_n^{(\mu)}$ von

$$T(K^{(\mu)}, L^{(\mu)}) := (E - K^{(\mu)\,2})\,(E - L^{(\mu)}K^{(\mu)})^{-1}\,(E - L^{(\mu)\,2})\,(E - K^{(\mu)}L^{(\mu)})^{-1}.$$

Der Äquivalenzbeweis der beiden Formeln ergibt sich aus der Transitivität von Δ_n in $\mathfrak{K}_n$ und der Invarianz der Eigenwerte von S und T bei simultaner Abbildung von K und L mit einem Element aus Δ_n, indem man $K = 0$ und L gleich einer Diagonalmatrix setzt.

Die Metrik d ist äquivalent mit der euklidischen Metrik von $\mathfrak{K}_n$. Denn ist $\mathfrak{M}$ eine relativ-kompakte Teilmenge von $\mathfrak{K}_n$, so gibt es eine Zahl c mit

$$E \leqq (E - K^{(\mu)\,2})^{-1} \leqq cE \quad \text{für alle} \quad K \in \mathfrak{M}\,.$$

Mit bekannten Schlüssen folgt hieraus

$$e(K, L) \leqq d(K, L) \leqq c'e(K, L) \quad \text{für alle} \quad K, L \in \mathfrak{M}\,,$$

wobei $e(K, L)$ der euklidische Abstand und $c' \geqq 1$ ist. Speziell ist die von der invarianten Metrik erzeugte Topologie äquivalent mit der natürlichen Topologie in $\mathfrak{K}_n$.

2. Obwohl die invariante Metrik vollständig in $\mathfrak{K}_n$ ist, kann man versuchen, sie auf $\overline{\mathfrak{K}}_n$ fortzusetzen. Das führt zu der Funktion

$$\tilde{d}(K_0, L_0) := \inf \limsup_{\nu \to \infty} d(K_\nu, L_\nu) : \overline{\mathfrak{K}}_n \times \overline{\mathfrak{K}}_n \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}\,, \tag{3}$$

wobei das Infimum über alle Paare von Folgen K_ν bzw. L_ν aus $\mathfrak{K}_n$ zu erstrecken ist, die im Sinne der natürlichen Topologie von $\mathfrak{L}_n$ gegen K_0 bzw. L_0 konvergieren. Eine äquivalente Definition (die hier aber nicht benutzt wird) ist

$$\tilde{d}(K_0, L_0) := \sup_{\mathfrak{U}, \mathfrak{V}} \inf_{\substack{K \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{K}_n \\ L \in \mathfrak{V} \cap \mathfrak{K}_n}} d(K, L)\,;$$

dabei sind $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{V}$ Umgebungen von K_0 bzw. L_0 in der natürlichen Topologie von $\mathfrak{L}_n$.

a) Für $K_0, L_0 \in \mathfrak{K}_n$ gilt $\tilde{d}(K_0, L_0) = d(K_0, L_0)$. Denn aus der Stetigkeit von d in $\mathfrak{K}_n \times \mathfrak{K}_n$ folgt

$$d(K_0, L_0) = \limsup_{\nu \to \infty} d(K_\nu, L_\nu)$$

für beliebige Folgen $K_\nu \to K_0$, $L_\nu \to L_0$ aus $\mathfrak{K}_n$, und (3) ergibt die Behauptung. Somit ist $\tilde{d}$ eine Fortsetzung von d auf $\overline{\mathfrak{K}}_n \times \overline{\mathfrak{K}}_n$, und man kann wieder d statt $\tilde{d}$ schreiben.

b) Für $K_0 \in \mathfrak{K}_n$, $L_0 \in \partial\mathfrak{K}_n$ gilt $d(K_0, L_0) = \infty$. Denn wäre $d(K_0, L_0)$ endlich, so gäbe es nach Definition von d gegen K_0 bzw. L_0 konvergente Folgen K_ν bzw. L_ν aus $\mathfrak{K}_n$ mit $d(K_\nu, L_\nu) \leqq d(K_0, L_0) + 1$; die Dreiecksungleichung ergäbe für alle natürlichen ν

$$d(0, L_\nu) \leqq d(0, K_\nu) + d(K_0, L_0) + 1\,,$$

und $d(0, L_\nu)$ wäre beschränkt. Das ist aber ein Widerspruch, da die Folge L_ν gegen einen Randpunkt konvergiert und folglich ein μ existiert, so daß der kleinste Eigenwert von $T(0^{(\mu)}, L_\nu^{(\mu)}) = E - L_\nu^{(\mu)2}$ gegen 0 strebt.

c) Auf dem Rand werden jetzt „Maßstücke" eingeführt. Für beliebiges $L_0 \in \partial\mathfrak{R}_n$ sei

$$\mathfrak{K}(L_0) := \{K \in \overline{\mathfrak{R}}_n : d(K, L_0) < \infty\}.$$

Nach b) ist das eine Teilmenge von $\partial\mathfrak{R}_n$, die offenbar L_0 enthält. Sie soll genauer bestimmt werden. Es gibt ein $U \in \Omega_n$ mit

$$L_0[U] = \begin{pmatrix} -E_r & 0 & 0 \\ 0 & B_s & 0 \\ 0 & 0 & E_t \end{pmatrix};$$

dabei bezeichnet E_r die r-reihige Einheitsmatrix, und es gilt $B_{s\mu}^{(\mu)} \in \mathfrak{R}^{(\mu)}(s_\mu)$. Wegen $\mathfrak{K}(\gamma L_0) = \gamma(\mathfrak{K}(L_0))$ für alle $\gamma \in \Delta_n$ kann man annehmen, daß L_0 selbst diese Gestalt hat. Zu

$$K_0 =: \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ {}^t\overline{K}_{12} & K_{22} & K_{23} \\ {}^t\overline{K}_{13} & {}^t\overline{K}_{23} & K_{33} \end{pmatrix} \in \mathfrak{K}(L_0)$$

gibt es ein $c > 0$ und gegen K_0 bzw. L_0 konvergente Folgen K bzw. L aus $\mathfrak{R}_n$ mit $d(K, L) \leqq c$. Nach (2) existiert ein $c^* > 0$ mit $t_\nu^{(\mu)} \geqq c^*$ für alle μ, ν, K und L. Man setze

$$E - K^2 =: C[U], \quad E - L^2 =: D[V]$$

mit Diagonalmatrizen C und D und mit $U, V \in \Omega_n$ und kann annehmen, daß die ersten r und die letzten t Diagonalelemente von D gegen 0 und die restlichen gegen positive Zahlen konvergieren und (nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge) daß die V gegen ein $V_0 \in \Omega_n$ streben. Dann hat V_0 die Form $\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$. Ferner sind beim Grenzübergang die Eigenwerte der Matrizen $E[D^{1/2}\, V(E - KL)^{-1}\, {}^t\overline{U}\, C^{1/2}]$ gegen 0 beschränkt, und damit sind auch die Matrizen $C^{-1/2}\, U(E - KL)\, {}^t\overline{V} D^{-1/2}$ beschränkt. Einerseits ist dann $(E-KL){}^t\overline{V} D^{-1/2}$ beschränkt, $(E-KL)\, {}^t\overline{V} D^{-1/2} \cdot D^{1/2} V$ strebt gegen eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}$ und gegen

$$E - K_0 L_0 = \begin{pmatrix} E + K_{11} & -K_{12}B & -K_{13} \\ {}^t\overline{K}_{12} & E - K_{22}B & -K_{23} \\ {}^t\overline{K}_{13} & -{}^t\overline{K}_{23}B & E - K_{33} \end{pmatrix},$$

so daß sich $K_{11} = -E_r$, $K_{12} = 0$, $K_{13} = 0$, $K_{23} = 0$, $K_{33} = E_t$ ergibt. Das innere Kästchen $E - K_{22}B$ ist nichtausgeartet wegen (1) und der Transitivität von Δ_n in $\mathfrak{R}_n$. Andererseits ist $C^{-1/2}\, U(E - KL)$ beschränkt, und da K_0 ebenso wie L_0 zerfällt, kann man annehmen, daß die ersten r und die letzten t Diagonalelemente von C gegen 0, die restlichen gegen nichtnegative Zahlen und die U gegen ein $U_0 \in \Omega_n$ konvergieren. Der Vergleich der zweiten Kästchenspalte in der Gleichung $U(E - KL) = C^{1/2} \cdot C^{-1/2}\, U(E - KL)$ ergibt wegen

$\det(E - K_{22}B) \neq 0$ beim Grenzübergang $\det(E - K_{22}^2) \neq 0$ und mit $E - K_{22}^2 \geqq 0$ folgt $E - K_{22}^2 > 0$. Also hat K_0 die Form

$$K_0 = \begin{pmatrix} -E_r & 0 & 0 \\ 0 & A_s & 0 \\ 0 & 0 & E_t \end{pmatrix}, \quad A_{s_\mu}^{(\mu)} \in \mathfrak{K}^{(\mu)}(s_\mu).$$

Hat umgekehrt K_0 diese Gestalt und sind

$$K^{(\mu)} := \begin{pmatrix} -I_{r_\mu} & 0 & 0 \\ 0 & A_{s_\mu}^{(\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & J_{t_\mu} \end{pmatrix}, \quad L^{(\mu)} := \begin{pmatrix} -I_{r_\mu} & 0 & 0 \\ 0 & B_{s_\mu}^{(\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & J_{t_\mu} \end{pmatrix}.$$

Folgen aus $\mathfrak{K}_n$ mit $I_{r_\mu} \to E_{r_\mu}$, $J_{t_\mu} \to E_{t_\mu}$, so gilt

$$T(K^{(\mu)}, L^{(\mu)}) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & T(A^{(\mu)}, B^{(\mu)}) & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

und wegen $d(K_0, L_0) \leqq \limsup d(K, L)$ folgt

$$d^2(K_0, L_0) \leqq \sum_{\mu=1}^{m} d^2(A_{s_\mu}^{(\mu)}, B_{s_\mu}^{(\mu)}) < \infty. \tag{4}$$

Es gilt demnach

$$\mathfrak{K}(L_0) = \left\{ \begin{pmatrix} -E_r & 0 & 0 \\ 0 & A_s & 0 \\ 0 & 0 & E_t \end{pmatrix} : A_{s_\mu}^{(\mu)} \in \mathfrak{K}^{(\mu)}(s_\mu) \right\}$$

und

$$\mathfrak{K}(L_1) = \mathfrak{K}(L_0) \quad \text{für} \quad L_1 \in \mathfrak{K}(L_0),$$

und die Relation „für K und L gilt $d(K, L) < \infty$" ist eine Äquivalenzrelation. Die Menge $\mathfrak{K}(L_0)$ heißt „das typische Maßstück vom Typ (r_μ, s_μ, t_μ)", und sie wird mit $\mathfrak{M}(r_\mu, s_\mu, t_\mu)$ bezeichnet. $\mathfrak{K}_n$ selbst ist das typische Maßstück vom Typ $(0, n, 0)$. Bilder von $\mathfrak{M}(r_\mu, s_\mu, t_\mu)$ unter Ω_n heißen „Maßstücke vom Typ (r_μ, s_μ, t_μ)". Damit ist jedes Rangstück in Maßstücke unterteilt. Die Vereinigung aller Maßstücke gleichen Typs (r_μ, s_μ, t_μ) besteht aus all denjenigen $K \in \overline{\mathfrak{K}}_n$, deren Komponenten $K^{(\mu)}$ genau r_μ Eigenwerte -1 und t_μ Eigenwerte 1 haben.

Satz 3: *Maßstücke sind maximale Teile von $\overline{\mathfrak{K}}_n$, so daß je zwei Punkte daraus endlichen Abstand haben. Jeder Punkt von $\overline{\mathfrak{K}}_n$ liegt in genau einem Maßstück. Jedes Maßstück ist Ω_n-äquivalent einem typischen Maßstück. Zwei Maßstücke $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ verschiedenen Typs erfüllen $\gamma\mathfrak{M} \cap \gamma'\mathfrak{M}' = \emptyset$ für $\gamma, \gamma' \in \Delta_n$. Jedes Maßstück vom Typ (r_μ, s_μ, t_μ) ist linear äquivalent zu $\bigtimes_{\mu=1}^{m} \mathfrak{K}^{(\mu)}(s_\mu)$, wobei $\mathfrak{K}^{(\mu)}(0)$ einen einpunktigen Raum bezeichnet.*

Zum *Beweis* reicht es, aus $\gamma_C \mathfrak{M}(r_\mu, s_\mu, t_\mu) = \mathfrak{M}'(r'_\mu, s'_\mu, t'_\mu)$ für $\gamma_C \in \Delta_n$ zu schließen, daß $r_\mu = r'_\mu$, $s_\mu = s'_\mu$, $t_\mu = t'_\mu$ ist. Für ein festes μ sei $r_\mu \leqq r'_\mu$. Es gibt ein $K \in \mathfrak{M}$, so daß

$$\gamma_C : K^{(\mu)} =: \begin{pmatrix} -E_{r_\mu} & 0 & 0 \\ 0 & A_{s_\mu}^{(\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & E_{t_\mu} \end{pmatrix} \to L^{(\mu)} = \begin{pmatrix} -E_{r_\mu} & 0 & 0 \\ 0 & B_{s_\mu}^{(\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{t_\mu}^{(\mu)} \end{pmatrix} \tag{5}$$

mit einer Diagonalmatrix $L^{(\mu)}$ gilt. Aus (1) folgt

$$s_\mu = r(K^{(\mu)}, K^{(\mu)}) = r(L^{(\mu)}, L^{(\mu)}) = s'_\mu .$$

Zerlegt man ${}^t\overline{C}^{(\mu)} + C^{(\mu)-1} =: F^{(\mu)}$ und ${}^t\overline{C}^{(\mu)} - C^{(\mu)-1} =: G^{(\mu)}$ entsprechend wie $K^{(\mu)}$ und $L^{(\mu)}$ in Kästchen F_{kl}, G_{kl}, so besagt (5)

$$\begin{pmatrix} -F_{11}+G_{11} & F_{12}A+G_{12} & F_{13}+G_{13} \\ -F_{21}+G_{21} & F_{22}A+G_{22} & F_{23}+G_{23} \\ -F_{31}+G_{31} & F_{32}A+G_{32} & F_{33}+G_{33} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -F_{11}+G_{11} & -F_{12}-G_{12}A & -F_{13}-G_{13} \\ B(F_{21}-G_{21}) & B(F_{22}+G_{22}A) & B(F_{23}+G_{23}) \\ D(F_{31}-G_{31}) & D(F_{32}+G_{32}A) & D(F_{33}+G_{33}) \end{pmatrix} .$$

Es ergibt sich

$$(F_{12}+G_{12})(E+A) = 0, F_{13}+G_{13} = 0,$$
$$(E-B)(F_{23}+G_{23}) = 0, (E-D)(F_{33}+G_{33}) = 0 ,$$

und wegen $E+A > 0$, $E-B > 0$ folgt weiter

$$C^{(\mu)} = \frac{1}{2}\,{}^t\overline{(F^{(\mu)}+G^{(\mu)})} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

$\det(F_{33}+G_{33}) \neq 0$, $D = E$, $t_\mu \leqq t'_\mu$ und hieraus die Behauptung.

3. Nun kann auch die Frage nach den Transitivitätsbereichen beantwortet werden.

Lemma 4: *Die Transitivitätsbereiche von Δ_n in $\overline{\mathfrak{R}}_n$ sind genau die Vereinigungsmengen von allen Maßstücken gleichen Typs. Es gibt genau $\left(\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right)^m$ Transitivitätsbereiche.*

Beweis: Zu jedem $A^{(\mu)} \in \mathfrak{R}^{(\mu)}(s_\mu)$ gibt es ein $\gamma_C \in \Delta_n$ mit

$$\gamma_C \begin{pmatrix} -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

nämlich γ_C mit

$$C := \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \; {}^t\overline{D}D := (E+A)(E-A)^{-1} .$$

Δ_n wirkt also transitiv auf jedem Maßstück. Mit Satz 3 folgt hieraus die Behauptung.

Für Maßstücke gilt ein ähnliches Kriterium wie für Rangstücke, nämlich

Kriterium 5: *Zwei Matrizen $K, L \in \overline{\mathfrak{R}}_n$ sind genau dann aus demselben Maßstück, wenn*

$$r(K^{(\mu)}, K^{(\mu)}) = r(K^{(\mu)}, L^{(\mu)}) = r(L^{(\mu)}, L^{(\mu)})$$

für $\mu = 1, 2, \ldots, m$ ist.

Beweis: Wegen Lemma 4 genügt es, die Notwendigkeit des Kriteriums für

$$K = \begin{pmatrix} -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -E & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad E - B^2 > 0$$

zu zeigen. Nun ist

$$E-K^2=E-KL=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&E&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad E-L^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&E-B^2&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

woraus die Gleichheit der Ränge folgt. Zum Nachweis der Umkehrung kann man

$$K=\begin{pmatrix}-E&0&0\\0&0&0\\0&0&E\end{pmatrix},\quad L=:\begin{pmatrix}L_{11}&L_{12}&L_{13}\\{}^t\bar{L}_{12}&L_{22}&L_{23}\\{}^t\bar{L}_{13}&{}^t\bar{L}_{23}&L_{33}\end{pmatrix}$$

mit K aus $\mathfrak{M}(r_\mu, s_\mu, t_\mu)$ annehmen. Es folgt

$$E-K^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&E&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad E-KL=\begin{pmatrix}E+L_{11}&L_{12}&L_{13}\\0&E&0\\-{}^t\bar{L}_{13}&-{}^t\bar{L}_{23}&E-L_{33}\end{pmatrix}$$

und wegen der Ranggleichheit $L_{11}=-E$, $L_{33}=E$, $L_{13}=0$. Ferner ist im Fall $s_\mu>0$

$$E-L^2=\begin{pmatrix}-L_{12}{}^t\bar{L}_{12}&L_{12}-L_{12}L_{22}&-L_{12}L_{23}\\{}^t\bar{L}_{12}-L_{22}{}^t\bar{L}_{12}&E-{}^t\bar{L}_{12}L_{12}-L_{22}^2-L_{23}{}^t\bar{L}_{23}&-L_{22}L_{23}-L_{23}\\-{}^t\bar{L}_{23}{}^t\bar{L}_{12}&-{}^t\bar{L}_{23}L_{22}-{}^t\bar{L}_{23}&-{}^t\bar{L}_{23}L_{23}\end{pmatrix}\geqq 0$$

und folglich $L_{12}=0$, $L_{23}=0$, $E-L_{22}^2\geqq 0$. Die Gleichheit der Ränge ergibt $E-L_{22}^2>0$. Also gilt $L\in\mathfrak{M}(r_\mu, s_\mu, t_\mu)$, was zu zeigen war.

4. Es soll nun untersucht werden, welche Fixgruppen die Maßstücke besitzen. Sei $\mathfrak{M}$ das β-Bild ($\beta\in\Omega_n$) des typischen Maßstückes $\mathfrak{M}(r_\mu, s_\mu, t_\mu)$.

Satz 6: a) *Mit $\Delta_n^1(\mathfrak{M})$ werde die Gruppe der Abbildungen aus Δ_n bezeichnet, die $\mathfrak{M}$ festlassen, und mit ι der Antiisomorphismus, der jedem $\gamma\in\Delta_n^1(\mathfrak{M})$ diejenige Matrix C zuordnet, die den Automorphismus $(\beta\alpha)^{-1}\gamma(\beta\alpha)$ von $\mathfrak{H}_n$ erzeugt. Dann ist $\Delta_n^1(\mathfrak{M})$ bezüglich ι antiisomorph zu der Gruppe $\hat{\Delta}_n^1(r_\mu, s_\mu, t_\mu)$ der*

$$C=\begin{pmatrix}C_1&*&*\\0&C_2&*\\0&0&C_3\end{pmatrix}\in\hat{\Delta}_n \tag{6}$$

($C_1^{(\mu)}$ r_μ-reihig, $C_2^{(\mu)}$ s_μ-reihig, $C_3^{(\mu)}$ t_μ-reihig).

b) *Die Gruppe $\Delta_n^2(\mathfrak{M})$ derjenigen Abbildungen aus Δ_n, die $\mathfrak{M}$ punktweise festlassen, ist bezüglich ι antiisomorph zu der Gruppe $\hat{\Delta}_n^2(r_\mu, s_\mu, t_\mu)$ der $C\in\hat{\Delta}_n^1(r_\mu, s_\mu, t_\mu)$ mit $C_2^{(\mu)}=\pm E$ für $\mu=1,2,\ldots,g_1$ und $C_2^{(\mu)}=c_\mu E$, $c_\mu\in\mathbb{C}$, $|c_\mu|=1$ für $\mu=g_1+1, g_1+2,\ldots,m$. $\Delta_n^2(\mathfrak{M})$ ist Normalteiler in $\Delta_n^1(\mathfrak{M})$.*

Beweis: a) Man kann annehmen, daß $\mathfrak{M}$ das typische Maßstück vom Typ (r_μ, s_μ, t_μ) ist. Nach dem Beweis von Satz 3 gilt (6) für jedes $\gamma_C\in\Delta_n^1(\mathfrak{M}(r_\mu, s_\mu, t_\mu))$. Hat umgekehrt C diese Form, so folgt

$$\gamma_C:\begin{pmatrix}-E&0&0\\0&A&0\\0&0&E\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-E&0&0\\0&\gamma_{C_2}A&0\\0&0&E\end{pmatrix}$$

und $\gamma_C\in\Delta_n^1(\mathfrak{M}(r_\mu, s_\mu, t_\mu))$.

b) Nebenbei hat sich ergeben, daß γ_G in der μ-ten Komponente auf die μ-te Komponente von $\mathfrak{M}(r_\mu, s_\mu, t_\mu)$ wirkt wie die μ-te Komponente von γ_{G_μ} auf $\mathfrak{R}^{(\mu)}(s_\mu)$. Die in Satz 3 beschriebene Projektion π von $\mathfrak{M}$ auf $\times\, \mathfrak{R}^{(\mu)}(s_\mu)$ ist also mit den Automorphismen von $\Delta_n^1(\mathfrak{M})$ verträglich. Hieraus folgt unmittelbar der zweite Teil der Behauptung. Die Normalteilereigenschaft ist trivial.

5. Die Wirkungsweise von $\tilde{d} = d$ auf den Maßstücken läßt sich ebenfalls übersehen. Es gilt nämlich der

Satz 7: *Die durch* (3) *erklärte Funktion d ist auf jedem Maßstück* $\mathfrak{M}$ *eine* $\Delta_n^1(\mathfrak{M})$*-invariante, Riemannsche Metrik. Der Abstand zweier Punkte desselben Maßstückes ist gleich dem Abstand der mittels* π *nach* $\times\, \mathfrak{R}^{(\mu)}(s_\mu)$ *projizierten Punkte.*

Beweis: Seien K_0 und L_0 aus demselben Maßstück vom Typ (r_μ, s_μ, t_μ), ohne Einschränkung

$$K_0 = \begin{pmatrix} -E & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad L_0 = \begin{pmatrix} -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

mit einer reellen Diagonalmatrix $B =: (b_\sigma)$. Dann ist $|b_\sigma| < 1$. Zu beliebigen gegen K_0 und L_0 konvergenten Folgen K und L aus $\mathfrak{R}_n$ mit $d(K, L) \to d(K_0, L_0)$ gibt es Zerlegungen $K = C[U]$, $L = D[V]$ mit Diagonalmatrizen C bzw. D, die gegen K_0 bzw. L_0 konvergieren, und $U, V \in \Omega_n$, die (nach Übergang zu einer Teilfolge) gegen ein $U_0 \in \Omega_n$ bzw. ein $V_0 \in \Omega_n$ konvergieren. Dann hat $T(K, L)$ dieselben Eigenwerte wie ${}^t\overline{F}F$, wobei

$$F := (E - D^2)^{1/2}\,(W - C\,W\,D)^{-1}\,(E - C^2)^{1/2},\ W := U\,{}^t\overline{V}$$

ist. Wegen $d(K_0, L_0) < \infty$ sind die Eigenwerte von ${}^t\overline{F}F$ gegen 0 beschränkt, und damit sind die Matrizen F^{-1} beschränkt. Nutzt man $K_0U_0 = U_0K_0$, $L_0V_0 = V_0L_0$ aus, so folgen für $U_0\,{}^t\overline{V}_0 =: (W_{kl})$ $1 \leqq k, l \leqq 3$ die Beziehungen $W_{kl} = 0$, wenn $k \neq l$ ist, und $W_{kk}\,{}^t\overline{W}_{kk} = E$. Zerlegt man ebenso die Häufungselemente F^* der Matrizen F^{-1} in 9 Kästchen, so hat das innere die Form $(E - B^2)^{-1/2} W_{22}$, und das innere Kästchen von $F^*\,{}^t\overline{F}^*$ ist $\geqq (E - B^2)^{-1}$. Ist H eine n-reihige Hermitesche Matrix mit Eigenwerten $h_1 \geqq h_2 \geqq \cdots \geqq h_n$ und G eine s-reihige Hauptuntermatrix mit Eigenwerten $g_1 \geqq g_2 \geqq \cdots \geqq g_s$, so besagen bekannte Ungleichungen von CAUCHY

$$h_{n+\sigma-s} \leqq g_\sigma \leqq h_\sigma \qquad \sigma = 1, 2, \ldots, s\,.$$

Anwendung der rechten Ungleichung ergibt, daß $F^*\,{}^t\overline{F}^*$ s Eigenwerte h_σ mit $h_\sigma \geqq (1 - b_\sigma^2)^{-1}$, $\sigma = 1, 2, \ldots, s$ besitzt. Nach (2) ergibt das

$$\limsup d^2(K, L) \geqq \sum_{\mu=1}^{m} d^2(0_{s_\mu}^{(\mu)}, B_{s_\mu}^{(\mu)})\,.$$

Das impliziert

$$d^2(K_0, L_0) \geqq \sum_{\mu=1}^{m} d^2(0_{s_\mu}^{(\mu)}, B_{s_\mu}^{(\mu)})\,.$$

Wegen (4) gilt das Gleichheitszeichen, und daraus folgen alle Behauptungen des Satzes.

Definiert man wie üblich

$$a + \infty = \infty + a = \infty + \infty = \infty,\ a < \infty$$

für jedes reelle a, so genügt d nach dem letzten Satz den Axiomen einer Metrik, d. h. d ist eine Metrik in $\overline{\mathfrak{R}}_n \times \overline{\mathfrak{R}}_n$, deren Wertebereich um den Wert ∞ vergrößert ist.

§ 3. Geodätische Linien

1. Bekanntlich gibt es zu je zwei Punkten von $\mathfrak{R}_n$ genau eine geodätische Linie bezüglich der invarianten Metrik, die die zwei Punkte verbindet. Diese Geodätische ist kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte. Jede nichtausgeartete Geodätische ist Δ_n-Bild einer Geodätischen $K(l) = (K^{(1)}(l), \ldots, K^{(m)}(l))$ mit

$$K^{(\mu)}(l) := (\delta_{\varkappa\lambda} \operatorname{Tg}(k_\varkappa^{(\mu)} l)),\ \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\varkappa=1}^{n} k_\varkappa^{(\mu)2} = 1\,; \tag{7}$$

dabei ist Tg der hyperbolische Tangens, l die von 0 nach $K(l)$ gemessene Bogenlänge und

$$k_1^{(\mu)} < 0, \ldots, k_{r_\mu}^{(\mu)} < 0,\ k_{r_\mu+1}^{(\mu)} = \cdots = k_{r_\mu+s_\mu}^{(\mu)} = 0,\ k_{r_\mu+s_\mu+1}^{(\mu)} > 0, \ldots, k_n^{(\mu)} > 0 \tag{8}$$

mit geeigneten r_μ und s_μ.

Es wird nun untersucht, wie sich die Geodätischen bei unbeschränkt wachsendem Parameter l verhalten. Unter Annahme von (7) und (8) gilt

$$\lim_{l\to\infty} K(l) = \begin{pmatrix} -E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_t \end{pmatrix} =: K^* \in \partial\mathfrak{R}_n \quad (t := n - r - s)\,.$$

Wenn $\lim K(l)$ für eine beliebige Geodätische $K(l)$ existiert, sagt man: $K(l)$ endet in $\lim K(l)$, $K(0)$ und $\lim K(l)$ lassen sich uneigentlich verbinden, und $\lim K(l)$ ist geodätisch erreichbar. Es ist klar, daß jede Geodätische in einem Punkt von $\overline{\mathfrak{R}}_n$ endet und jeder Punkt aus $\overline{\mathfrak{R}}_n$ von einem geeigneten inneren Punkt her geodätisch erreichbar ist. Die Existenz und Eindeutigkeit der Geodätischen durch einen inneren Punkt und einen Randpunkt von $\mathfrak{R}_n$ geht im allgemeinen jedoch verloren. Man kann z. B. 0 und K^* mit jeder Geodätischen (7) uneigentlich verbinden, deren Konstante (8) erfüllen. Daß man wiederum andere Punktepaare nicht verbinden kann, folgt aus dem

Lemma 8: *Zu jedem $K \in \mathfrak{R}_n$ gibt es in jedem Maßstück genau ein L, das mit K uneigentlich verbindbar ist.*

Die Richtigkeit dieses Lemmas ergibt sich im Beweis zu dem

Kriterium 9: *Zwei Punkte $K \in \mathfrak{R}_n$ und $L \in \overline{\mathfrak{R}}_n$ lassen sich dann und nur dann uneigentlich verbinden, wenn alle Eigenwerte der Matrizen $T(K^{(\mu)}, L^{(\mu)})$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$ gleich 0 oder 1 sind.*

Beweis: Weil Aussage und Kriterium Δ_n-invariant sind, ist ohne Einschränkung

$$K = 0,\ L = \begin{pmatrix} -E & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(r_\mu, s_\mu, t_\mu)\,.$$

Da

$$T(K, L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E - A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist und $E - A^2 > 0$ nicht 0 als Eigenwert hat, ist $A = 0$. Das Kriterium ist also hinreichend. Sei umgekehrt $K = 0$, $K(l)$ eine nichtausgeartete Geodätische (7), die (8) erfüllt und in L endet. Dann gilt

$$T(K, L) = T\left(0, \lim_{l \to \infty} K(l)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und diese Matrix hat nur 0 und 1 als Eigenwerte.

2. Vermöge Lemma 8 kann man eine Zerlegung von $\mathfrak{R}_n$ angeben. Für festes $L \in \overline{\mathfrak{R}}_n$ sei

$$\mathfrak{F}(L) := \{K \in \mathfrak{R}_n : K \text{ ist mit } L \text{ uneigentlich verbindbar}\}.$$

Dann bilden die „geodätischen Flächen" $\mathfrak{F}(L)$, wobei L über alle Elemente eines festen Maßstückes läuft, eine Faserung von $\mathfrak{R}_n$. Zur Bestimmung von $\mathfrak{F}(L)$ genügt es, $L = K^* \in \mathfrak{M}(r_\mu, s_\mu, t_\mu)$ zu setzen. Für jedes $K \in \mathfrak{R}_n$ existiert ein $\gamma_C \in \Delta_n^2(\mathfrak{M}(r_\mu, s_\mu, t_\mu))$ mit

$$\gamma_C^{-1} K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{(\mu)} \in \mathfrak{R}^{(\mu)}(s_\mu),$$

nämlich

$$C := \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ 0 & E & D_{22}^{-1} D_{23} \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha_n^{-1} K =: {}^t\overline{D}\, D$ und $D =: (D_{\varkappa\lambda})$ eine Dreiecksmatrix mit Nullen unterhalb der Hauptdiagonale ist. Dann hat $T(K, L)$ dieselben Eigenwerte wie

$$T(\gamma_C^{-1} K, K^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E - A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und $K \in \mathfrak{F}(L)$ nebst Kriterium 9 impliziert $A = 0$, $K = \gamma_C 0$. Umgekehrt ist jeder Punkt $\gamma_C 0$ für $\gamma_C \in \Delta_n^2$ mit K^* uneigentlich verbindbar. Also ist

$$\mathfrak{F}(K^*) = \{\gamma_C 0 : \gamma_C \in \Delta_n^2(\mathfrak{M}(r_\mu, s_\mu, t_\mu))\},$$

und jedes $\mathfrak{F}(L)$ ist Δ_n-Bild eines dieser $\mathfrak{F}(K^*)$.

3. Mittels der Geodätischen kann man noch eine weitere Gruppe $\Delta_n^3(\mathfrak{M})$ zu jedem Maßstück $\mathfrak{M}$ definieren. Sie besteht aus der Gesamtheit der $\gamma_C \in \Delta_n$, so daß für alle $K \in \mathfrak{M}$ und jede Geodätische $K(l)$ mit $\lim K(l) = K$ gilt:

$$\lim d(K(l), \gamma_C K(l)) = 0 \tag{9}$$

(dabei sind im Fall $\mathfrak{M} \in \partial\mathfrak{R}_n$ die Grenzwerte über $l \to \infty$, im Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}_n$ über $l \to d(K(0), K) < \infty$ zu erstrecken). Es folgt sofort, daß $\Delta_n^3(\mathfrak{M})$ eine Untergruppe von $\Delta_n^2(\mathfrak{M})$ ist, denn $\mathfrak{M}$ bleibt punktweise fest, und für $\gamma_C, \gamma_D \in \Delta_n^3(\mathfrak{M})$

gilt wegen der Dreiecksungleichung

$$d(K(l), \gamma_C^{-1}\gamma_D K(l)) = d(\gamma_C K(l), \gamma_D K(l))$$
$$\leqq d(K(l), \gamma_C K(l)) + d(K(l), \gamma_D K(l))$$

und damit $\gamma_C^{-1}\gamma_D \in \Delta_n^3(\mathfrak{M})$. Ferner ist $\Delta_n^3(\mathfrak{M})$ Normalteiler in $\Delta_n^2(\mathfrak{M})$, ja sogar in $\Delta_n^1(\mathfrak{M})$.

Satz 10: *Ist $\mathfrak{M}$ ein Maßstück vom Typ (r_μ, s_μ, t_μ), so ist die Gruppe $\Delta_n^3(\mathfrak{M})$ bezüglich ι antiisomorph zu der Gruppe der $C \in \hat{\Delta}_n^2(r_\mu, s_\mu, t_\mu)$ mit $C_1^{(\mu)} = \pm E$, $C_3^{(\mu)} = \pm E$ für $\mu = 1, 2, \ldots, g_1$ sowie $C_1^{(\mu)} = a_\mu E$, $C_3^{(\mu)} = b_\mu E$ für komplexe Zahlen a_μ, b_μ vom Betrag 1 und $\mu = g_1 + 1, g_1 + 2, \ldots, m$.*

Beweis: Man kann annehmen, daß $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{K}_n$ und typisches Maßstück ist.

a) Sei $\gamma_C \in \Delta_n^3(\mathfrak{M}(r_\mu, s_\mu, t_\mu))$ und eine Geodätische (7) mit (8) und (9) gegeben. Dann streben für $l \to \infty$ alle Eigenwerte der Matrizen $S(K(l), \gamma_C K(l))$ gegen 1, also die Hermiteschen Matrizen ${}^t\bar{L}L$ mit $L := (\delta_{\varkappa\lambda} e^{k_{\varkappa} l})\, C\, (\delta_{\varkappa\lambda} e^{-k_{\varkappa} l})$ gegen E. Das bedeutet für die drei Diagonalkästchen $L_{\varkappa\varkappa}$ von L

$${}^t\bar{L}_{\varkappa\varkappa} L_{\varkappa\varkappa} \to E\,.$$

Indem man die Freiheit der $k_\varkappa^{(\mu)}$ in (8) benutzt, erkennt man, daß C_1 und C_3 Diagonalmatrizen mit Diagonalelementen vom Betrag 1 sind. Wegen der Normalteilereigenschaft von $\Delta_n^3(\mathfrak{M})$ in $\Delta_n^2(\mathfrak{M})$ muß auch ACA^{-1} für jedes

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} \in \hat{\Delta}_n^2(r_\mu, s_\mu, t_\mu)$$

eine solche Diagonalmatrix sein. Daraus folgt, daß C_1 und C_3 Vielfache einer Einheitsmatrix sind, also C in der im Satz 10 angegebenen Weise zerfällt.

b) Sei umgekehrt ein solches $C \in \hat{\Delta}_n^2(r_\mu, s_\mu, t_\mu)$ gegeben. Weil die Matrix ACA^{-1} mit $A \in \hat{\Delta}_n^1(r_\mu, s_\mu, t_\mu)$ wieder diese Gestalt hat, genügt es, (9) für die Geodätische (7), (8) zu beweisen. Dann ist aber ${}^t\bar{L}_{\varkappa\varkappa} L_{\varkappa\varkappa} = E (\varkappa = 1, 2, 3)$, und ${}^t\bar{L}L$ konvergiert für $l \to \infty$ gegen die Einheitsmatrix, d. h. die Eigenwerte von $S(K(l), \gamma_C K(l))$ streben gegen 1, woraus (9) folgt.

4. Nach 1. endet jede Geodätische für $l \to \infty$ in einem Punkt $K \in \bar{\mathfrak{K}}_n$. Analog endet sie auch für $l \to -\infty$ in einem Punkt $L \in \bar{\mathfrak{K}}_n$. Zwei solche Punkte K und L aus $\bar{\mathfrak{K}}_n$ heißen zweifach uneigentlich verbindbar (oder kurz: verbindbar).

Lemma 11: *Jede Matrix K aus einem Maßstück vom Typ (r_μ, s_μ, t_μ) ist nur mit Punkten aus Maßstücken vom Typ (t_μ, s_μ, r_μ) verbindbar. Jedes Maßstück enthält höchstens einen mit K verbindbaren Punkt. Jedes Maßstück vom Typ (t_μ, s_μ, r_μ) enthält genau dann einen mit K verbindbaren Punkt, wenn für jedes $\mu = 1, 2, \ldots, m$ entweder $r_\mu = n$ oder $s_\mu = n$ oder $t_\mu = n$ ist.*

Beweis: Man kann ohne Einschränkung $K = K^*$ annehmen. Dann sind K^* und $-K^*$ durch jede Geodätische $K(l)$ der Art (7) und (8) verbindbar. Da jede Geodätische durch K^* die Form $\gamma_C K(l)$ mit $\gamma_C K^* = K^*$ hat und $\gamma_C(-K^*)$ einem Maßstück vom Typ (t_μ, s_μ, r_μ) angehört, folgt der erste Teil der Behauptung. Wenn $\gamma_{C_1}(-K^*)$ und $\gamma_{C_2}(-K^*)$ aus demselben Maßstück sind, dann

liegt $\gamma_I \gamma_{C_1}^{-1} \gamma_{C_2}(-K^*)$, wobei I die Komponenten $(\delta_{\varkappa, n+1-\lambda})$ hat, in dem typischen Maßstück vom Typ (t_μ, s_μ, r_μ), und $\gamma_{C_1}^{-1} \gamma_{C_2}(-K^*)$ hat die Form $\begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & -E_t \end{pmatrix}$, $A^{(\mu)} \in \mathfrak{R}^{(\mu)}(s_\mu)$. Wegen

$$T(K^*, \gamma_{C_1}^{-1} \gamma_{C_2}(-K^*)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E - A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(K^*, -K^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und der Gleichheit der Eigenwerte folgt $A = 0$, $\gamma_{C_1}(-K^*) = \gamma_{C_2}(-K^*)$. Also ist nur noch der dritte Teil der Behauptung zu zeigen. Zu jedem mit K^* verbindbaren L aus dem typischen Maßstück $\mathfrak{M}(t_\mu, s_\mu, r_\mu)$ existiert ein $C \in \Delta_n$ mit $\gamma_C K^* = K^*$ und $\gamma_C(-K^*) = L$. Infolge von Satz 6 zerfallen C und $I\,{}^tC$ in Matrizen der Form (6), woraus sich $r_\mu = n$ oder $s_\mu = n$ oder $t_\mu = n$ ergibt. Daß diese Bedingung auch für die Verbindbarkeit hinreicht, ist trivial. Damit ist Lemma 11 bewiesen.

Um alle mit $K \in \mathfrak{M}(r_\mu, s_\mu, t_\mu)$ verbindbaren Randpunkte zu bestimmen, nehme man ein $\gamma \in \Delta_n$ mit $\gamma K = K^*$. Dann ist $\{\gamma^{-1} \gamma_C(-\gamma K)\}$ die gesuchte Punktmenge, wobei C über alle Matrizen aus $\Delta_n^1(r_\mu, s_\mu, t_\mu)$ läuft, deren Diagonalkästchen $C_2^{(\mu)}$ für $\mu = 1, 2, \ldots, g_1$ orthogonal, für $\mu = g_1 + 1, g_1 + 2, \ldots, m$ unitär ist.

Kapitel II. Kompaktifizierung

§ 4. Die unimodulare Gruppe und ihr Fundamentalbereich

1. Es sei $\mathfrak{k}$ ein algebraischer Zahlkörper von endlichem Grad g über dem Körper der rationalen Zahlen und $\mathfrak{o}$ der Ring der ganzen Zahlen in $\mathfrak{k}$. Dann gibt es genau g verschiedene Isomorphismen von $\mathfrak{k}$ in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$. Das Bild von $\mathfrak{k}$ bei dem μ-ten Isomorphismus sei $\mathfrak{k}^{(\mu)}$. Man kann annehmen, daß $\mathfrak{k}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{k}^{(g_1)}$ die reellen konjugierten Körper und $\mathfrak{k}^{(g_1+\varkappa)}$, $\mathfrak{k}^{(g_1+g_2+\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, g_2)$ die paarweise konjugiert komplexen Körper sind. Ist C eine Matrix mit Elementen aus $\mathfrak{k}$, so bezeichne $C^{(\mu)}$ ihr Bild unter dem μ-ten Isomorphismus. Die Gruppe $GL(n, \mathfrak{k})$ aller n-reihigen nichtausgearteten Matrizen C mit Elementen in $\mathfrak{k}$ kann mittels des Isomorphismus

$$\vartheta : C \to (C^{(1)}, \ldots, C^{(g_1)}, C^{(g_1+1)}, \ldots, C^{(m)}) \quad m := g_1 + g_2$$

eingebettet werden in Δ_n. Dann hat $\Delta_n := \vartheta GL(n, \mathfrak{k})$ nach § 1 den Darstellungsraum $\mathfrak{H}_n$ und operiert dort fast-transitiv, d. h. die Bildmenge jedes Punktes aus $\mathfrak{H}_n$ ist überall dicht in $\mathfrak{H}_n$. Ferner werde mit $\Gamma(n, \mathfrak{o})$ die unimodulare Gruppe vom Grad n in $\mathfrak{k}$ bezeichnet, d. h. die Gesamtheit der n-reihigen Matrizen mit Elementen aus $\mathfrak{o}$, deren Determinante eine Einheit in $\mathfrak{k}$ ist. Die Gruppe $\Gamma_n := \vartheta \Gamma(n, \mathfrak{o})$ wirkt eigentlich diskontinuierlich auf $\mathfrak{H}_n$. Für sie hat HUMBERT a. a. O. einen Fundamentalbereich konstruiert. Sei $H^{(\mu)} =: X^{(\mu)}[Y^{(\mu)}]$ für $\mu = 1, 2, \ldots, m$ die (eindeutig bestimmte) Jacobische Zerlegung der Matrix $H^{(\mu)} \in \mathfrak{H}^{(\mu)}(n)$ in eine Diagonalmatrix $X^{(\mu)}$ mit reellen Diagonalelementen $x_\varkappa^{(\mu)}$ und eine komplexe Dreiecksmatrix $Y^{(\mu)} = (y_{\varkappa\lambda}^{(\mu)})$ mit $y_{\varkappa\lambda}^{(\mu)} = \delta_{\varkappa\lambda}$ für $\varkappa \geqq \lambda$, und es sei $\mathfrak{G}_n(u)$ der durch folgende Ungleichungen beschriebene Teilbereich von $\mathfrak{H}_n$:

$$(10) \qquad x_\varkappa^{(\mu)} < u\, x_{\varkappa+1}^{(\mu)},\ x_\varkappa^{(\mu_1)} < u\, x_\varkappa^{(\mu_2)},\ |y_{\varkappa\lambda}^{(\mu)}| < u \quad \text{für alle} \quad \varkappa, \lambda, \mu, \mu_1, \mu_2 .$$

HUMBERT hat bewiesen, daß es eine Konstante $u_n > 1$ und eine endliche Menge von Matrizen $D_1, \ldots, D_w$ aus $GL(n, \mathfrak{o})$ gibt, so daß jedes Element des Fundamentalbereiches sich schreiben läßt in der Form $H^{(\mu)}[D_\omega^{(\mu)}]$ mit $H \in \hat{\mathfrak{S}}_n(u)$, $u \geqq u_n$ und $1 \leqq \omega \leqq w$. Die Vereinigung der Bilder von $\hat{\mathfrak{S}}_n(u)$ unter $D_1, \ldots, D_w$ heiße $\hat{\mathfrak{F}}_n(u)$. Nach HUMBERT gilt für alle $u > 1$ und jedes $C_0 \in \hat{\Lambda}_n$

$$\{C \in \hat{\Gamma}_n : \hat{\mathfrak{F}}_n(u)\,[C_0] \cap \hat{\mathfrak{F}}_n(u)\,[C] \neq \emptyset\} \text{ ist endlich.} \tag{11}$$

Von nun an sei $u \geqq u_n$ fest gewählt.

2. Die Cayley-Abbildung α_n überführt $\hat{\Lambda}_n$ in $\alpha_n \hat{\Lambda}_n \alpha_n^{-1} =: \Lambda_n$, $\hat{\Gamma}_n$ in $\alpha_n \hat{\Gamma}_n \alpha_n^{-1} =: \Gamma_n =: \Gamma$; $\hat{\mathfrak{S}}_n(u)$ in $\alpha_n \hat{\mathfrak{S}}_n(u) =: \mathfrak{S}_n(u) =: \mathfrak{S}_n$ und $\hat{\mathfrak{F}}_n(u)$ in $\alpha_n \hat{\mathfrak{F}}_n(u) =: \mathfrak{F}_n(u) =: \mathfrak{F}_n =: \mathfrak{F}$. Wie sieht die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{S}}_n$ von $\mathfrak{S}_n$ bezüglich der natürlichen Topologie von $\mathfrak{L}_n$ aus, d. h. welches sind die Häufungspunkte von $\mathfrak{S}_n$ in $\overline{\mathfrak{R}}_n$? Bei Konvergenz einer Folge aus $\mathfrak{S}_n$ gegen einen solchen Häufungspunkt gilt (nach Übergang zu einer Teilfolge) wegen (10) für geeignete, von μ unabhängige r, s, t mit $r + s + t = n$

$$x_1^{(\mu)} \to 0, \ldots, x_r^{(\mu)} \to 0; x_{r+s+1}^{(\mu)} \to \infty, \ldots, x_n^{(\mu)} \to \infty\,,$$

während die $x_{r+1}^{(\mu)}, \ldots, x_{r+s}^{(\mu)}$ gegen positive Zahlen und die $y_{\varkappa\lambda}^{(\mu)}$ gegen endliche Werte konvergieren. Zerlegt man $H \in \mathfrak{H}_n$ in $H =: (H_{\varkappa\lambda})$, $1 \leqq \varkappa, \lambda \leqq 3$, $H_{\varkappa\varkappa} =: H_\varkappa$ mit r-reihigen H_1, s-reihigen H_2 und t-reihigen H_3, so ist

$$K := \alpha_n H = \left(\begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} - H^{-1}\begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}\right) \times$$
$$\times \left(\begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} + H^{-1}\begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}\right)^{-1}.$$

Setzt man hierin die Jacobischen Darstellungen — entsprechend in Kästchen zerlegt — ein, so ergibt eine einfache Rechnung

$$K \to \begin{pmatrix} -E_r & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_s \tilde{H}_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_t \end{pmatrix};$$

dabei bezeichnet $\tilde{H}_2$ den Grenzwert von $X_2[Y_2]$. Also haben die Häufungspunkte die Gestalt

$$\begin{pmatrix} -E_r & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & E_t \end{pmatrix},\ A \in \mathfrak{R}_s \cap \overline{\mathfrak{S}}_s(u),\ 0 \leqq r, s, t \leqq n,\ r + s + t = n\,.$$

Die Gesamtmenge dieser Matrizen für feste r, s, t sei $\overline{\mathfrak{S}}(r, s, t)$. Umgekehrt läßt sich jede Matrix aus einem $\overline{\mathfrak{S}}(r, s, t)$ durch konvergente Folgen aus $\mathfrak{S}_n$ erreichen. Das ergibt

Lemma 12: *Die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{S}_n$ ist enthalten in der Vereinigung der typischen Maßstücke $\mathfrak{M}(r, s, t)$ mit von μ unabhängigen r, s und t.*

Genauer gilt

$$\overline{\mathfrak{G}}_n = \bigcup_{\substack{0 \leqq r,s,t \leqq n \\ r+s+t=n}} \overline{\mathfrak{G}}(r,s,t),\ \overline{\mathfrak{F}}_n = \bigcup_{\omega=1}^{w} \gamma_{D_\omega} \overline{\mathfrak{G}}_n .$$

§ 5. Kompaktifizierung des Fundamentalbereichs

1. Es wird jetzt die Teilmenge $\Gamma_n \overline{\mathfrak{F}}_n(u) = : \mathfrak{K}_n^*(u) = : \mathfrak{K}_n^*$ von $\overline{\mathfrak{K}}_n$ eingeführt. Sie ist unabhängig von der Wahl des Parameters $u \geqq u_n$, und es gilt $\mathfrak{K}_n^* = \Lambda_n \overline{\mathfrak{G}}_n$. Denn zu $u' \geqq u$ und $\gamma' \in \Lambda_n$ existieren endlich viele $\gamma_k \in \Gamma_n$ mit $\gamma' \mathfrak{F}_n(u') \subset \bigcup \gamma_k \mathfrak{F}_n(u)$. Da die Abbildungen $\gamma \in \Lambda_n$ euklidische Homeomorphismen von $\overline{\mathfrak{K}}_n$ sind, folgt

$$\gamma' \overline{\mathfrak{F}}_n(u') = \overline{\gamma' \mathfrak{F}_n(u')} \subset \overline{\bigcup \gamma_k \mathfrak{F}_n(u)} = \bigcup \gamma_k \overline{\mathfrak{F}}_n(u)$$

und $\Lambda_n \overline{\mathfrak{F}}_n(u') \subset \Gamma_n \overline{\mathfrak{F}}_n(u) = \mathfrak{K}_n^*(u)$. Also gilt $\mathfrak{K}_n^*(u') = \mathfrak{K}_n^*(u)$ und $\mathfrak{K}_n^* = \Lambda_n \overline{\mathfrak{G}}_n$. Als Spezialfall hat sich ergeben, daß sich $\mathfrak{K}_n^*$ nicht ändert, wenn man von Γ_n zu einer mit Γ_n vergleichbaren Untergruppe von Λ_n übergeht.

2. Nun wird $\mathfrak{K}_n^*$ geeignet topologisiert. Für beliebige $K \in \mathfrak{K}_n^*$ sei $\mathfrak{U}^*(K)$ die Gesamtheit der Teilmengen $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{K}_n^*$ mit den Eigenschaften:

a) Für jedes $\gamma \in \Gamma_n$ mit $\gamma K \in \overline{\mathfrak{F}}_n$ ist $\gamma \mathfrak{U} \cap \overline{\mathfrak{F}}_n$ eine Umgebung von γK in $\overline{\mathfrak{F}}_n$ bezüglich der natürlichen Topologie.

b) Für alle γ aus der Fixpunktgruppe Γ_K von K in Γ_n gilt $\gamma \mathfrak{U} = \mathfrak{U}$.

Lemma 13: *Es gibt genau eine Topologie $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{K}_n^*$, für die die Mengen $\mathfrak{U}^*(K)$ Basen der Umgebungsfilter von K sind.*

Zum *Beweis* genügt es bekanntlich, für jedes $\mathfrak{U}^*(K)$ die folgenden Bedingungen nachzuweisen:

1) $\mathfrak{U}^*(K)$ ist nicht leer, und jedes Element von $\mathfrak{U}^*(K)$ enthält K;

2) Der Durchschnitt zweier Elemente von $\mathfrak{U}^*(K)$ enthält ein Element von $\mathfrak{U}^*(K)$;

3) Liegt $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{U}^*(K)$, so gibt es ein solches $\mathfrak{V}$ aus $\mathfrak{U}^*(K)$, daß zu jedem $L \in \mathfrak{V}$ ein $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{W} \in \mathfrak{U}^*(L)$ existiert.

Die ersten beiden Eigenschaften sind trivialerweise erfüllt. Im weiteren wird die dritte Bedingung verifiziert.

Wegen (11) und Lemma 12 gibt es eine endliche Teilmenge Θ von Γ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\gamma \in \Gamma$ mit $\overline{\mathfrak{F}} \cap \gamma \overline{\mathfrak{F}} \neq \emptyset$ existieren geeignete r, s, t, ω, ψ und ein $\delta \in \Theta$, so daß

$$\gamma_{D_\omega}^{-1} \gamma \gamma_{D_\psi} \in \Delta_n^1(\mathfrak{M}(r,s,t)) \cap \Lambda_n,\ \pi_s(\gamma_{D_\omega}^{-1} \gamma \gamma_{D_\psi}) = \pi_s(\gamma_{D_\omega}^{-1} \delta \gamma_{D_\psi})$$

und $\overline{\mathfrak{F}} \cap \gamma \overline{\mathfrak{F}} = \overline{\mathfrak{F}} \cap \delta \overline{\mathfrak{F}}$ gilt und die Einschränkungen von γ und δ auf $\overline{\mathfrak{F}} \cap \gamma^{-1} \overline{\mathfrak{F}}$ übereinstimmen.

Sei $\mathfrak{U} \in \mathfrak{U}^*(K)$ vorgegeben; ferner seien K_α $(1 \leqq \alpha \leqq a)$ die (endlich vielen) Elemente der Menge $\Gamma K \cap \overline{\mathfrak{F}}$ und γ_α geeignete Abbildungen aus Γ mit $\gamma_\alpha K = K_\alpha$. Für eine beliebige offene Umgebung $\mathfrak{U}_\alpha$ von K_α in $\overline{\mathfrak{F}}$ (bezüglich der natürlichen Topologie) liegt $\mathfrak{U} := \Gamma_K \bigcup_\alpha \gamma_\alpha^{-1} \mathfrak{U}_\alpha$ in $\mathfrak{U}^*(K)$, und umgekehrt enthält jedes $\mathfrak{U} \in \mathfrak{U}^*(K)$ eine solche Menge $\mathfrak{U}$. Man kann also $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}$ annehmen.

Es wird nun eine Menge $\mathfrak{V} := \Gamma_K \cup \gamma_\alpha^{-1}\mathfrak{V}_\alpha$ mit solchen Umgebungen $\mathfrak{V}_\alpha$ von K_α in $\overline{\mathfrak{F}}$ gewählt, daß für alle $\delta \in \Theta$ und alle K_α und $K_{\alpha'}$ aus $\Gamma K \cap \overline{\mathfrak{F}}$ gilt

a) $\delta\mathfrak{V}_\alpha \cap \overline{\mathfrak{F}} = \emptyset$ falls $\delta K_\alpha \notin \overline{\mathfrak{F}}$;

b) $\delta\mathfrak{V}_\alpha \cap \overline{\mathfrak{F}} \subset \mathfrak{U}_{\alpha'}$ falls $\delta K_\alpha = K_{\alpha'}$;

c) $\delta\mathfrak{V}_\alpha \cap \mathfrak{V}_{\alpha'} = \emptyset$ falls $\delta K_\alpha \neq K_{\alpha'}$.

Nach Konstruktion von Θ gilt dann für alle $\gamma \in \Gamma$

a′) $\gamma\mathfrak{V}_\alpha \cap \overline{\mathfrak{F}} = \emptyset$ falls $\gamma K_\alpha \notin \overline{\mathfrak{F}}$;

b′) $\gamma\mathfrak{V}_\alpha \cap \overline{\mathfrak{F}} \subset \mathfrak{U}_{\alpha'}$ falls $\gamma K_\alpha = K_{\alpha'}$;

c′) $\gamma\mathfrak{V} \cap \mathfrak{V} = \emptyset$ falls $\gamma \notin \Gamma_K$.

Diese Menge $\mathfrak{V}$ genügt den unter 3) geforderten Bedingungen. Denn ist $L \in \mathfrak{V}$, etwa $L = \gamma_0\gamma_\alpha^{-1}L_0$ mit $\gamma_0 \in \Gamma_K$, $L_0 \in \mathfrak{V}_\alpha$ und ferner $\Gamma L \cap \overline{\mathfrak{F}} = \{L_\beta : 1 \leqq \beta \leqq b\}$, $\delta_\beta L = L_\beta$ mit $\delta_\beta \in \Gamma$, so folgt wegen $L_\beta \in \delta_\beta\gamma_0\gamma_\alpha^{-1} \cdot \mathfrak{V}_\alpha \cap \overline{\mathfrak{F}}$ aus a′) $\delta_\beta K \in \overline{\mathfrak{F}}$, also etwa $\delta_\beta K = \gamma_{\alpha(\beta)}K$ und $\delta_\beta^{-1}\gamma_{\alpha(\beta)} \in \Gamma_K$. Dann ergibt b′) wegen $\delta_\beta\gamma_0\gamma_\alpha^{-1} \cdot K_\alpha = K_{\alpha(\beta)}$ sofort $L_\beta \in \mathfrak{U}_{\alpha(\beta)}$, und da $\mathfrak{U}_{\alpha(\beta)}$ offen ist, kann man eine Umgebung $\mathfrak{W}_\beta$ von L_β in $\overline{\mathfrak{F}}$ wählen, die in $\mathfrak{U}_{\alpha(\beta)}$ enthalten ist. Ferner ist $\Gamma_L \subset \Gamma_K$ wegen c′), und $\mathfrak{W} := \Gamma_L \cup \delta_\beta^{-1}\mathfrak{W}_\beta \in \mathfrak{U}^*(L)$ erfüllt

$$\mathfrak{W} \subset \Gamma_K \bigcup_\beta \delta_\beta^{-1}\mathfrak{U}_{\alpha(\beta)} = \Gamma_K \bigcup_\beta \gamma_{\alpha(\beta)}^{-1}\mathfrak{U}_{\alpha(\beta)} \subset \mathfrak{U},$$

was zu zeigen war[1]).

Nebenbei hat der Beweis ergeben, daß die Mengen $\tilde{\mathfrak{U}}$ ein Fundamentalsystem von Umgebungen von K bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}$ bilden.

Ebenso wie für $\mathfrak{K}_n^*$ kann man zeigen, daß $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(u)$ nicht von u abhängt, sofern $u \geqq u_n$ ist. Denn für $u' \geqq u$ ist $\overline{\mathfrak{F}}_n(u') \supset \overline{\mathfrak{F}}_n(u)$ und folglich $\mathfrak{T}(u)$ feiner als $\mathfrak{T}(u')$. Ist umgekehrt $\mathfrak{U}$ eine $\mathfrak{T}(u)$-Umgebung von $K \in \mathfrak{K}_n^*$, so enthält $\mathfrak{U}$ eine $\mathfrak{T}(u)$-Umgebung $\tilde{\mathfrak{U}} = \Gamma_K \cup \gamma_\alpha^{-1}\mathfrak{U}_\alpha$ von K, die enthalten ist in einer $\mathfrak{T}(u')$-Umgebung $\mathfrak{U}_1'$, welche Eigenschaft c′) erfüllt. Es gibt endliche viele $\delta \in \Gamma_n$, für die $\overline{\mathfrak{F}}_n(u') \subset \bigcup \delta\overline{\mathfrak{F}}_n(u)$ gilt. Setzt man $\Gamma K \cap \overline{\mathfrak{F}}_n(u') = \{K_\beta' : \beta = 1, 2, \ldots, b\}$, dann kann man euklidische Umgebungen $\mathfrak{V}(\delta^{-1}K_\beta')$ von $\delta^{-1}K_\beta'$ in $\overline{\mathfrak{K}}_n$ finden, deren Durchschnitt mit $\overline{\mathfrak{F}}_n(u)$ für $\delta^{-1}K_\beta' \notin \overline{\mathfrak{F}}_n(u)$ leer ist und sonst in $\Gamma_n\tilde{\mathfrak{U}} \cap \cap \overline{\mathfrak{F}}_n(u)$ enthalten ist. Die Umgebung $\mathfrak{V}_\beta' := \bigcap \delta\mathfrak{V}(\delta^{-1}K_\beta')$ von K_β' erfüllt dann

$$\mathfrak{V}_\beta' \cap \bigcup \delta\overline{\mathfrak{F}}_n(u) \subset \bigcup \delta(\mathfrak{V}(\delta^{-1}K_\beta') \cap \overline{\mathfrak{F}}_n(u)) \subset \Gamma_n\tilde{\mathfrak{U}} \cap \bigcup \delta\overline{\mathfrak{F}}_n(u)$$

und $\mathfrak{V}_\beta' \cap \overline{\mathfrak{F}}_n(u') \subset \Gamma_n\tilde{\mathfrak{U}} \cap \overline{\mathfrak{F}}_n(u')$. Also ist $\mathfrak{U}_2' := \Gamma_n\tilde{\mathfrak{U}}$ und damit auch $\mathfrak{U}_1' \cap \mathfrak{U}_2'$ eine $\mathfrak{T}(u')$-Umgebung von K, und es folgt

$$\mathfrak{U}_1' \cap \mathfrak{U}_2' = \mathfrak{U}_1' \cap \bigcup_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_K} \gamma\tilde{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}_1' \cap \tilde{\mathfrak{U}} = \tilde{\mathfrak{U}} \subset \mathfrak{U}.$$

Damit ist gezeigt, daß auch $\mathfrak{T}(u')$ feiner als $\mathfrak{T}(u)$ ist und die Topologien übereinstimmen. In ähnlicher Weise läßt sich beweisen, daß sich die Topologie nicht ändert, wenn man von Γ zu einer vergleichbaren Gruppe übergeht.

Lemma 14: *Die Abbildungen $\gamma \in \Gamma_n$ sind $\mathfrak{T}$-Homeomorphismen von $\mathfrak{K}_n^*$; $\mathfrak{T}$ induziert auf $\mathfrak{K}_n$, $\gamma\overline{\mathfrak{F}}_n$ und $\gamma\overline{\mathfrak{G}}_n$ für $\gamma \in \Gamma_n$ die euklidische Topologie.*

[1]) Diesen Beweis verdanke ich I. SATAKE, der ihn mir in einem Brief mitgeteilt hat.

Beweis: Der erste Teil der Behauptung gilt trivialerweise. Sei $K \in \mathfrak{K}_n$ und $\mathfrak{U}$ eine relativ-kompakte, euklidische Umgebung von K. Da Γ_K endlich ist, enthält $\mathfrak{U}$ eine Γ_K-invariante Umgebung $\mathfrak{V}$ von K. Sind γ_α die endlich vielen $\gamma \in \Gamma_n$ mit $\gamma_\alpha K \in \overline{\mathfrak{F}}_n$ und $\mathfrak{U}_\alpha$ Umgebungen von $\gamma_\alpha K$ in $\overline{\mathfrak{F}}_n$ mit $\gamma_\alpha^{-1}\mathfrak{U}_\alpha \subset \mathfrak{V}$, so gilt $\Gamma_K \cup \gamma_\alpha^{-1}\mathfrak{U}_\alpha \subset \mathfrak{U}$. Umgekehrt existiert ein zu K äquivalenter Punkt in der offenen Menge $\mathfrak{F}_n$, und folglich enthält jede $\mathfrak{T}$-Umgebung von K eine euklidische Umgebung von K. Damit ist der zweite Teil der Behauptung gezeigt.

Sei $K \in \overline{\mathfrak{F}}_n$, $\mathfrak{U}$ eine euklidische Umgebung von K in $\overline{\mathfrak{F}}_n$, $\Gamma K \cap \overline{\mathfrak{F}}_n = \{K_\alpha : \alpha = 1, 2, \ldots, a\}$ und $\gamma_\alpha K = K_\alpha$. Wählt man eine Umgebung $\mathfrak{U}_\alpha$ von K_α in $\overline{\mathfrak{F}}_n$ mit $\delta\,\mathfrak{U}_\alpha \cap \overline{\mathfrak{F}}_n \subset \mathfrak{U}$ für alle $\delta \in \Theta$ mit $\delta K_\alpha = K$, so folgt für $\tilde{\mathfrak{U}} := \Gamma_K \cup \gamma_\alpha^{-1}\mathfrak{U}_\alpha$

$$\tilde{\mathfrak{U}} \cap \overline{\mathfrak{F}}_n = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_K} (\gamma\,\gamma_\alpha^{-1}\mathfrak{U}_\alpha \cap \overline{\mathfrak{F}}_n) \subset \mathfrak{U}\,.$$

Da umgekehrt die euklidische Topologie trivialerweise feiner als $\mathfrak{T}$ ist, sind beide Topologien auf $\overline{\mathfrak{F}}_n$ identisch und damit auch auf $\gamma\overline{\mathfrak{F}}_n$ und $\gamma\overline{\mathfrak{G}}_n$. Damit ist das Lemma bewiesen. Man kann zeigen, daß es sogar für alle $\gamma \in \Lambda_n$ gilt.

2. Da $\mathfrak{K}_n^*$ Γ_n-invariant ist, kann man $\mathfrak{K}_n^*/\Gamma_n$ bilden und mit der Quotiententopologie versehen. Hauptresultat ist

Satz 15: *$\mathfrak{K}_n^*/\Gamma_n$ ist Vereinigung von endlich vielen, paarweise disjunkten Teilräumen, die zu einem Quotienten $\mathfrak{K}_s/\Gamma_s'$, $0 \leqq s \leqq n$ isomorph sind ($\mathfrak{K}_0$ ist ein Punkt, Γ_0' die einelementige Gruppe, Γ_s' eine mit Γ_s vergleichbare Untergruppe von Λ_s). Ferner ist $\mathfrak{K}_n/\Gamma_n$ überall dicht in $\mathfrak{K}_n^*/\Gamma_n$, und $\mathfrak{K}_n^*/\Gamma_n$ ist ein kompakter Hausdorff-Raum.*

Damit ist die Aufgabe gelöst, den Fundamentalbereich von Γ_n in $\mathfrak{K}_n$ (oder von $\hat{\Gamma}_n$ in $\mathfrak{H}_n$) zu kompaktifizieren.

Beweis: 1) Da $\mathfrak{K}_n^*$ unabhängig von u ist und die Folge $\mathfrak{G}_s(1)$, $\mathfrak{G}_s(2)$, ... den Raum $\mathfrak{K}_s$ ausschöpft, gilt

$$\mathfrak{K}_n^* = \overset{w}{\bigcup_{\omega=1}} \bigcup_{\substack{0 \leqq r,s,t \leqq n \\ r+s+t=n}} \Gamma_n \gamma_{D_\omega} \mathfrak{M}(r,s,t)\,. \tag{12}$$

Sei $\eta : \Delta_n^1(\mathfrak{M}(r,s,t)) \cap \Lambda_n \to \Lambda_s$ der Homomorphismus, der jedes γ_C mit $C \in \hat{\Delta}_n^1 \cap \hat{\Lambda}_n$ von der Gestalt (6) auf $\gamma_{C_s} \in \Lambda_s$ abbildet. Trivialerweise ist $\mathfrak{M}(r,s,t)$ kanonisch isomorph zu $\mathfrak{K}_s$, und diese Identifikation ist mit der Wirkungsweise von Λ_n verträglich. Die Fixuntergruppe von $\gamma_{D_\omega}\mathfrak{M}$ in Γ_n ist $\gamma_{D_\omega}\Delta_n^1\gamma_{D_\omega}^{-1} \cap \Gamma_n$, und $\Delta_n^1 \cap \gamma_{D_\omega}^{-1}\Gamma_n\gamma_{D_\omega}$ wirkt auf $\mathfrak{M}$ wie

$$\Gamma_s' := \eta\big(\Delta_n^1(\mathfrak{M}(r,s,t)) \cap \gamma_{D_\omega}^{-1}\Gamma_n\gamma_{D_\omega}\big)$$

auf $\mathfrak{K}_s$. Offenbar ist Γ_s' Untergruppe von Λ_s. Ferner ist Γ_s' mit Γ_s vergleichbar. Denn wird $g \in \mathfrak{o}$ so gewählt, daß $g D_\omega^{-1}$ eine in $\mathfrak{k}$ ganze Matrix ist, dann hat

$$\{C \in \vartheta^{-1}(D_\omega^{-1}\Delta_n^1 D_\omega \cap \hat{\Gamma}_n) : C \equiv E \bmod g\}$$

endlichen Index in $\vartheta^{-1}(D_\omega^{-1}\Delta_n^1 D_\omega \cap \hat{\Gamma}_n)$, also hat auch

$$\{B \in \vartheta^{-1}(\Delta_n^1 \cap D_\omega \hat{\Gamma}_n D_\omega^{-1}) : D_\omega^{-1} B D_\omega \equiv E \bmod g\}$$

und damit die Zwischengruppe $\vartheta^{-1}(\Delta_n^{-1} \cap D_\omega\hat{\Gamma}_n D_\omega^{-1} \cap \hat{\Gamma}_n)$ endlichen Index in $\vartheta^{-1}(\Delta_n^1 \cap D_\omega\hat{\Gamma}_n D_\omega^{-1})$. Folglich ist $\eta(\Delta_n^1 \cap \gamma_{D_\omega}^{-1}\Gamma_n\gamma_{D_\omega} \cap \Gamma_n)$ von endlichem Index in Γ_s'. Andererseits hat

$$\{C \in \vartheta^{-1}(\Delta_n^1 \cap \hat{\Gamma}_n) : C \equiv E \bmod g\}$$

endlichen Index in $\vartheta^{-1}(\Delta_n^1 \cap \Gamma_n)$ und damit auch die Zwischengruppe $\vartheta^{-1}(\Delta_n^1 \cap D_\omega \Gamma_n D_\omega^{-1} \cap \Gamma_n)$. Also hat $\eta(\Delta_n^1 \cap \gamma_{D_\omega}^{-1} \Gamma_n \gamma_{D_\omega} \cap \Gamma_n)$ ebenfalls in Γ_s endlichen Index, woraus sich die Vergleichbarkeit von Γ_s' und Γ_s ergibt. Aus

$$\Gamma_n \gamma_{D_\omega} \mathfrak{M}/\Gamma_n \cong \gamma_{D_\omega} \mathfrak{M}/(\gamma_{D_\omega} \Delta_n^1 \gamma_{D_\omega}^{-1} \cap \Gamma_n) \cong \mathfrak{M}/(\Delta_n^1 \cap \gamma_{D_\omega}^{-1} \Gamma_n \gamma_{D_\omega}) \cong \mathfrak{K}_s/\Gamma_s'$$

folgt mit (12) der erste Teil des Satzes.

2) Jede nichtleere, $\mathfrak{T}$-offene Teilmenge von $\mathfrak{K}_n^*$ hat mit $\mathfrak{K}_n$ einen nichtleeren Durchschnitt. Folglich hat auch jede nichtleere, offene Teilmenge von $\mathfrak{K}_n^*/\Gamma_n$ mit $\mathfrak{K}_n/\Gamma_n$ einen nichtleeren Durchschnitt, d. h. $\mathfrak{K}_n/\Gamma_n$ ist überall dicht in $\mathfrak{K}_n^*/\Gamma_n$.

3) Da $\mathfrak{K}_n^*/\Gamma_n$ stetiges Bild der bezüglich $\mathfrak{T}$ quasikompakten Menge $\overline{\mathfrak{F}}_n$ ist, ist auch $\mathfrak{K}_n^*/\Gamma_n$ quasikompakt.

4) Zum Nachweis der Trennungseigenschaft sind zu zwei Γ-inäquivalenten Punkten K, $K' \in \mathfrak{K}_n^*$ zwei disjunkte, Γ-saturierte $\mathfrak{T}$-Umgebungen $\mathfrak{U}$ von K bzw. $\mathfrak{U}'$ von K' in $\mathfrak{K}_n^*$ zu konstruieren. Sei $\Gamma K \cap \overline{\mathfrak{F}}_n = \{K_\alpha : \alpha = 1, 2, \ldots, a\}$ $\Gamma K' \cap \overline{\mathfrak{F}}_n = \{K'_\beta : \beta = 1, 2, \ldots, b\}$, $\gamma_\alpha K = K_\alpha$, $\gamma'_\beta K = K'_\beta$. Wählt man euklidische Umgebungen $\mathfrak{U}_\alpha$ von K_α in $\overline{\mathfrak{F}}_n$ und $\mathfrak{U}'_\beta$ von K'_β in $\overline{\mathfrak{F}}_n$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{U}_\alpha \cap \delta \mathfrak{U}'_\beta = \emptyset$ für alle $\delta \in \Theta$ und alle α, β, so erfüllen $\mathfrak{U} := \Gamma \cup \gamma_\alpha^{-1} \mathfrak{U}_\alpha$ und $\mathfrak{U}' := \Gamma \cup \gamma_\beta'^{-1} \mathfrak{U}'_\beta$ die geforderte Bedingung $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{U}' = \emptyset$, und der Satz ist bewiesen.

(Eingegangen am 2. Dezember 1964)

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · HEIDELBERG · NEW YORK

Springer Tracts in Natural Philosophy

Volume 7

Edited by **C. Truesdell**. Co-Editors: L. Collatz, G. Fichera, P. Germain, J. Keller, A. Seeger

The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point

By Dr. Eugene Leimanis
Professor of Mathematics, The University of British Columbia, Vancouver, B.C., Canada

XVI, 337 pages 8vo. 1965
Cloth DM 48,—

The Problems exhibited by the motion of the Earth's artificial satellites have stimulated further research of two classical unsolved dynamical problems: (i) the motion of a rigid body about a fixed point, and (ii) the motion of n-bodies ($n \geqq 3$) subject to the Newtonian attraction. In addition, new problems have arisen. To name just a few: (i) separation of the general motion of mutually attracting rigid bodies into translations of their mass centers and rotations about the latter, (ii) rotation of an artificial satellite about its mass center, (iii) motion of a rigid body about a fixed point in a central Newtonian force field, (iv) motion of a self-excited rigid body about a fixed point, (v) regulation of rotations by self-excitements, and so on.

The monograph attempts to account for the present state of the above problems and their development during the past two hundred years since the publication of EULER's papers which contained his now classical equations of motion of a rigid body about a fixed point.

A reference work of interest to applied mathematicians and space scientists.

■ **Prospectus on request!**

Seite

GANESAN, N., Properties of Rings with a Finite Number of Zero Divisors. II. 241
(Anschrift: Annamalai University, No. 1, Umayal lane, Chidambaram, Madras, India)

GILMER, R. W., A Class of Domains in which Primary Ideals are Valuation Ideals . . 247
(Anschrift: The Florida State Univ., Dept. of Mathematics, Tallahassee 32306/Florida)

BAAYEN, P. C., and G. HELMBERG, On Families of Equi-Uniformly Distributed Sequences in Compact Spaces 255
(Anschrift: Mathematisch Centrum, 2 e Boerhavestraat 49, Amsterdam/Holland; Onderafdeling der Wiskunde, Technische Hogeschool, Eindhoven/Holland)

BOSBACH, B., Komplementäre Halbgruppen. Ein Beitrag zur instruktiven Idealtheorie kommutativer Halbgruppen 279
(Anschrift: Albertus-Magnus Gymnasium, 5060 Bensberg)

SPILKER, J., Kompaktifizierung des Humbertschen Fundamentalbereichs 296
(Anschrift: Mathematisches Institut der Universität, 78 Freiburg/Brsg., Hebelstr. 40)

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Edgar Seidler, 1 Berlin 31 (Wilmersdorf), Heidelberger Platz 3.
Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York — Druck der Brühlschen Universitätsdruckerei, Gießen
Printed in Germany